Вариант 1.
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	39	3	0,125	-3	7	3	48	99	1	21	20

13	Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$
14	б) $\frac{21}{16}$
15	$(-\infty;-2)\cup[-1;1)\cup(1;+\infty)$.
16	б) 3
17	220 млн. руб.
18	$a\in\left(-\infty,\frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right]\cup\left[\frac{7+2\sqrt{6}}{5},3\right)\cup(3,+\infty)$
19	а) да; б) нет

Решения заданий 13-19

Задание 13. а) Решите уравнение $(\text{tg}^2 x-3)\sqrt{11\cos x}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки и/или ошибки в отборе корней, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

Решение.

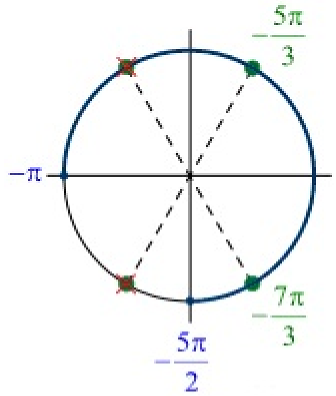
а) Последовательно получаем:

$$(\text{tg}^2 x-3)\sqrt{11\cos x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\text{tg}^2 x=3,\\ \cos x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{tg}\,x=\pm\sqrt{3},\\ \cos x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\\ \cos x>0,\end{cases}$$

откуда:

$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $-\frac{7\pi}{3}$ и $-\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$

Задание 14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

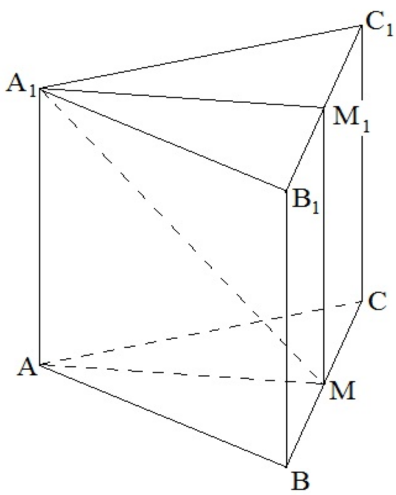
а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

Содержание критерия	Баллы
Приведено обоснованное верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Выполнен только пункт а) или выполнен пункт б) при отсутствии обоснования пункта а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода.

Решение.



а) Обозначим за M_1 середину ребра B_1C_1. Очевидно, что $BC \perp AA_1$, $BC \perp A_1M_1$ (так как $BC \parallel B_1C_1$.) Значит, $BC \perp AA_1M_1$. Итак, плоскость A_1BC содержит прямую, перпендикулярную к плоскости AA_1M_1, поэтому плоскости перпендикулярны.

б) Обозначим за M середину BC. Поскольку плоскости пересекаются по прямой BC, нас интересует угол между перпендикулярами к BC, проведенными в этих плоскостях. Очевидно $MM_1 \perp BC$(так как $MM_1 \parallel BB_1 \perp ABC$) и $A_1M \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах (проекция A_1M на ABC это $AM \perp BC$.) Поэтому

$$\operatorname{tg}\angle(BCA_1, BB_1C_1) = \operatorname{tg}\angle(A_1M, MM_1) = \operatorname{tg}\angle A_1MM_1 = \frac{A_1M_1}{MM_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{AA_1} = \frac{21}{16}.$$

Ответ: б) $\frac{21}{16}$.

Задание 15. Решите неравенство: $\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} - \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{x + 2} \le 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} - \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{x + 2} \le 1;$$

$$\frac{x^2(x-1)^2}{(x+2)(x-1)} - \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 1}{x + 2} \le 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{-x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{x+2} \le 0, \\ x \ne 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x^2+x+1)}{x+2} \geq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$
;

$$x \in (-\infty;-2),\ [-1;1),\ (1;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-2) \cup [-1;1) \cup (1;+\infty)$.

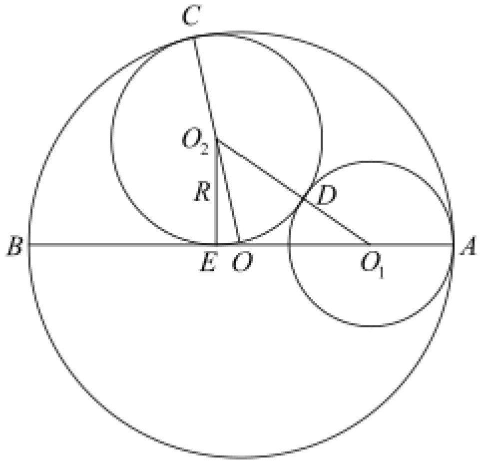
Задание 16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей их этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**3**

Решение.



а) Пусть AB - диаметр большей из трёх окружностей, O - её центр, O_1 - центр окружности радиуса r, касающийся окружности с диаметром AB в точке A, O_2 - центр окружности радиуса R, касающийся окружности с диаметром AB в точке C, окружности с центром O_1 - в точке D, отрезка AB - в точке E. Точки O, O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$.

Аналогично $OO_1=OA - O_1A=OA - r$, $O_1O_2 = O_1D + O_2D= r + R$.

Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r + OC - R + r + R = OA + OC = 2OA = AB.$$

б) Пусть $OA = 6$, $r = 2$. Тогда

$$O_2E = R, \quad O_1O_2 = 2 + R,$$

$$OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4, \quad OO_2 = OC - O_2C = 6 - R.$$

Из прямоугольных треугольников O_1O_2E и OO_2E находим, что

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2+R)^2 - R^2} = \sqrt{4+4R},$$

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6-R)^2 - R^2} = \sqrt{36-12R}.$$

Возможны два случая: $O_1E = OO_1 + OE$ (O лежит между E и O_1) и $O_1E = OO_1 - OE$ (E лежит между O и O_1). Это дает нам два уравнения

$$\sqrt{4+4R} = 4 + \sqrt{36-12R} \text{ и } \sqrt{4+4R} = 4 - \sqrt{36-12R},$$

которые имеют общее решение R=3, это означает, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трёх окружностей, что точка E совпадает с точкой O.

Ответ: б) 3.

Задание 17. Баржа грузоподъемностью 134 тонны перевозит контейнеры типов А и В. Количество загруженных на баржу контейнеров типа В не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляет 2 тонны и 5 млн. руб., контейнера типа В – 5 тонн и 7 млн. руб. соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн. руб.) всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к иссле-	1

дованию этой модели, но при этом решение не завершено	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**3**

Решение.

Пусть x - количество перевозимых контейнеров типа А, y - количество контейнеров типа В. Тогда вес контейнеров типа А составит $2x$ т, типа В - $5y$ т. В соответствии с условием задачи $2x+5y\le 134.$ Кроме того, должно выполняться условие: $y\ge \frac{5}{4}x.$

Пусть S - суммарная стоимость всех контейнеров. Тогда $S = 5x + 7y$. Нам предстоит исследовать функцию $S(x, y)$ на наибольшее значение при заданных условиях.

Имеем:

$$S=5x+7y\Leftrightarrow x=\frac{S-7y}{5},$$

значит:

$$\begin{cases}\frac{2(S-7y)}{5}+5y\le 134,\\ y\ge\frac{5(S-7y)}{4\cdot 5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2S-14y+25y\le 670,\\ 4y\ge S-7y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11y\le 670-2S,\\ 11y\ge S\end{cases}\Leftrightarrow\frac{S}{11}\le y\le\frac{670-2S}{11}.$$

Найдем, при каком значении y выполняется равенство

$$\frac{S}{11}=\frac{670-2S}{11}.$$

$$3S=670\Leftrightarrow S=223\frac{1}{3}.$$

Поскольку $x,\ y,$ а также стоимости контейнеров - числа натуральные, то $S\in\mathbb{N}.$ Значит, $S\le 223.$

1. Если $S=223,$ то

$$\frac{223}{11}\le y\le\frac{670-446}{11}\Leftrightarrow 20\frac{3}{11}\le y\le 20\frac{4}{11}.$$

Натуральных решений нет.

2. Если $S=222,$ то

$$\frac{222}{11}\le y\le\frac{670-444}{11}\Leftrightarrow 20\frac{2}{11}\le y\le 20\frac{6}{11}.$$

Натуральных решений нет.

3. Если $S=221,$ то

$$\frac{221}{11} \le y \le \frac{670-442}{11} \Leftrightarrow 20\frac{1}{11} \le y \le 20\frac{8}{11}.$$

Натуральных решений нет.
4. Если $S = 220$, то

$$\frac{220}{11} \le y \le \frac{670-440}{11} \Leftrightarrow 20 \le y \le 20\frac{10}{11}.$$

Натуральное решение: $y = 20$.
Вычислим значение x при $y = 20$.

$$x = \frac{220-140}{5} = 16 \in \mathbb{N}.$$

Итак, искомое значение 220 млн. руб.

Ответ: 220 млн. руб.

Приведём второй способ решения.

Заметим, что контейнер типа *A* приносит 2,5 млн руб. за тонну, а контейнер типа *B* - 1,4 млн руб. за тонну, поэтому контейнеров типа *A* должно быть как можно больше, а контейнеров типа *B* как можно меньше. По условию, на каждые 4 контейнера типа *A* должно приходиться не менее 5 контейнеров типа *B*. Пусть контейнеров типа *A* будет $4x$, а контейнеров типа *B* - $5x$, их общий вес составит $8x + 25x = 33x$ тонн. Грузоподъёмность баржи 134 тонны, поэтому наибольшее возможное целое значение $x = 4$.

Если $x = 4$, то на баржу можно загрузить 16 контейнеров типа *A* и 20 контейнеров типа *B*, их стоимость составит 80 + 140 = 220 млн руб. При этом баржа будет недогружена на 2 тонны. Заменим два контейнера типа *A* одним контейнером типа *B*. Стоимость 14 контейнеров типа *A* и 21 контейнера типа *B* составляет 70 + 147 = 217 млн руб., при этом баржа недогружена на 1 тонну. Можно было бы загрузить баржу полностью, заменив ещё два контейнера типа *A* одним контейнером типа *B*, но при этом общая стоимость контейнеров снова бы снизилась на 3 млн руб. Из этого следует, что оптимально не загружать баржу полностью, а загрузить на неё 16 контейнеров типа *A* и 20 контейнеров типа *B*общей стоимостью 220 млн руб.

Примечание.

Проверять изменение стоимости при дозагрузке не полностью нагруженной баржи - обязательная часть решения. Например, если бы контейнер типа *B* стоил 11 млн руб., а другие данные задачи не поменялись бы, то стоимость 16 контейнеров типа *A* и 20 контейнеров типа *B* составила бы 80 + 220 = 300 млн руб. (недогружено 2 тонны), стоимость 14 контейнеров типа A и 21 контейнера типа B составила бы 70 + 231 = 301 млн руб. (недогружена 1 тонна), а стоимость 12 контейнеров типа A и 22 контейнеров типа B составила бы 302 млн руб. - баржа загружена полностью, прибыль максимальна, дальнейшая замена контейнеров типа A на контейнеры типа B приводит к уменьшению прибыли.

Задание 18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y = \dfrac{a+3x-ax}{x^2+2ax+a^2+1}$ содержит отрезок $[0;1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Найдено множество значений a, корни, соответствующие единственному значению параметра не определены ИЛИ Найдены корни, но в множество значений a не включены одна или две граничные точки.	3
Найдено множество значений a, но не включены одна или две граничные точки. Корни, соответствующие единственному значению параметра не найдены.	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**4**

Решение.

Запишем функцию в виде

$$y = \frac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}.$$

Отрезок $[0;\ 1]$ содержится в множестве значений данной функции тогда и только тогда, когда уравнения

$$\frac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1} = 1$$

имеют решения.

Решим первое уравнение. Уравнение $(a-3)x = a$ имеет решение при любом $a \neq 3$.

Решим второе уравнение. Уравнение

$$x^2+3(a-1)x+a^2-a+1=0$$

имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D = 9(a-1)^2 - 4\left(a^2 - a + 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow 5a^2 - 14a + 5 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right)\left(a - \frac{7+2\sqrt{6}}{5}\right) \geq 0,$$

откуда

$$a \leq \frac{7-2\sqrt{6}}{5}, \quad \frac{7+2\sqrt{6}}{5} \leq a < 3, \quad a > 3.$$

Ответ: $a \in \left(-\infty, \frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right] \cup \left[\frac{7+2\sqrt{6}}{5}, 3\right) \cup (3, +\infty)$.

Задание 19. Все члены геометрической прогрессии - различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

Содержание критерия	**Баллы**
Верно выполнены: а), б)	4
При выполнении заданий а) или б) допущена ошибка или неточность, не повлиявшая на ход решения. Ответ верный	3
Верно выполнен только пункт б)	2
Верно выполнен только пункт а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	**4**

Решение.

а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв

$$b_1 = 512 = 8^3 \qquad q = \frac{9}{8},$$

получим

$$b_2 = 8 \cdot 8 \cdot 9 = 576, \; b_3 = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648, \; b_4 = 9^3 = 729.$$

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая последовательность есть. Без ограничения общности она возрастает; пусть её знаменатель есть $q = \frac{m}{k}$, где m и k - взаимно простые натуральные числа. Тогда прогрессия имеет вид:

$$510 < b_1 < b_2 = b_1 q < \ldots < b_5 = b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} m^4 < 740.$$

Так как m и k взаимно просты, b_1 делится на k^4, а значит, $m^4 < 740$, откуда $m \leq 5$. Так как $q > 1$, $k < m$. Но k - целое, поэтому $k \leq m - 1 \leq 4$. Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \geq \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \geq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Поэтому

$$b_5 = b_1 q^4 \geq b_1 \frac{5^4}{4^4} > 510 \cdot \frac{625}{256} > 740,$$

что противоречит требованию задачи.

Ответ: а) да; б) нет.

Перевод набранных первичных баллов в стобалльную и в пятибалльную системы

Первичный	Тестовый
0	0
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	55
12	59
13	64
14	68
15	70
16	72
17	74
18	76
19	78
20	80
21	82
22	84
23	86
24	88
25	90
26	92
27	94
28	96
29	97
30	98
31	99
32	100

Тестовый	Оценка
0-26	2
27-49	3
50-67	4
68-100	5