Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

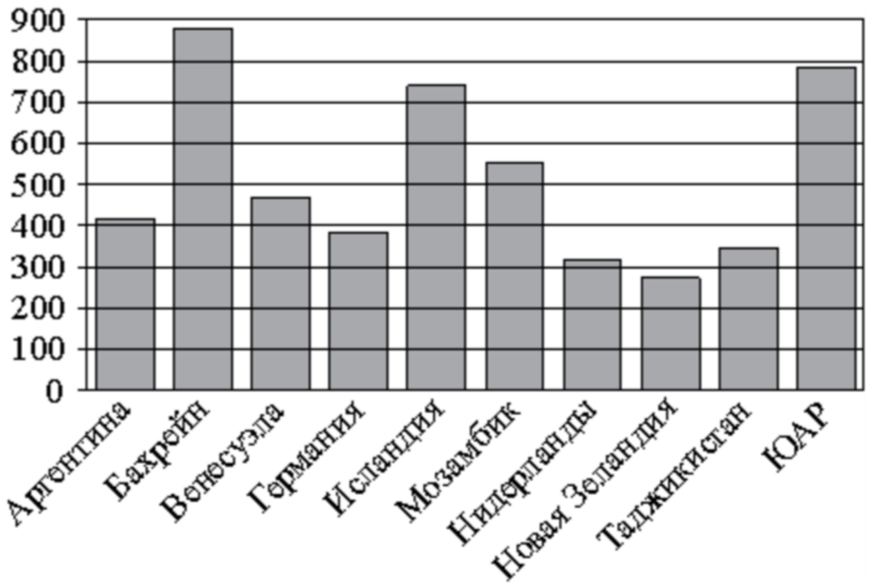
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Футболка стоила 500 рублей. После снижения цены она стала стоит 395 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

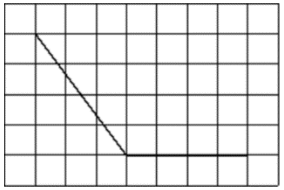
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимал Бахрейн, десятое место – Новая Зеландия. Какое место занимали Нидерланды?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите синус этого угла.



Ответ: ___________________________.

4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков делится на 5, но не делится на 30.

Ответ: ___________________________.

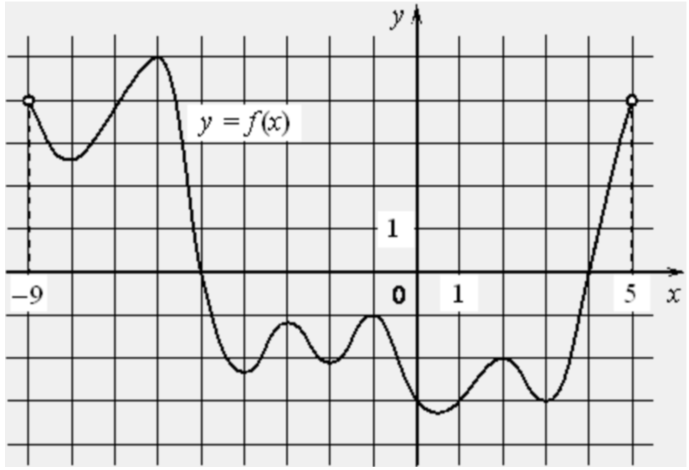
5 Найдите корень уравнения
$\sqrt[3]{x+3} = 5.$

Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 15$, AH – высота, $BH = 6$. Найдите косинус угла BAC.

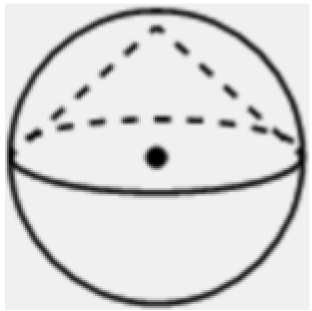
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ___________________________.

8 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_5 2}{\log_5 13} + \log_{13} 0{,}5.$$

Ответ: ____________________________.

10 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2,1 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 21$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: ____________________________.

11 Расстояние между городами A и B равно 420 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку минимума функции

$$y = -\frac{x^2 + 196}{x}.$$

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 1:2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB = 1:5$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

15 Решите неравенство

$$\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}.$$

16 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно.
Площади четырёхугольников $ABLN$ и $NLCD$ равны, а площади четырёхугольников $KBCM$ и $AKMD$ относятся как 11:17.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
б) Найдите отношение BC к AD.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180218

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство
$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$
не имеет решений на отрезке $[a - 6; a]$.

19 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	21
2	9
3	0,8
4	0,25
5	122
6	0,4
7	9
8	20
9	0
10	30
11	240
12	-14
13	а) $\pi n, \frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $-3\pi;\ -2\pi;\ -\frac{7\pi}{4}$
14	$\operatorname{arctg} 1{,}5\sqrt{5}$
15	$(-\infty; 2\log_7 2)\cup(1; 2\log_7 3]$
16	2:5
17	20
18	$\left[\frac{19-\sqrt{45}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2}\right]$
19	а) Да, например, 1 2 3 4, б) 44, в) 3; 6

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

а)

$\sqrt{2}\sin^2 x = \sin x$

$\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x = 0$

$\sin x\cdot\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) = 0$

$\sin x = 0$ $x = \pi n;\ n\in Z$	$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ $\sqrt{2}\sin x = 1$ $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \frac{\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z$ $x = \frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z$

б)
Подберём корни для $x = \pi n; n \in Z$

Если $n = -4$, то $x = -4\pi \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = -3$, то $x = -3\pi \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = -2$, то $x = -2\pi \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = -\pi \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{4} - 4\pi = -\frac{15\pi}{4} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{4} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = \frac{3\pi}{4} - 4\pi = -\frac{13\pi}{4} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-3\pi; -2\pi; -\frac{7\pi}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 1:2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB = 1:5$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

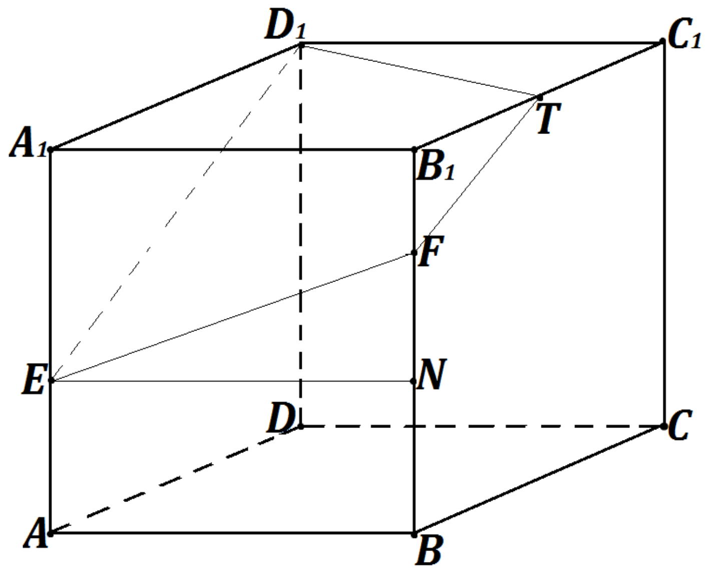
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

.

Решение:

а)



$A_1E:EA = 1:2$ и $AA_1 = 6$

=>

$A_1E = 2$

$EA = 4$

$B_1F:FB = 1:5$ и $BB_1 = 6$

=>

$B_1F = 1$

$FB = 5$

T – середина B_1C_1

=>

$B_1T = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

=>

$\triangle B_1FT$ – равнобедренный

Построим сечение:

Построим прямую EF, т.к. точки E и F лежат в одной плоскости

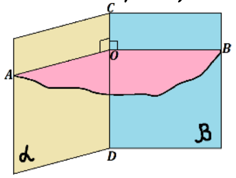
Построим прямую FT, т.к. точки F и T лежат в одной плоскости

Построим такую прямую через точку E, чтобы она была параллельна FT и т.к. $\triangle A_1D_1E \sim \triangle B_1FT$ (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними), то плоскость EFT проходит через вершину D_1

■

б)

Схема нахождения угла между плоскостями



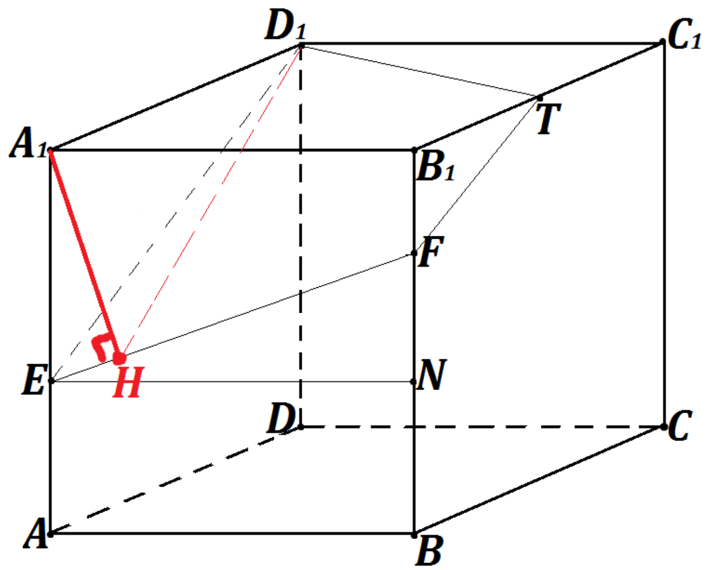
1) Ищем прямую пересечения плоскостей (на рисунке это CD)

2) На этой прямой ставим точку (на рисунке это точка O)

3) Проводим из этой точки два перпендикуляра в каждой из плоскостей (на рисунке $OA \perp CD$ в плоскости α и $OB \perp CD$ в плоскости β)

4) Угол между этими перпендикулярами – искомый угол между плоскостями (на рисунке $\angle AOB$ – угол между плоскостями α и β)

Плоскости пересекаются по прямой EF



Из точки A_1 опустим перпендикуляр A_1H на прямую EF

D_1H – проекция A_1H на плоскость EFT

=>

$\angle A_1HD_1$ – искомый угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1

Найдём A_1H:

Пусть EN – прямая, параллельная AB, тогда:

$EN = 2$ и $FN = BF - EA = 5 - 4 = 1$

$EF = \sqrt{EN^2 + FN^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ (по теореме Пифагора)

Найдём площадь треугольники A_1EF двумя способами:

$S_{\triangle}A_1EF = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot A_1H = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot A_1H$

$S_{\triangle}A_1EF = S_{A_1B_1FE} - S_{A_1B_1F}$

$S_{A_1B_1FE} = \frac{B_1F + A_1E}{2} \cdot AB = \frac{1+2}{2} \cdot 2 = 3$

$S_{A_1B_1F} = \frac{A_1B_1 \cdot B_1F}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

$S_{\triangle}A_1EF = S_{A_1B_1FE} - S_{A_1B_1F} = 3 - 1 = 2$

$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot A_1H = 2$

$A_1H = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\text{tg}\,\angle A_1HD_1 = \frac{A_1D_1}{A_1H} = \frac{6}{\frac{4}{\sqrt{5}}} = 1{,}5\sqrt{5}$

$\angle A_1HD_1 = \text{arctg}\, 1{,}5\sqrt{5}$

Ответ: б) $\text{arctg}\, 1{,}5\sqrt{5}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}.$$

Решение:

Пусть $7^x = t$

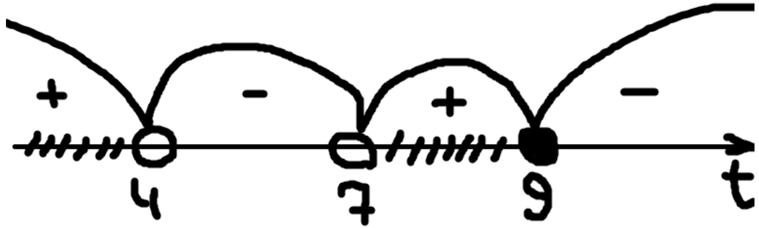
$$\frac{2}{t-7} \geq \frac{5}{t-4}$$

$$\frac{2}{t-7} - \frac{5}{t-4} \geq 0$$

$$\frac{2t - 8 - 5t + 35}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{-3t + 27}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$-3t + 27 = 0$ $-3t = -27$ $t = 9$	$(t-7)(t-4) \neq 0$ $t \neq 7$ $t \neq 4$



$t < 4$ $7^x < 4$ $7^x < 7^{\log_7 4}$ $x < \log_7 4$ $x < 2\log_7 2$	$7 < t \leq 9$ $7 < 7^x \leq 9$ $7^1 < 7^x \leq 7^{\log_7 9}$ $1 < x \leq \log_7 9$ $1 < x \leq 2\log_7 3$

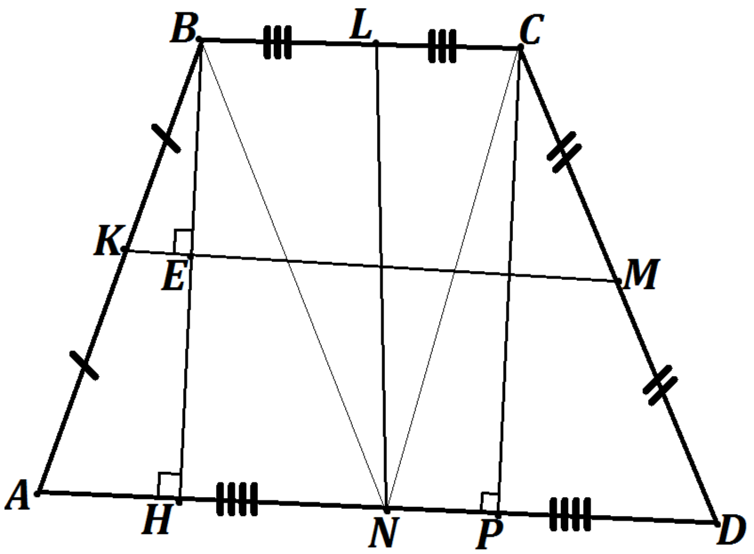
Ответ: $(-\infty; 2\log_7 2) \cup (1; 2\log_7 3]$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно.
Площади четырёхугольников $ABLN$ и $NLCD$ равны, а площади четырёхугольников $KBCM$ и $AKMD$ относятся как 11:17.

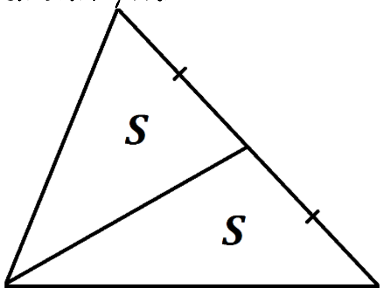
а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
б) Найдите отношение BC к AD.
.

Решение:
а)



Рассмотрим $\triangle CBN$
NL – медиана

Свойство медианы



Медиана разбивает треугольник на два равновеликих (с одинаковыми площадями)

=>

$S_{BLN} = S_{NLC}$

$S_{ABLN} = S_{NLCD}$ (по условию)
$S_{ABN} + S_{BLN} = S_{NLC} + S_{CDN}$
=>
$S_{ABN} = S_{CDN}$

Пусть BH – высота $\triangle ABN$
Пусть CP – высота $\triangle CDN$

$\frac{1}{2} \cdot AN \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot DN \cdot CP$
=>
$BH = CP$

$BH \perp AD$
$CP \perp AD$
=>
$BH \parallel CP$

Признаки параллелограмма
Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

=>
$CBHP$ – параллелограмм
=>
$BC \parallel HP$
=>
$BC \parallel AD$
■

б)

$\frac{BC}{AD}-?$

$ABCD$ – трапеция (т.к. $BC \parallel AD$)
KM – средняя линия трапеции (т.к. K и M – середины боковых сторон)
$KM = \frac{BC+AD}{2}$

$KBCM$ – трапеция
$AKMD$ – трапеция

Пусть $BH \cap KM = E$
$BE = EH$ (т.к. средняя линия делит высоту трапеции $ABCD$ пополам)

$S_{KBCM} = \frac{BC+KM}{2} \cdot BE$
$S_{AKMD} = \frac{AD+KM}{2} \cdot EH$

$\frac{S_{KBCM}}{S_{AKMD}} = \frac{11}{17}$

$$\frac{\frac{BC+KM}{2} \cdot BE}{\frac{AD+KM}{2} \cdot EH} = \frac{11}{17}$$

$$\frac{BC+KM}{AD+KM} = \frac{11}{17}$$

$17BC + 17KM = 11AD + 11KM$

$17BC + 6KM = 11AD$

$17BC + 6 \cdot \frac{BC+AD}{2} = 11AD$

$17BC + 3BC + 3AD = 11AD$

$20BC = 8AD \qquad |: AD$

$\frac{20BC}{AD} = 8 \qquad |: 20$

$\frac{BC}{AD} = \frac{8}{20}$

$\frac{BC}{AD} = \frac{2}{5}$

Ответ: б) 2:5

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн рублей.

Решение:

Переведём миллионы в тысячи:
4,5 млн это 4500 тыс.
1,4 млн это 1400 тыс.
0,6 млн это 600 тыс.

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	4500	$\frac{4500}{9} = 500$	$\frac{r}{100} \cdot 4500 = 45r$
…			
9	500	500	$\frac{r}{100} \cdot 500 = 5r$

Очевидно, что наибольший годовой платёж будет в первом году, а наименьший годовой платёж будет в последнем году (потому что платежи равномерно уменьшаются в течение 9 лет)
=>
Наибольший годовой платёж ≤ 1400 тыс.
Наименьший годовой платёж ≥ 600 тыс.

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 500 + 45r \leq 1400 \\ 500 + 5r \geq 600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45r \leq 900 \\ 5r \geq 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \leq 20 \\ r \geq 20 \end{cases}$$

=>
$r = 20$
(т.к. это единственное число, подходящее под оба неравенства системы)

Ответ: 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство
$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$
не имеет решений на отрезке $[a-6; a]$.

Решение:
Решим обратную задачу:

Найдём все значения a, при каждом из которых неравенство
$|x^2 - 8x + a + 5| \leq 10$
выполняется для всех x на отрезке $[a-6; a]$.

Рассмотрим функцию
$f(x) = x^2 - 8x + a + 5$
$f(x)$ – парабола, ветви которой направлены вверх
$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$

При $x > 4$ парабола возрастает
При $x < 4$ парабола убывает

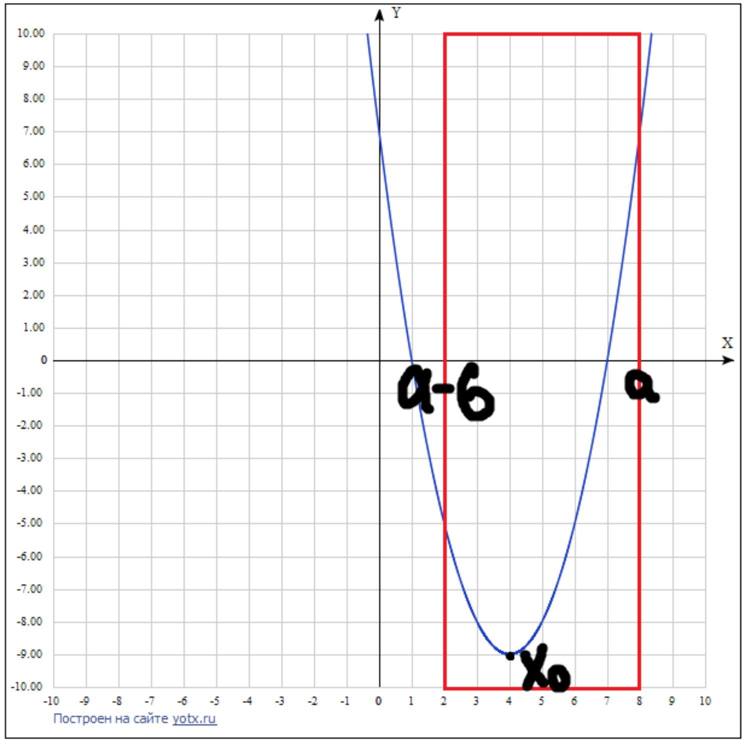
$x \in [a-6; a]$
=>

длина рассматриваемого отрезка по оси Ox равна 6

$-10 \le x^2 - 8x + a + 5 \le 10$
=>
размах области значений параболы на отрезке $[a-6; a]$ равен 20

Если x_0 лежит вне отрезка $[a-6; a]$, то приращение параболы на отрезке длиной 6 будет 36 или больше
=>
при таком варианте график не поместится в заданный размах области значений
=>
$x_0 \in [a-6; a]$

Один из вариантов как выглядит график:



Очевидно, что наибольшее значение функции достигается в одной из границ отрезка, а наименьшее значение функции достигается в вершине параболы

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x_0 \in [a-6; a] \\ f(a-6) \le 10 \\ f(a) \le 10 \\ y_0 \ge -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-6 < 4 < a \\ f(a-6) \le 10 \\ f(a) \le 10 \\ f(4) \ge -10 \end{cases}$$

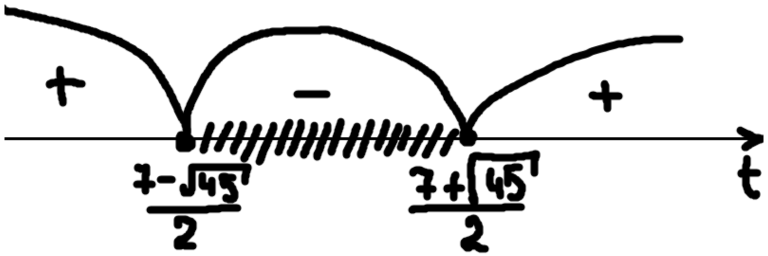
$$\begin{cases} -6 < 4 - a < 0 \\ (a-6)^2 - 8(a-6) + a + 5 - 10 \le 0 \\ a^2 - 8a + a + 5 \le 10 \\ 4^2 - 8 \cdot 4 + a + 5 \ge -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 < a < 10 \\ (a-6)^2 - 8(a-6) + a - 6 + 1 \le 0 \\ a^2 - 7a - 5 \le 0 \\ a \ge 1 \end{cases}$$

$(a-6)^2 - 7(a-6) + 1 \le 0$
Пусть $(a-6) = t$
$t^2 - 7t + 1 \le 0$
$t^2 - 7t + 1 = 0$
$D = 45$

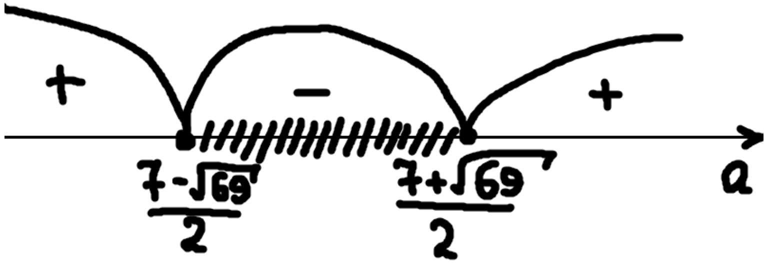
$$t_1 = \frac{7+\sqrt{45}}{2}$$

$$t_2 = \frac{7-\sqrt{45}}{2}$$

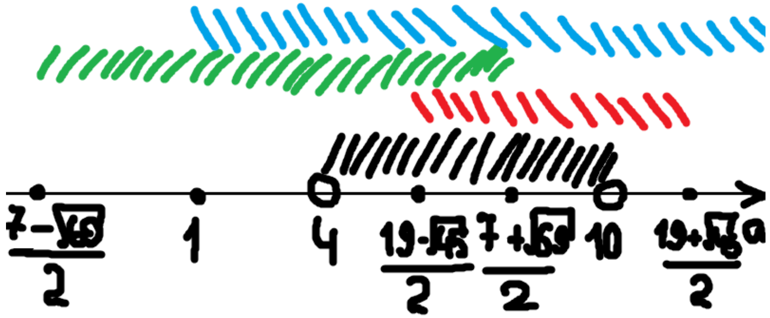


$$\frac{7-\sqrt{45}}{2} \le t \le \frac{7+\sqrt{45}}{2}$$
$$\frac{7-\sqrt{45}}{2} \le a-6 \le \frac{7+\sqrt{45}}{2}$$
$$\frac{7-\sqrt{45}}{2}+6 \le a \le \frac{7+\sqrt{45}}{2}+6$$
$$\frac{19-\sqrt{45}}{2} \le a \le \frac{19+\sqrt{45}}{2}$$

$a^2-7a-5 \le 0$
$a^2-7a-5 = 0$
$D = 69$
$$a_1 = \frac{7+\sqrt{69}}{2}$$
$$a_2 = \frac{7-\sqrt{69}}{2}$$



$$\begin{cases} 4 < a < 10 \\ \dfrac{19-\sqrt{45}}{2} \le a \le \dfrac{19+\sqrt{45}}{2} \\ \dfrac{7-\sqrt{69}}{2} \le a \le \dfrac{7+\sqrt{69}}{2} \\ a \ge 1 \end{cases}$$



Ответ: $a \in \left[\frac{19-\sqrt{45}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2}\right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \ge 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

.

Решение:
Арифметическая прогрессия состоит из натуральных чисел
=>
$a_1 \geq 1$
$d \geq 1$

а)

---

n-й член арифметической прогрессии
$a_n = a_1 + d(n-1)$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Если $n = 3$, то
$a_3 = a_1 + d(3-1) = a_1 + 2d$

$$S_3 = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 10$$

$(2a_1 + 2d) \cdot 3 = 20$
$(a_1 + d) \cdot 3 = 10$
$3a_1 + 3d = 10$
=>
Нет решений в натуральных числах

Если $n = 4$, то
$a_4 = a_1 + d(4-1) = a_1 + 3d$

$$S_4 = \frac{a_1 + a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 10$$

$(2a_1 + 3d) \cdot 2 = 10$
$4a_1 + 6d = 10$
=>
$a_1 = 1$
$d = 1$

Получаем прогрессию:
1 2 3 4

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
=>
Может

б)
$S_n < 1000$

$$\frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n < 1000$$

$$\big(2a_1 + d(n-1)\big) \cdot n < 2000$$

Если первая скобка имеет значение 100, то $n < 20$
Если первая скобка имеет значение 10, то $n < 200$
=>
Чем меньше значение скобки – тем больше n
=>
Нам нужно брать как можно меньшие значения a_1 и d, т.к. мы ищем наибольшее значение n

Пусть
$a_1 = 1$
$d = 1$

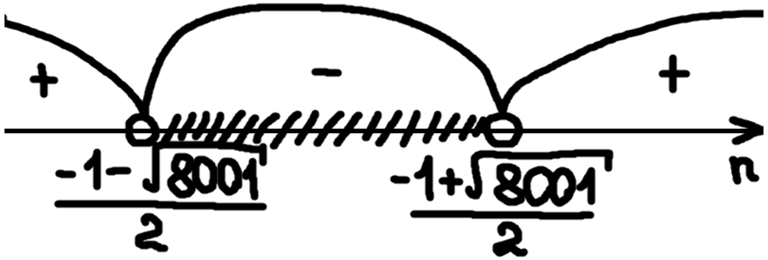
Тогда
$$\big(2 \cdot 1 + 1 \cdot (n-1)\big) \cdot n < 2000$$

$$(2 + n - 1) \cdot n < 2000$$

$$(n+1) \cdot n < 2000$$

$n^2 + n - 2000 < 0$
$n^2 + n - 2000 = 0$
$D = 8001$
$$n_1 = \frac{-1 - \sqrt{8001}}{2}$$
$$n_2 = \frac{-1 + \sqrt{8001}}{2}$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180218



$$\frac{-1-\sqrt{8001}}{2} < n < \frac{-1+\sqrt{8001}}{2}$$

Отбросим левую границу двойного неравенства, т.к. $n \geq 3$ по условию
=>

$$3 \leq n < \frac{-1+\sqrt{8001}}{2}$$

Оценим значение дроби:
$89 < \sqrt{8001} < 90$
$88 < -1+\sqrt{8001} < 89$
$44 < \frac{-1+\sqrt{8001}}{2} < 44{,}5$
=>
Наибольшее целое n, удовлетворяющее неравенству

$$3 \leq n < \frac{-1+\sqrt{8001}}{2}$$

это $n = 44$

Проверим:
$a_1 = 1$
$d = 1$
$n = 44$

$S_{44} < 1000$

$\frac{1+1+1\cdot(44-1)}{2}\cdot 44 < 1000$
$(2+43)\cdot 22 < 1000$
$990 < 1000$
=>
$n = 44$ подходит

Проверим
$a_1 = 1$
$d = 1$
$n = 45$

$S_{45} < 1000$

$\frac{1+1+1\cdot(45-1)}{2}\cdot 45 < 1000$
$23\cdot 45 < 1000$
$1035 < 1000$
=>
противоречие
=>
$n = 45$ не подходит

в)
$$S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n = 129$$

$$\big(2a_1+d(n-1)\big)\cdot n = 258$$

Разложим 258 на простые множители:

$258 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 43$

Есть несколько вариантов какое значение может принимать n:
$n = 1$
$n = 2$
Не подходят, т.к. по условию $n \geq 3$
Вариант #1
Если $n = 3$
$\big(2a_1+d(3-1)\big)\cdot 3 = 258$
$6a_1+6d = 258$
$a_1+d = 43$
Подходит, например
$a_1 = 1$
$d = 42$

1 43 85
Вариант #2
Если $n = 6$
$(2a_1 + d(6-1)) \cdot 6 = 258$
$12a_1 + 30d = 258$
$2a_1 + 5d = 43$
Подходит, например
$a_1 = 19$
$d = 1$
19 20 21 22 23 24
Вариант #3
Если $n = 43$
$(2a_1 + d(43-1)) \cdot 43 = 258$
$86a_1 + 1806d = 258$
Не подходит
Вариант #4
Если $n = 86$
$(2a_1 + d(86-1)) \cdot 86 = 258$
$172a_1 + 7310d = 258$
Не подходит
Вариант #5
Если $n = 129$
$(2a_1 + d(129-1)) \cdot 129 = 258$
Не подходит
Вариант #6
Если $n = 258$
$(2a_1 + d(258-1)) \cdot 258 = 258$
Не подходит

Ответ: а) Да, например, 1 2 3 4, б) 44, в) 3; 6

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180218