

### Вариант 3.

#### Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	4	20	0,9991	24	12	17	7	0,25	100	62	22

13	а) $\left\{ \pi k, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; б) $-\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ .
14	$2\sqrt{30}$ .
15	$(-\infty; -6) \cup (-6; 5 - 5\sqrt{2}) \cup \{5\} \cup [5 + 5\sqrt{2}; +\infty)$ .
16	б) $4\sqrt{7}$ .
17	53 500 руб.
18	$a \in [4 - \sqrt{10}; 4 + \sqrt{10}]$ .
19	а) нет; б) нет; в) 10.

#### Решения заданий 13-19

**Задание 13.** а) Решите уравнение  $\operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки и/или ошибки в отборе корней, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>2</b>

#### Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 2 \cos x \right) = 0.$$

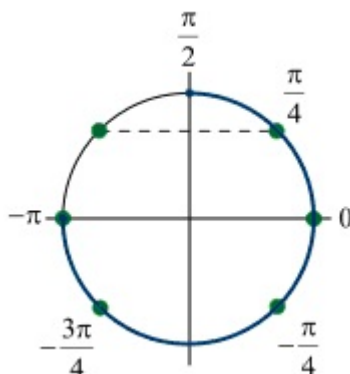
Если  $\sin x = 0$ , то  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Второй случай:

$$\frac{1 - 2 \cos^2 x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что обе найденные серии удовлетворяют условию  $\cos x \neq 0$ , и поэтому входят в ответ.

б) Отметим решения на единичной окружности.



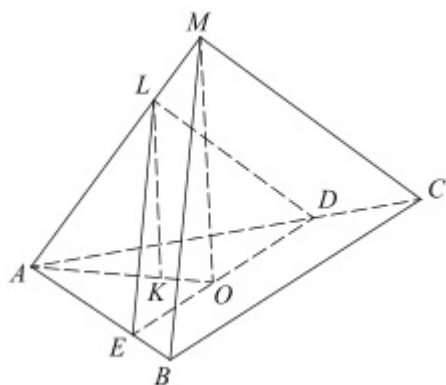
Отрезку  $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$  принадлежат корни:  $-\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ .

Ответ: а)  $\left\{\pi k, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; б)  $-\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ .

**Задание 14.** В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  с основанием  $ABC$  стороны основания равны 6, а боковые рёбра 8. На ребре  $AC$  находится точка  $D$ , на ребре  $AB$  находится точка  $E$ , а на ребре  $AM$  - точка  $L$ . Известно, что  $CD = BE = LM = 2$ . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $E, D$  и  $L$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Верно найдены линейные и/или угловые величины, определяющие треугольник, площадь которого нужно найти, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>2</b>

**Решение.**



Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. В треугольнике  $ABC$  имеем:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{1}.$$

Значит,  $DE = \frac{2}{3}BC = 4$ , отрезок  $DE$  делит медиану, проведённую из вершины  $A$ , в отношении  $2:1$ , то есть содержит точку  $O$ . Кроме того,  $O$  — середина  $DE$ .

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $AMO$ . В нём  $AO = 2\sqrt{3}$ . Опустим из точки  $L$  перпендикуляр  $LK$  на сторону  $AO$ . Тогда

$$AK = \frac{3}{4}AO = \frac{3\sqrt{3}}{2}, KO = \frac{1}{4}AO = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$LK = \sqrt{LA^2 - AK^2} = \frac{3\sqrt{13}}{2}, LO = \sqrt{LK^2 + KO^2} = \sqrt{30}.$$

Равнобедренный треугольник  $DLE$  — искомое сечение, а  $LO$  — его высота.

Площадь искомого сечения равна  $\frac{1}{2}LO \cdot DE = 2\sqrt{30}$ .

Ответ:  $2\sqrt{30}$ .

**Задание 15.** Решите неравенство:

$$\left((x+1)^{-1} - (x+6)^{-1}\right)^2 \leq \frac{|x^2 - 10x|}{(x^2 + 7x + 6)^2}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех	1

шагов решения.	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>2</b>

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$((x+1)^{-1} - (x+6)^{-1})^2 \leq \frac{|x^2 - 10x|}{(x^2 + 7x + 6)^2} \Leftrightarrow \frac{|x^2 - 10x| - 25}{(x^2 + 7x + 6)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -6, \\ x \neq -1, \\ |x^2 - 10x| \geq 25. \end{cases}$$

Решим неравенство

$$|x^2 - 10x| \geq 25 :$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x - 25 \geq 0, \\ x^2 - 10x + 25 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 + 5\sqrt{2}, \\ x \leq 5 - 5\sqrt{2}, \\ x = 5. \end{cases}$$

Исключая из полученного набора точки  $-6$  и  $-1$ , получаем множество решений исходного неравенства:

$$(-\infty; -6) \cup (-6; 5 - 5\sqrt{2}] \cup \{5\} \cup [5 + 5\sqrt{2}; +\infty).$$

ОТВЕТ:  $(-\infty; -6) \cup (-6; 5 - 5\sqrt{2}] \cup \{5\} \cup [5 + 5\sqrt{2}; +\infty).$

**Задание 16.** Прямая, проходящая через середину  $M$  гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ , перпендикулярна  $CM$  и пересекает катет  $AC$  в точке  $K$ . При этом  $AK : KC = 1 : 2$ .

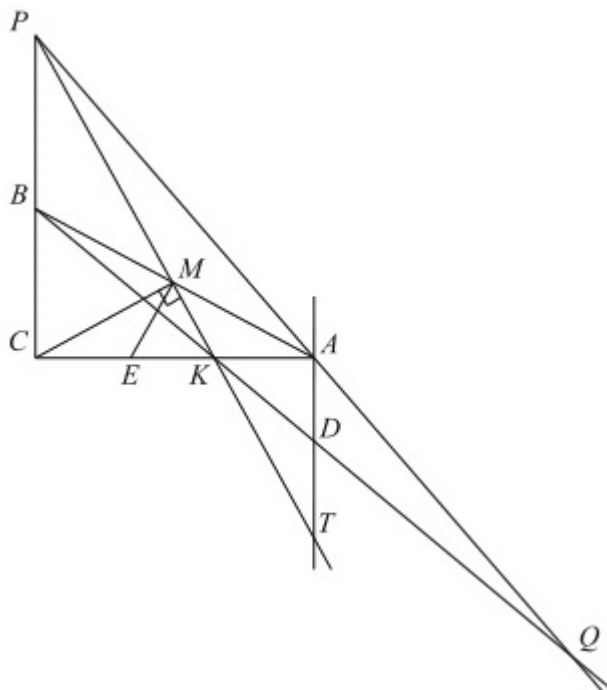
а) Докажите, что  $\angle BAC = 30^\circ$

б) Пусть прямые  $MK$  и  $BC$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $AP$  и  $BK$  - в точке  $Q$ . Найдите  $KQ$ , если  $BC = 2\sqrt{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а)	1

не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>3</b>

**Решение.**



а) Пусть  $E$  - середина  $CK$ .  $MC = MA$ ,  $CK = AE$ ,  $\angle MCK = \angle MAE$ , значит  $\triangle MKC = \triangle MEA$ .

Тогда  $ME$  - медиана прямоугольного треугольника  $CMK$ , проведенная из вершины прямого угла. Тогда:

$$ME = \frac{1}{2}CK = AK = \frac{1}{2}AE.$$

Следовательно,  $\angle A = 30^\circ$ .

б) Из прямоугольных треугольников  $ABC$  и  $KBC$  находим, что

$$AC = BC \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6,$$

$$BK = \sqrt{BC^2 + \left(\frac{2}{3}AC\right)^2} = \sqrt{12 + 16} = 2\sqrt{7}.$$

Через вершину  $A$  проведем прямую, параллельную  $BC$ . Пусть  $T$  - точка пересечения этой прямой с прямой  $MK$ , а  $D$  - точка пересечения прямой  $BK$  с прямой  $AT$ .

Из равенства треугольников  $AMT$  и  $BMP$  получаем, что  $AT = BP$ , а из подобия треугольников  $CKP$  и  $AKT$  следует, что  $CP = 2AT = 2BP$ . Значит,  $B$  - середина  $CP$ .

Треугольник  $AKD$  подобен треугольнику  $CKB$  с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ , поэтому:

$$AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BP,$$

а так как  $AD \parallel BP$ ,  $AD$  - средняя линия треугольника  $BQP$ . Значит:

$$BQ = 2DB = 2 \cdot \frac{3}{2}BK = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{7} = 6\sqrt{7}.$$

Следовательно:

$$KQ = BQ - BK = 6\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}.$$

Ответ: б)  $4\sqrt{7}$ .

**Задание 17.** Консервный завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары - стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

Вид тары	Себестоимость, 1 ц.	Отпускная цена, 1 ц.
стеклянная	1500 руб.	2100 руб.
жестяная	1100 руб.	1750 руб.

Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию	1

дованию этой модели, при этом решение не завершено	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>3</b>

### Решение.

Пусть  $x$  - доля мощностей завода, занятых под производство компотов в стеклянной таре, а  $y$  - доля мощностей, занятых под производство компотов в жестяной банке. Тогда  $x + y = 1$ , при этом компотов в стеклянной таре производится  $90x$  центнеров, а в жестяной таре -  $80y$  центнеров. Прибыль завода с 1 центнера продукции в стеклянной таре равна  $2100 - 1500 = 600$  руб., прибыль с 1 центнера в жестяной таре равна  $1750 - 1100 = 650$  руб., а общая прибыль с произведённой за день продукции равна

$$600 \cdot 90x + 650 \cdot 80y = 54000x + 52000y = 2000(27x + 26y).$$

Кроме того, из условия ассортиментности следует, что  $90x \geq 20$  и  $80y \geq 20$ , то есть  $x \geq \frac{2}{9}$  и  $y \geq \frac{1}{4}$ .

Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение выражения  $2000 \cdot (27x + 26y)$  при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{2}{9}, \\ y \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{2}{9} \leq x \leq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Подставляя  $y = 1 - x$  в выражение  $27x + 26y$ , получаем:  $27x + 26(1 - x) = 26 + x$ . очевидно, что это выражение принимает наибольшее значение при  $x = \frac{3}{4}$  и, следовательно,  $y = \frac{1}{4}$ . Поэтому максимально возможная прибыль завода за день равна

$$2000 \cdot \left( 27 \cdot \frac{3}{4} + 26 \cdot \frac{1}{4} \right) = 2000 \cdot \frac{107}{4} = 53\,500$$

Ответ: 53 500 руб.

**Задание 18.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 9|x - 3| + 3\sqrt{x^2 - 6x + 13} = 4a + 2|x - 2a - 3|$$

имеет хотя бы один корень.

<b>Содержание критерия</b>	<b>Баллы</b>
Обоснованно получен правильный ответ.	4

С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	<b>4</b>

**Решение.**

Произведём замену  $t = x - 3$ , получим:

$$a^2 + 9|t| + 3\sqrt{t^2 + 4} = 4a + 2|t - 2a| \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3\sqrt{t^2 + 4} = 2|t - 2a| - 9|t|.$$

Пусть теперь

$$f(t) = a^2 - 4a + 3\sqrt{t^2 + 4},$$

$$g(t) = 2|t - 2a| - 9|t|.$$

При  $t \geq 0$  функция  $g(t)$  убывает, принимая все значения от  $g(0)$  до  $-\infty$ . При  $t < 0$  функция  $g(t)$  - возрастает, принимая все значения от  $-\infty$  до  $g(0)$ . Значит,  $\max g(t) = g(0) = 4|a|$

Функция  $f(t)$  принимает минимальное значение при

$$f(t) = f(0) = a^2 - 4a + 6,$$

причём на промежутке  $(0; +\infty)$  - функция возрастает, принимая все значения от  $f(0)$  до  $+\infty$ , а на промежутке  $(-\infty; 0)$  - убывает (функция чётная), принимая все значения от  $+\infty$  до  $f(0)$ .

Поскольку наибольшее значение функции  $g(t)$  и наименьшее значение функции  $f(t)$  достигается при одном и том же значении  $t = 0$ , уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда  $\max g(t) \geq \min f(t)$ , то есть

$$a^2 - 4a + 6 \leq 4|a|$$

1) При  $a \geq 0$  получаем

$$a^2 - 4a + 6 \leq 4a \Leftrightarrow a^2 - 8a + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{10} \leq a \leq 4 + \sqrt{10}$$

2) При  $a < 0$  получаем

$$a^2 - 4a + 6 \leq -4a \Leftrightarrow a^2 + 6 < 0 \Leftrightarrow \emptyset.$$

Ответ:  $a \in [4 - \sqrt{10}; 4 + \sqrt{10}]$ .

**Задание 19.** Из первых 22 натуральных чисел 1, 2, ..., 22 выбрали  $2k$  различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех  $2k$  выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число  $k$  быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа  $k$ .

Обоснованно получены правильные ответы во всех пунктах	4
Обоснованно получены верные ответы в пункте б) и в одном из пунктов а) или в)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из пунктов а) или в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>4</b>

**Решение.**

а) Если в каждой паре одно число втрое больше другого, то сумма чисел в каждой паре делится на 4. Значит, сумма всех выбранных чисел делится на 4. Число 170 не делится на 4, поэтому такого быть не может.

б) Если  $k = 11$ , то выбраны все 22 числа от 1 до 22. Их сумма равна 253. С другой стороны, по условию суммы чисел в каждой паре различны и не превосходят 27. Значит, их сумма не превосходит

$$27 + 26 + \dots + 17 = 242.$$

Полученное противоречие показывает, что число  $k$  не может быть равным 11.

в) В предыдущем пункте было показано, что  $k$  не может равняться 11. Десять пар (13; 14), (11; 15), (9; 16), (7; 17), (5; 18), (3; 19), (1; 20), (2; 8), (4; 10), (6; 12) удовлетворяют всем условиям задачи. Значит, наибольшее возможное значение числа  $k$  - это 10.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 10.

**Перевод набранных первичных баллов в  
стобалльную и в пятибалльную системы**

Первичный	Тестовый
0	0
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
<hr/>	
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	55
12	59
13	64
14	68
15	70
16	72
17	74
18	76
19	78
20	80
21	82
22	84
23	86
24	88
25	90
26	92
27	94
28	96
29	97
30	98
31	99
32	100

Тестовый	Оценка
0-26	2
27-49	3
50-67	4
68-100	5