Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

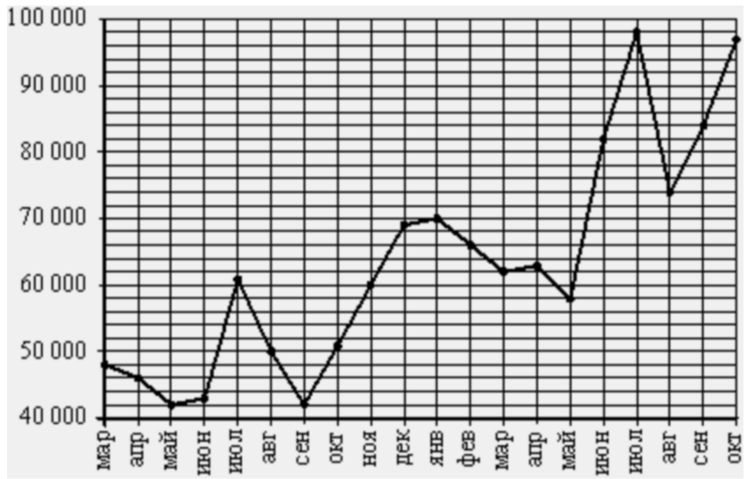
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Мобильный телефон стоил 7500 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 4200 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

Ответ: ___________________________.

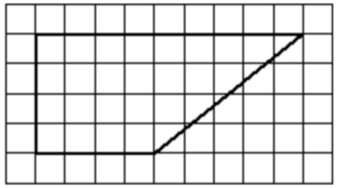
2 На рисунке жирными точками показано количество запросов со словом ЖАРА, сделанных на поисковом сайте во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – количество запросов. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшее месячное количество запросов со словом ЖАРА в период с июня по октябрь 2009 года.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180211

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: ____________________________.

4 В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос про Александра Второго.

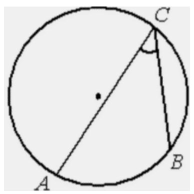
Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения

$36^{x-5} = \frac{1}{6}$.

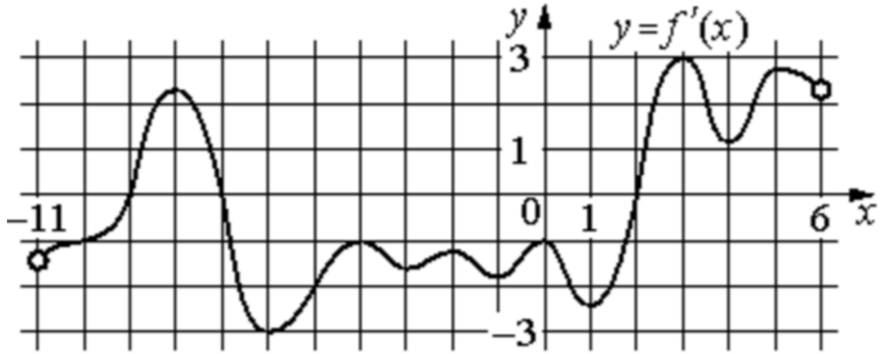
Ответ: ____________________________.

6 На окружности отмечены точки A, B и C. Дуга окружности AC, не содержащая точку B, составляет $200°$. Дуга окружности BC, не содержащая точку A, составляет $80°$. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.



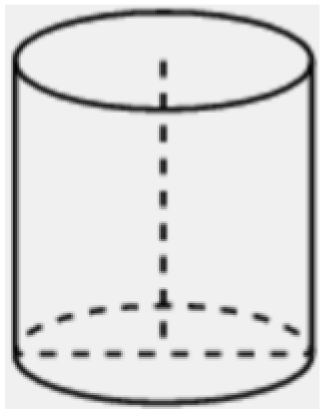
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график $y = f`(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 4]$.



Ответ: ____________________________.

8 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 20π, а высота равна 4. Найдите диаметр основания.



Ответ: ____________________________.

9 Найдите

$\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

10 Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 =$ 1,75 атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 13{,}3\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – постоянная, $T = 300$ К – температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет в воздухе в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15960 Дж.

Ответ: ___________________________.

11 Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции
$y = (x+10)^2 x + 2$ на отрезке $[-11; -4]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^x + 2}{9^x - 3^x} + \frac{5 \cdot 3^x - 19}{3^x - 4} \leq \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 2}{3^x}.$$

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 120°$, $\angle BCA = 15°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 4\sqrt{3}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180211

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и

а) пять;
б) четыре;
в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	44
2	74000
3	26
4	0,74
5	4,5
6	40
7	1
8	5
9	0,2
10	7
11	10
12	2
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n \in Z.$ б) $2{,}5\pi;\ 3{,}5\pi;\ \frac{13\pi}{6};\ \frac{17\pi}{6}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{26}}{4}$
15	$(-\infty; 0) \cup [1; \log_3 4)$
16	2
17	10
18	$\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 5\right)$
19	а) нет, б) нет, в) да

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

.

Решение:

а)

Определение логарифма

Если $\log_a b = c$, то:

$a^c = b$

$5^2 = \cos x - \sin 2x + 25$

$25 = \cos x - \sin 2x + 25$

$\cos x - \sin 2x = 0$

Синус двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos x - 2\sin x \cdot \cos x = 0$
$\cos x \cdot (1 - 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$	$1 - 2\sin x = 0$ $2\sin x = 1$ $\sin x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)
Подберём корни для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$
Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi = 1{,}5\pi \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = 2{,}5\pi \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = 3{,}5\pi \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 4$, то $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = 4{,}5\pi \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6} \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = 0$, то $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 1$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6} \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 2$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6} \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $2{,}5\pi;\ 3{,}5\pi;\ \frac{13\pi}{6};\ \frac{17\pi}{6}$

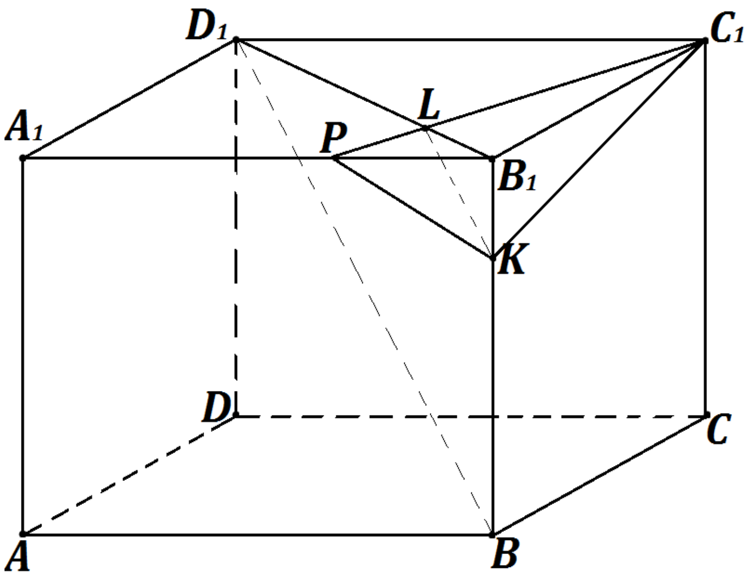
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3 : 1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Решение:
а)
$KB = 4$
=>
$KB_1 = BB_1 - KB = 5 - 4 = 1$

Построение плоскости α:



Построим прямую KC_1, т.к. точки K и C_1 лежат в одной плоскости
Построим вспомогательную прямую B_1D_1, которая является проекцией BD_1 на «потолок», т.е. на $(A_1B_1C_1)$
В $\triangle BB_1D_1$ построим KL такую, что $KL \parallel BD_1$
Построим C_1L, т.к. точки C_1 и L лежат в одной плоскости
Продлим C_1L до пересечения с ребром A_1B_1 в точке P
Построим прямую PK, т.к. точки P и K лежат в одной плоскости
=> $\triangle C_1PK -$ сечение куба плоскостью α

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках B_1KL и BB_1D_1

$$\frac{B_1K}{BB_1} = \frac{B_1L}{B_1D_1}$$
$$\frac{1}{5} = \frac{B_1L}{B_1D_1}$$

Пусть
$B_1L = x$
$B_1D_1 = 5x$
=> $D_1L = B_1D_1 - B_1L = 5x - x = 4x$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках PB_1L и C_1D_1L

$$\frac{B_1L}{D_1L} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$
$$\frac{x}{4x} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$

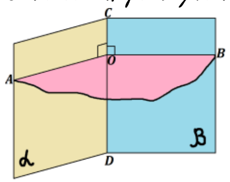
Пусть
$B_1P = y$
$C_1D_1 = 4y$
=> $A_1P = C_1D_1 - B_1P = 4y - y = 3y$

$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{3y}{y}$$
$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{3}{1}$$

■

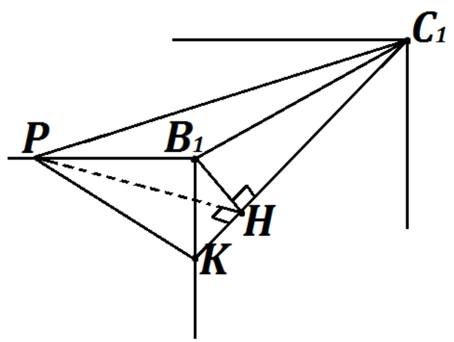
б)

Схема нахождения угла между плоскостями



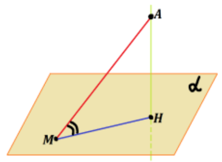
1) Ищем прямую пересечения плоскостей (на рисунке это CD)
2) На этой прямой ставим точку (на рисунке это точка O)
3) Проводим из этой точки два перпендикуляра в каждой из плоскостей (на рисунке $OA \perp CD$ в плоскости α и $OB \perp CD$ в плоскости β)
4) Угол между этими перпендикулярами – искомый угол между плоскостями (на рисунке $\angle AOB -$ угол между плоскостями α и β)

Плоскость α и плоскость BCC_1 пересекаются по прямой KC_1, поэтому угол между этими плоскостями – это угол между перпендикулярами к этой общей прямой, проведёнными от каждой из плоскостей



Но мы пока что не знаем точку пересечения этих перпендикуляров

Угол между прямой и плоскостью



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость (на рисунке $\angle AMH -$ угол между прямой AM и MH (её проекцией на плоскость α))

Проведём высоту PH в $\triangle\, C_1PK$

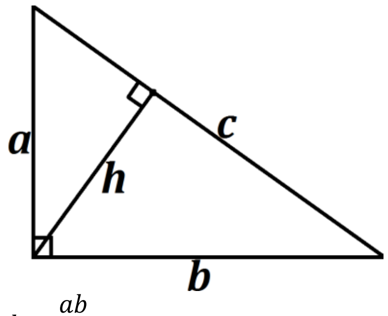
$B_1H -$ это проекция PH на «правую стену», т.е. на плоскость BCC_1 =>

$\angle B_1HP -$ искомый угол между плоскостью α и плоскостью BCC_1

Рассмотрим $\triangle\, B_1C_1K -$ прямоугольный:

$C_1K = \sqrt{B_1K^2 + B_1{C_1}^2} = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$ (по теореме Пифагора)

Высота, проведённая к гипотенузе



$h = \dfrac{ab}{c}$

$B_1H = \dfrac{B_1C_1 \cdot B_1K}{C_1K} = \dfrac{5\cdot 1}{\sqrt{26}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$

$B_1P = \dfrac{1}{4}\cdot A_1B_1 = \dfrac{1}{4}\cdot 5 = \dfrac{5}{4}$

(по доказанному в п. а)

Рассмотрим $\triangle\, B_1HP -$ прямоугольный:

$\operatorname{tg}\angle B_1HP = \dfrac{B_1P}{B_1H} = \dfrac{5}{4} : \dfrac{5}{\sqrt{26}} = \dfrac{\sqrt{26}}{4}$

$\angle B_1HP = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{26}}{4}$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{26}}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x-3^x+2}{9^x-3^x}+\frac{5\cdot 3^x-19}{3^x-4}\le\frac{2\cdot 3^{x+1}-2}{3^x}.$$

Решение:
Пусть $3^x=t$

$$\frac{t^2-t+2}{t^2-t}+\frac{5t-19}{t-4}\le\frac{6t-2}{t}$$

$$\frac{t^2-t+2}{t^2-t}+\frac{5t-20+1}{t-4}\le\frac{6t-2}{t}$$

$$\frac{t^2-t}{t^2-t}+\frac{2}{t^2-t}+\frac{5t-20}{t-4}+\frac{1}{t-4}\le\frac{6t}{t}-\frac{2}{t}$$

$$1+\frac{2}{t^2-t}+5+\frac{1}{t-4}\le 6-\frac{2}{t}$$

$$\frac{2}{t^2-t}+\frac{1}{t-4}+\frac{2}{t}\le 0$$

$$\frac{2}{t(t-1)}+\frac{1}{t-4}+\frac{2}{t}\le 0$$

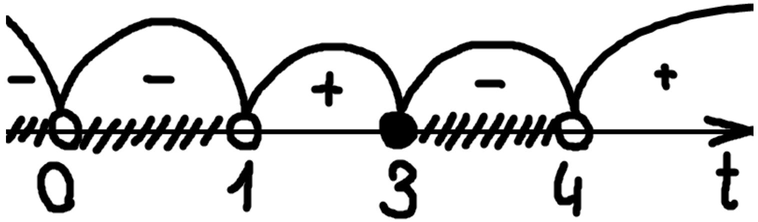
$$\frac{2\cdot(t-4)+1\cdot(t^2-t)+2(t^2-5t+4)}{t(t-1)(t-4)}\le 0$$

$$\frac{2t-8+t^2-t+2t^2-10t+8}{t(t-1)(t-4)}\le 0$$

$$\frac{3t^2-9t}{t(t-1)(t-4)}\le 0$$

$$\frac{3(t^2-3t)}{t(t-1)(t-4)}\le 0$$

$t^2-3t=0$ $t(t-3)=0$	$t(t-1)(t-4)\ne 0$ $t\ne 0$
$t=0$ $t=3$	$t\ne 1$ $t\ne 4$



$t<1$ $3^x<1$ $3^x<3^0$ $x<0$	$3\le t<4$ $3\le 3^x<4$ $3^1\le 3^x<3^{\log_3 4}$ $1\le x<\log_3 4$	$t\ne 0$ $3^x\ne 0$ Нет решений

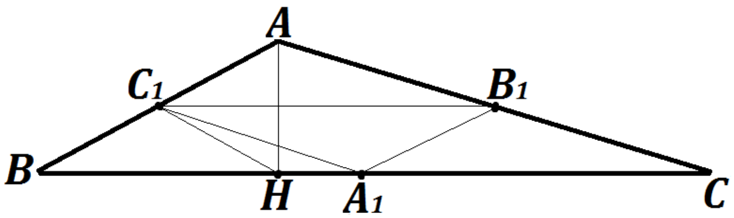
Ответ: $(-\infty;0)\cup[1;\log_3 4)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC=120°$, $\angle BCA=15°$.

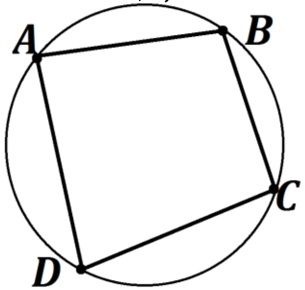
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC=4\sqrt{3}$.

Решение:
а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1B_1C_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность

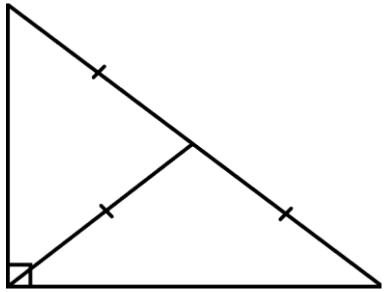


$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$

Наша задача – доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:
$\angle BCA = 15°$
$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 15 - 120 = 45°$
$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 45 = 45°$
$\angle CAH = \angle BAC - \angle BAH = 120 - 45 = 75°$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный
C_1H – медиана
=>
$C_1H = AC_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)
=>
$\triangle AC_1H$ – равнобедренный
=>
$\angle AHC_1 = \angle BAH = 45°$

Признаки параллелограмма

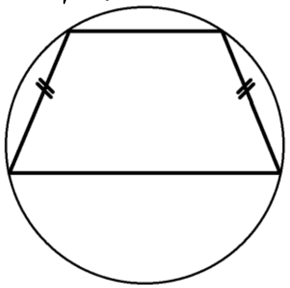
Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $A_1BC_1B_1$
$\left.\begin{matrix} A_1B_1 \parallel BC_1 \\ A_1B_1 = BC_1 \end{matrix}\right.$ (т.к. A_1B_1 – средняя линия)
=>
$A_1BC_1B_1$ – параллелограмм
=>
$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 45°$
$\angle A_1HC_1 = \angle AHA_1 + \angle AHC_1 = 90 + 45 = 135°$

$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1HC_1 = 45 + 135 = 180°$
=>
Четырёхугольник $A_1B_1C_1H$ можно вписать в окружность
=>
Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности
■

б)

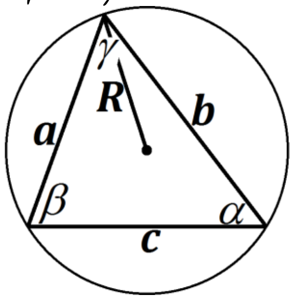
Свойство трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1B_1C_1H$ – равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



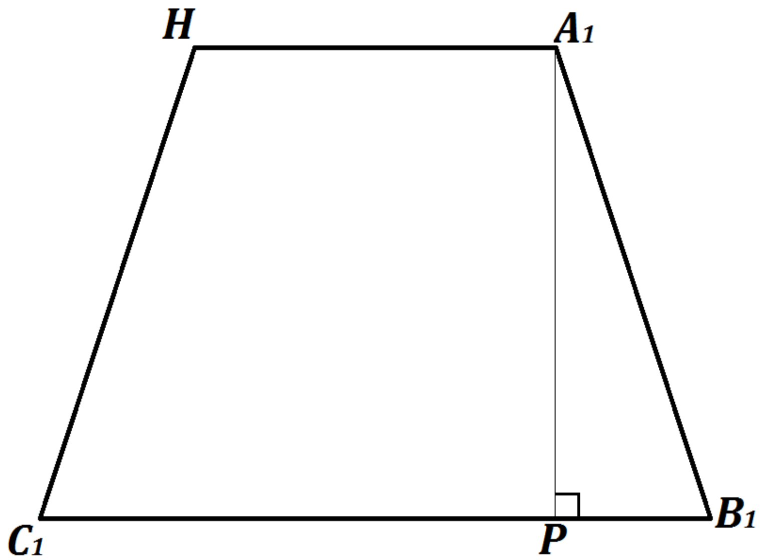
$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$
или
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 120°} = \frac{AB}{\sin 15°}$$

$$AB = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\sin 120°} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sin 15°$$
=>
$$A_1B_1 = \frac{AB}{2} = \frac{8\sin 15°}{2} = 4\sin 15°$$
$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1B_1C_1H$:



Пусть
A_1P – высота трапеции

$\angle A_1B_1P = \angle ABC = 45°$
$\angle PA_1B_1 = 180 - \angle A_1PB_1 - \angle A_1B_1P = 180 - 90 - 45 = 45°$
=>
$\triangle\ A_1B_1P$ – равнобедренный

По теореме Пифагора:

$A_1{B_1}^2 = B_1P^2 + A_1P^2$

$A_1{B_1}^2 = 2B_1P^2$

$(4\sin 15°)^2 = 2B_1P^2$

$16\sin^2 15° = 2B_1P^2$

$B_1P^2 = 8\sin^2 15°$

$B_1P = 2\sqrt{2}\sin 15°$

$A_1H = B_1C_1 - 2B_1P = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\sin 15°$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\sin 15° = \sin(45-30)°$

$\sin 15° = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$

$\sin 15° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$A_1H = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

$A_1H = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$A_1H = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 = 2$

Ответ: б) 2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

Решение:

Пусть n — срок кредита

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	16	$\dfrac{16}{n}$	$\dfrac{25}{100}\cdot 16 = 4$
…			
n	$\dfrac{16}{n}$	$\dfrac{16}{n}$	$\dfrac{25}{100}\cdot\dfrac{16}{n} = \dfrac{4}{n}$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{ОСВ} = n \cdot \frac{16}{n} + \frac{4 + \frac{4}{n}}{2} \cdot n = 38$$

$$16 + \left(2 + \frac{2}{n}\right) \cdot n = 38$$

$$16 + 2n + 2 = 38$$

$$2n = 20$$

$$n = 10$$

Ответ: 10

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5 - y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение:

Найдём корни уравнения $xy^2 - xy - 5y + 5 = 0$

$xy(y - 1) - 5(y - 1) = 0$

$(y - 1)(xy - 5) = 0$

$y = 1$

$xy = 5$

$y = \dfrac{5}{x}$

Получаем новую систему:

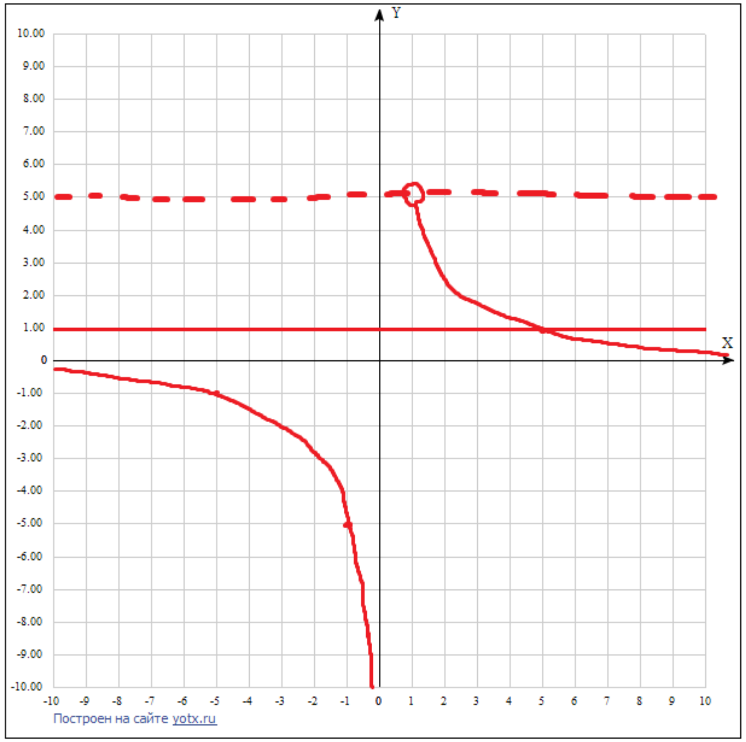
$$\begin{cases} 5 - y > 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{5}{x} \end{array}\right. \\ y = ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 5 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{5}{x} \end{array}\right. \\ y = ax \end{cases}$$

Решим графически:

Сначала построим график системы:

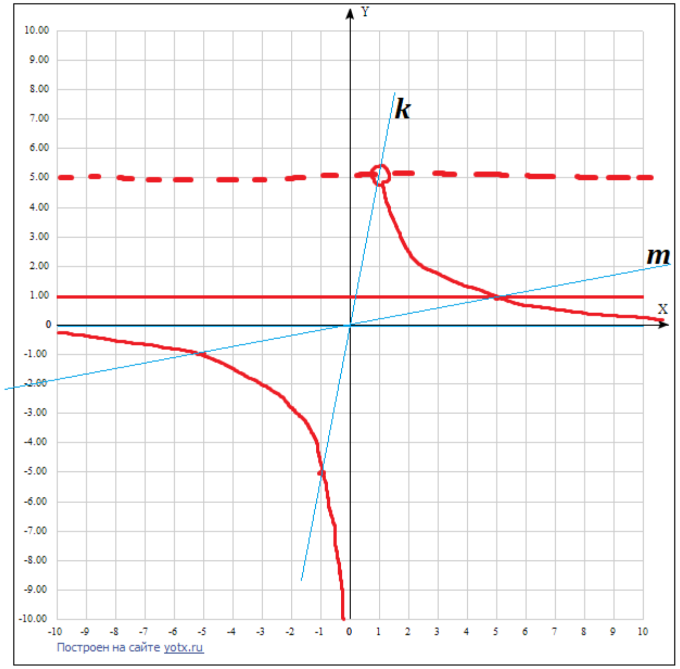
$$\begin{cases} y < 5 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{5}{x} \end{array}\right. \end{cases}$$



$y = ax$ — пучок прямых проходящих через начало координат

Пусть
m — прямая, проходящая через точку $(5; 1)$ из семейства прямых $y = ax$
k — прямая, проходящая через точку $(1; 5)$ из семейства прямых $y = ax$

Проведём прямые m и k



Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = ax$ проходит через т. $(5; 1)$
$1 = 5a$
$a = \frac{1}{5}$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой k
$y = ax$ проходит через т. $(1; 5)$
$a = 5$

Итак,
Если $a < 0$, то 1 пересечение
Если $a = 0$, то 0 пересечений
Если $0 < a < \frac{1}{5}$, то 3 пересечения
Если $a = \frac{1}{5}$, то 2 пересечения
Если $\frac{1}{5} < a < 5$, то 3 пересечения
Если $a = 5$, то 2 пересечения
Если $a > 5$, то 2 пересечения

Ответ: $a \in \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 5\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и

а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?
.

Решение:
Разложим 720 на простые множители:

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 1$

а)
Пусть
b_1 – первый член геометрической прогрессии
q – знаменатель геометрической прогрессии ($q \neq 1$)

Тогда
$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot b_1 q^4 = 720$

$b_1{}^5 q^{10} = 720$

Пусть
$b_1{}^5 = 1^5$
=>
$b_1 = 1$

Но q^{10} мы подобрать не сможем, используя делители числа 720, т.к. среди этих делителей нет десятой степени какого-либо числа
=>
Нет

б)
Пусть
k – число, не входящее в геометрическую прогрессию

Тогда
$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot k = 720$

$b_1{}^4 q^6 \cdot k = 720$

Пусть
$b_1{}^4 = 1^4$
=>
$b_1 = 1$

Но q^6 мы подобрать не сможем, используя делители числа 720, т.к. среди этих делителей нет шестой степени какого-либо числа
=>
Нет

в)
Пусть
k – первое число, не входящее в геометрическую прогрессию
m – второе число, не входящее в геометрическую прогрессию

Тогда
$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot k \cdot m = 720$

${b_1}^3 q^3 \cdot k \cdot m = 720$

Пусть
${b_1}^3 = 1^3$
=>
$b_1 = 1$

$q^3 = 2^3$
=>
$q = 2$

$k = 2 \cdot 3^2 = 18$
$m = 5$

Получаем пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 720 и первые три образуют геометрическую прогрессию:
1 2 4 18 5

=>
Да

Ответ: а) нет, б) нет, в) да

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180211