# *«Избранные задачи для подготовки к ЕГЭ на профильном уровне»*

# Оглавление

## Раздел I. Тригонометрические уравнения и их решение.

**№1. Решите уравнение:** $\boldsymbol{\frac{6cos^2x-cosx-2}{\sqrt{-sinx}}=0}$

Решение:

$\frac{6cos^2x-cosx-2}{\sqrt{-sinx}}=0;$

$\begin{cases} 6cos^2x-cosx-2=0 \\ -sinx>0 \end{cases};$

**1)** $6cos^2x-cosx-2=0,$

Пусть $cosx=t,\ \ |t|\le 1.$

$6t^2-t-2=0$

$D=25$

$t_1=\frac{2}{3}, t_2=-\frac{1}{2}.$

Вернемся к первоначальной замене:

а) $cosx=\frac{2}{3}$

$x=\pm arccos\ \frac{2}{3}+2\pi n, n\in Z;$

б) $cosx=-\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

**2)** $-sinx>0$

$\sin x<0,\qquad \text{т. е. } x - \text{угол 3,4 четвертей, поэтому}$

$x=-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n, n\in Z;$

$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z.$

**Ответ:** $\boldsymbol{-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n; -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \ n,k\in Z}.$

**№2 Решите уравнение:** $\dfrac{\boldsymbol{cos2x+2cos^2\frac{x}{2}-1}}{\boldsymbol{log_2 sinx}}=\mathbf{0.}$

Решение: $\dfrac{cos2x+2cos^2\frac{x}{2}-1}{\log_2 sinx}=0$

1. ОДЗ: $\log_2 sinx \neq 0, \text{т. к.} \, 0 < sinx < 1;$
2. $cos2x+2cos^2\frac{x}{2}-1=0.$

Для решения применяем формулу $cos2x=2cos^2x-1.$

$2cos^2\dfrac{x}{2}-1=cosx;$

$2cos^2x+cosx-1=0.$

Пусть $cosx=t, t \in [-1;1]$, тогда $2t^2+t-1=0$

$t_1=-1, \quad t_2=\dfrac{1}{2}.$

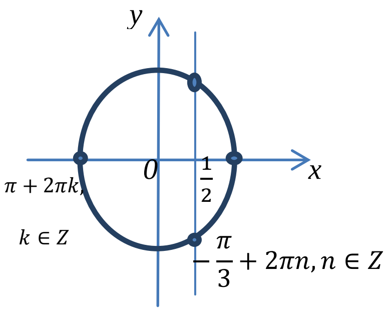
Вернемся к первоначальной замене:

*а)* $cosx=-1;$
$x=\pi+2\pi k, k \in Z.$

*б)* $cosx=\frac{1}{2};$

$x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z.$

*в)*




3. С учетом ОДЗ имеем $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z.$

**Ответ:** $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z}.$

**№3 а) Решите уравнение: $\sqrt{cos^2 5x - 10cos5x + 25} - \sqrt{(7cos5x - 10)^2} = -8$;**

**б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.**

Решение:

$\sqrt{cos^2 5x - 10cos5x + 25} - \sqrt{(7cos5x - 10)^2} = -8$

$\sqrt{(cos5x - 5)^2} - \sqrt{(7cos5x - 10)^2} = -8$

$|cos5x - 5| - |7cos5x - 10| = -8$

Т. к. $cos5x \in [-1; 1]$, то $5cos5x > 0, 10 - 7cos5x > 0$, имеем:

$|cos5x - 5| - |7cos5x - 10| = -8, \qquad 5 - cos5x - 10 + 7cos5x = -8$

$6cos5x = -3,$

$cos5x = -\frac{1}{2} \in [-1; 1].$

$x = \pm\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z$

*б) 1)*$x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2n}{5}n, n \in Z, \qquad \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right].$

$\frac{\pi}{3} \le \frac{2\pi}{15} + \frac{2n}{5}n \le \pi$

$\frac{1}{2} \le n \le \frac{13}{6}, n \in Z$

$n = 1; 2.$

*при n=1,* $x = \frac{8\pi}{15}$;

*при n=2,* $x = \frac{14\pi}{15}$.

*2)* $x = -\frac{2\pi}{15} + \frac{2n}{5}n, n \in Z, \qquad \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right].$

$\frac{7}{6} \le n \le \frac{17}{6}, n \in Z$

*При n=2,* $x = \frac{2\pi}{3}$.

**Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{15} + \frac{2n}{5}n, n \in Z$; б)$\frac{8\pi}{15}, \frac{2\pi}{3}, \frac{14\pi}{15}$.**

**№4. Решите уравнение:** $\boldsymbol{4cos^2x\, ctgx + 4ctgx + sinx = 0}$.

Решение:

Приведем $4cos^2x\, ctgx + 4ctgx + sinx = 0$ к общему знаменателю ***sinx:***

***1)*** $\frac{4cos^2x + 4\boldsymbol{cosx} + \boldsymbol{sin^2}x}{sinx} = 0,$

$$\frac{3cos^2x + 4cosx + 1}{sinx} = 0.$$

***2)*** $\begin{cases} sinx \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} cosx = -1 \\ cosx = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, n \in Z; \\ x = \pi + 2\pi n, n \in Z; \\ x = \pm\left(\pi - arccos\ \frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \leftrightarrow x = \pm\left(\pi - arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z.$

**Ответ:** $\boldsymbol{\pm\left(\pi - arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \mathrm{n} \in Z}$.

**№5. Решите уравнение:** $\boldsymbol{sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + sin2x = -\frac{1}{2}}$.

Решение:

$$sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + sin2x = -\frac{1}{2}$$

Используем формулу синуса разности двух углов

$$sin4xcos\frac{\pi}{6} - cos4xsin\frac{\pi}{6} + sin2x = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}sin4x + sin2x = -\frac{1}{2}(1 - cos4x),$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}sin4x + sin2x = -\frac{1}{2} \cdot 2sin^2 2x,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}sin4x + sin2x = -sin^2 2x,$$

т.к. $sin4x = 2sin2x\, cos2x,$ то уравнение примет вид:

$$\sqrt{3}sin2x\, cos2x + sin2x + sin^2 2x = 0,$$

$$sin2x\left(\sqrt{3}cos2x + 1 + sin2x\right) = 0.$$

Решаем методом введения вспомогательного угла:

| | | |
|---|---|---|
| $sin2x = 0,$ | или | $\sqrt{3}cos2x + sin2x = -1,$ |
| $2x = \pi n, n \in Z,$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}cos2x + \frac{1}{2}sin2x = -\frac{1}{2},$ |
| $x = \frac{\pi}{2}n, n \in Z.$ | | $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$ |

$$2x-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{2\pi}{3}=2\pi m, m\in Z;$$

$$\left[\begin{array}{l}2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m, m\in Z,\\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{12}+\pi m, m\in Z,\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z;\end{array}\right.$$

**Ответ:** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}n;\ \frac{5\pi}{12}+\pi m;\ -\frac{\pi}{4}+\pi k;\ n,m,k\in Z.}$

## №6. Решите уравнение: $\boldsymbol{\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin 3x=\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Решение:

$cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)-sin3x=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

Используем формулу косинуса разности двух углов

$cos6x\cos\frac{\pi}{4}+sin6x\sin\frac{\pi}{4}-sin3x=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\frac{\sqrt{2}}{2}sin6x-sin3x=\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-cos6x)$.

т.к. $sin6x=2sin3x\ cos3x, 1-cos6x=2sin^2 3x,$ то:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\ sin3xcos3x-sin3x=\sqrt{2}sin^2 3x$,

$sin3x\left(\sqrt{2}cos3x-1-\sqrt{2}sin3x\right)=0$

Решаем методом введения вспомогательного угла:

$sin3x=0$ или $\frac{\sqrt{2}}{2}cos3x-\frac{\sqrt{2}}{2}sin3x=\frac{1}{2}$

$3x=\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{3}n, n\in Z.$ $\qquad$ $3x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$

$$\left[\begin{array}{l}3x=-\frac{\pi}{12}+2\pi k, k\in Z\\ 3x=-\frac{5\pi}{12}+2\pi m, m\in Z\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k, k\in Z \\ x=-\frac{5\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}m, m\in Z \end{array}\right.$$

Можно и по-другому:

$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

$3x-\frac{\pi}{4}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$, или

$\left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z \\ 3x-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m, m\in Z \end{array}\right.$,

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k, k\in Z \\ x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}m, m\in Z \end{array}\right.$.

**Ответ:** $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}n;\ -\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k;\ -\frac{5\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}m; n,k,m\in Z}$.

**или** $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}n;\ \frac{\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k;\ -\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}m,\ n,k,m\in Z}$.

## №7. Решите уравнение: $\boldsymbol{cosx-cos3x+sin4x=0}$.

Решение:

$cosx-cos3x+sin4x=0$

Воспользуемся одной из формул разности одноименных функций и формулой синуса двойного угла.

$-2sin2x\sin(-x)+2sin2x\,cos2x=0$;

$2sin2x(sinx+cos2x)=0$;

$2sin2x(sinx+1-2sin^2x)=0$;

1)$sin2x=0$, или 2) $2sin^2x-sinx-1=0$,

$2x=\pi n, n\in Z$, $D=9$,

$x=\frac{\pi}{2}n, n\in Z$. $sinx=1$, или 3)$sinx=-\frac{1}{2}$,

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$. $x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in Z$.

Решение 1 и 2 уравнений можно записать как $x=\frac{\pi}{2}n, n\in Z$.

Решение исходного уравнения: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}n, n\in Z; \\ x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in Z. \end{array}\right.$

**Ответ:** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}n;\ (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+\pi m; n,m\in Z.}$

**№8. Решите уравнение: $\boldsymbol{sin2x\,cos2x = sin^4 2x + cos^4 2x}$.**

Решение:

$sin2x\,cos2x = sin^4 2x + cos^4 2x,$

$sin2x\,cos2x = (sin^2 2x + cos^2 2x)^2 - 2sin^2 2x\,cos^2 2x,$

$sin2x\,cos2x = 1 - 2sin^2 2xcos^2 2x,$

$2sin2xcos2x = 2 - 4sin^2 2x\,cos^2 2x,$

$sin4x = 2 - sin^2 4x,$

$sin^2 4x + sin4x - 2 = 0,$

Пусть $sin4x = t$, тогда

$t^2 + t - 2 = 0,$

$D = 1 + 8 = 9,$

$t_1 = \frac{-1+3}{2} = 1; \qquad t_2 = \frac{-1-3}{2} = -2,$

отсюда

$sin4x = 1,$ или $sin4x = -2,$

$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$ нет корней, т. к. $-2 < -1$.

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z.$

**Ответ: $\boldsymbol{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z}$.**

**№9. Решите уравнение: $\boldsymbol{sin^2 x + sin^2 2x = cos^2 3x + cos^2 4x}$.**

Решение:

$sin^2 x + sin^2 2x = cos^2 3x + cos^2 4x,$

$\frac{1-cos2x}{2} + \frac{1-cos4x}{2} = \frac{1+cos6x}{2} + \frac{1+cos8x}{2},$

$2 - cos2x - cos4x - 2 - cos6x - cos8x = 0,$

$cos2x + cos4x + cos6x + cos8x = 0,$

$2cos\frac{2x+8x}{2}cos\frac{2x-8x}{2} + 2cos\frac{4x+6x}{2}cos\frac{4x-6x}{2} = 0,$

$2cos5x\cos(-3x) + 2cos5x\cos(-x) = 0,$

$2cos5x\cos 3x + 2cos5x\cos x = 0,$

$2cos5x\,(\cos 3x + \cos x) = 0,$

$2cos5x\ \ 2\cos\frac{3x+x}{2}\cdot\cos\frac{3x-x}{2}=0,$

$4cos5x\ \ \cos 2x\cos x=0,$

$cos5x\ \ \cos 2x\cos x=0,$

$cos5x=0,$ или $\cos 2x=0,$ или $\cos x=0,$

$5x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,$ $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

$x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n, n\in Z.$ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z.$

Решение уравнения $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ – подмножество решений уравнения $\cos 5x=0$, поэтому решением заданного уравнения являются: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z.$

**Ответ: $\boldsymbol{\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z.}$**

**№10 а) Решите уравнение: $\boldsymbol{8sin^4x-3cos2x+1=0;}$**

**б) Запишите множество решений, принадлежащих отрезку $\boldsymbol{\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]}$.**

Решение*:*

$a)$ $8sin^4x-3cos2x+1=0,$

$8\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^2-3cos2x+1=0,$

$2cos^2 2x-7cos2x+3=0,$

Введем замену: пусть $cos2x=t, t\in[-1;1]$, тогда

$2t^2-7t+3=0,$

$D=25,$

$t_1=3\ \notin[-1;1],\ t_2=\frac{1}{2}\in[-1;1],$

Возвращаемся к замене:

$cos2x=\frac{1}{2},$

$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z,$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z,$

при n=1: $x=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}\ \in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right];$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

**Ответ: а)** $\boldsymbol{\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z}$**;** **б)**$\boldsymbol{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}}$**.**

## Раздел II. Логарифмические уравнения и неравенства и их решение.

**№1. Решить неравенство:** $\log_{2x+2}(x^2-7x+10) < \frac{1}{2}\log_{|x-3|}(3-x)^2$.

**В ответе указать множество решений, сумму целых значений из этого множества.**

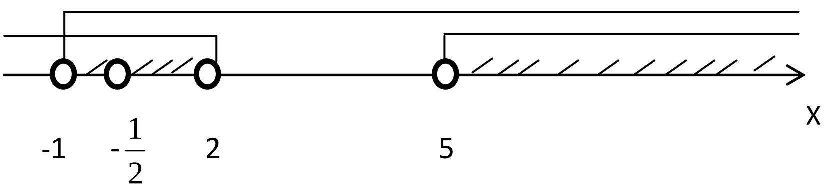
Решение:

$$\log_{2x+2}(x^2-7x+10) < \frac{1}{2}\log_{|x-3|}(3-x)^2$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-7x+10>0, \\ 3-x\neq 0, \\ 2x+2>0, \\ 2x+2\neq 1, \\ |x-3|\neq 1, \\ x-3\neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;2)\cup(5;\infty), \\ x\neq 3, \\ x>-1, \\ x\neq -\frac{1}{2}, \\ x-3\neq 1, \\ x-3\neq -1, \\ x\neq 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;2)\cup(5;\infty), \\ x>-1, \\ x\neq -\frac{1}{2}, \\ x\neq 4, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Найдем решение системы при помощи числовой прямой




$$X\in(-1;-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2};2)\cup(5;\infty)$$

2) $\log_{2x+2}(x^2-7x+10) < \frac{1}{2}\log_{|x-3|}(3-x)^2$

$$\frac{1}{2}\log_{|x-3|}(3-x)^2 = \log_{|x-3|}|3-x| = \log_{|x-3|}|x-3| = 1$$

Запишем уравнение в упрощенном виде:

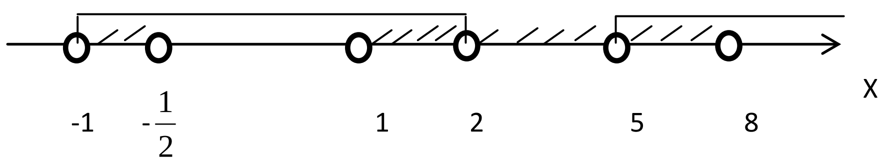
$$\log_{2x+2}(x^2-7x+10) < 1$$

$$\log_{2x+2}(x^2-7x+10) < \log_{2x+2}(2x+2)$$

а) $\begin{cases} 0 < 2x+2 < 1, \\ x^2 - 7x + 10 > 2x + 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < 2x < -1, \\ x^2 - 9x + 8 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ x \in (-\infty;1) \cup (8;\infty); \end{cases} \Rightarrow x \in (-1;-\frac{1}{2})$

б) $\begin{cases} 2x+2 > 1, \\ x^2 - 7x + 10 < 2x + 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x^2 - 9x + 8 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\frac{1}{2};\infty), \\ x \in (1;8); \end{cases} \Rightarrow x \in (1;8).$

Объединяя найденные множества решений, учитывая ОДЗ, получаем решение неравенства




$x \in (-1;-\frac{1}{2}) \cup (1;2) \cup (5;8)$

6+7=13- сумма целых решений

**Ответ:** $(-1;-\frac{1}{2}) \cup (1;2) \cup (5;8)$ **;**

**сумма целых значений из множества решений 13.**

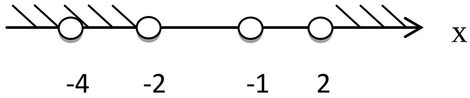
**№2. Решите уравнение.**

$\mathbf{2\log_2(x^2-4) - \log_2(x+4)^2 - \log_2(x+1)^2 = 0.}$

Решение.

$2\log_2(x^2-4) - \log_2(x+4)^2 - \log_2(x+1)^2 = 0$

а) ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ x + 4 \neq 0, \\ x + 1 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty), \\ x \neq -4, \\ x \neq -1; \end{cases}$



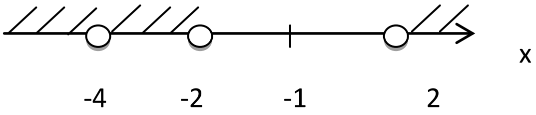

$x \in (-\infty;-4) \cup (-4;-2) \cup (2;\infty).$

б) $2\log_2(x^2-4) = 2\log_2|x+4| + 2\log_2|x+1|$

$\log_2(x^2-4) = \log_2|x+4| \cdot |x+1|$

$x^2 - 4 = |x+4| \cdot |x+1|$

X=-4 X=-1




Нули подмодульных выражений

а) $\begin{cases} x \in (-\infty;-4), \\ x^2 - 4 = (-x-4)(-x-1); \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty;-4), \\ x^2 - 4 = x^2 + 5x + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty;-4), \\ x = -\dfrac{8}{5} = -1{,}6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ нет решений

б) $\begin{cases} x \in (-4;-2), \\ x^2 - 4 = (x+4)(-x-1); \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-4;-2), \\ x^2 - 4 = -x^2 - 5x - 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-4;-2), \\ 2x^2 + 5x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-4;-2), \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2{,}5; \end{array}\right. \end{cases}$ $\Rightarrow$x=-2,5

в) $\begin{cases} x \in (2;\infty), \\ x^2 - 4 = (x+4)(x+1); \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (2;\infty), \\ x^2 - 4 = x^2 + 5x + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (2;\infty), \\ x = -\dfrac{8}{5} = -1{,}6 \end{cases}$ $\Rightarrow$нет решений

x=-2,5 – решение исходного уравнения

**Ответ: -2,5.**

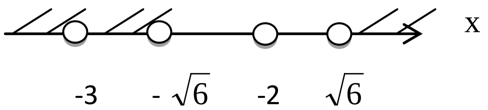
**№3. Решите уравнение $2\log_6(x^2-6)$ - $\log_6(x+3)^2$-$\log_6(x+2)^2$=0.**

Решение

а) Найдем область допустимых значений x:

$\begin{cases} x^2 - 6 > 0, \\ x+3 \neq 0, \\ x+2 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty;-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6};\infty), \\ x \neq -3, \\ x \neq -2; \end{cases}$

Покажем на числовой оси:




x$\in (-\infty;-3) \cup (-3;-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6};\infty)$

б) $2\log_6(x^2-6)$ - $\log_6(x+3)^2$-$\log_6(x+2)^2$=0,

$2\log_6(x^2-6)$ = $2\log_6 |x+3| + 2\log_6 |x+2|$ ,

$\log_2(x^2-6)$ = $\log_6(|x+3| \cdot |x+2|)$,

X$^2$ -6= $|x+3| \cdot |x+2|$ ,

X$^2$ -6= $|(x+3)\cdot(x+2)|$ ,

Х $^2$ -6= $\left|x^2+5x+6\right|$ Данное уравнение равносильно системе :

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-6=x^2+5x+6,\\ x^2+5x+6\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-6=-x^2-5x-6,\\ x^2+5x+6<0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x=-12,\\ x\in(-\infty;-3]\cup[-2;\infty);\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2+5x=0\\ x\in(-3;-2);\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2{,}4,\\ x\in(-\infty;;-3]\cup[-2;\infty);\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-2{,}5,\end{array}\right.\\ x\in(-3;-2);\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{неткорней}\\ x=-2{,}5,\end{array}\right. \Rightarrow x=-2{,}5\in ОДЗ\,.$$

**Ответ: -2,5.**

## №4. Решите уравнение $\log_{2x^2-9} 21=\frac{1}{\log_7 3x}+\frac{1}{\log_3 x+1}$.

Решение:

1) Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases}2x^2-9>0,\\ 2x^2-9\ne 1,\\ 3x>0,\\ 3x\ne 1,\\ x>0,\\ x\ne\frac{1}{3};\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;-\frac{3}{\sqrt{2}})\cup(\frac{3}{\sqrt{2}};\infty),\\ x\ne\pm\sqrt{5},\\ x>0,\\ x\ne\frac{1}{3};\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\in(\frac{3}{\sqrt{2}};\infty),\\ x\ne\sqrt{5};\end{cases} \Rightarrow x\in(\frac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\infty).$$

2) Решим, используя свойства логарифмов и формулу перехода к логарифму с другим основанием:

$$\log_{2x^2-9} 21=\log_{3x}7+\frac{1}{\log_3 x+\log_3 3}$$

$$\log_{2x^2-9} 21=\log_{3x}7+\frac{1}{\log_3 3x}$$

$\log_{2x^2-9} 21=\log_{3x}21$
$2x^2-9=3x$
$2x^2-3x-9=0$
$D=9+72=81$
$x_1=3\in$ ОДЗ
$x_2=-1{,}5$- не удовлетворяет ОДЗ

**Ответ: 3.**

**№5. При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_2 x$ и g(x)= $\log_2(3\text{-}x)$ будут отличаться меньше, чем на 1?**

Решение:

$$\left| f(x) - g(x) \right| < 1,$$

$$\left| \log_2 x - \log_2 (3-x) \right| < 1;$$

Используя определение и свойства логарифмов имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \\ \left| \log_2 \dfrac{x}{3-x} \right| < 1. \end{cases}$$

1) $\left| \log_2 \dfrac{x}{3-x} \right| < 1,$

$$-1 < \log_2 \frac{x}{3-x} < 1,$$

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 \frac{x}{3-x} < \log_2 2,$$

$$\frac{1}{2} < \frac{x}{3-x} < 2,$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3-x} < 2, \\ \dfrac{x}{3-x} > \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-6}{3-x} < 0, \\ \dfrac{3x-6}{2(3-x)} > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty), \\ x \in (1; 3); \end{cases} \Rightarrow x \in (1;2)$$

2) С учетом ОДЗ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \quad 1<x<2.$$

**Ответ: (1;2).**

***№6. Решить уравнение*** $\left|1-\log_{\frac{1}{2}} x\right|+2=\left|3-\log_{\frac{1}{2}} x\right|$**.**

Решение

Находим ОДЗ уравнения: x>0. Введем обозначение $\log_{\frac{1}{2}} x = t$, тогда уравнение примет вид

$|1-t|+2=|3-t|$ или $|t-1|+2=|t-3|$ (в силу свойства $|a|=|-a|$). Рассмотрим три случая:

- $t\geq 3$, тогда по определению абсолютной величины имеем $|t-3|=t-3$ и $|t-1|=t-1$. Подставляя в уравнение, получим t-1+2=t-3$\Rightarrow$ 1=-3 , что невозможно. Следовательно, решений нет.
- $1\leq t<3$, тогда $|t-3|=3-t$ и $|t-1|=t-1$, уравнение примет вид t-1+2=3-t$\Rightarrow$ 2t=2$\Rightarrow$t=1$\Rightarrow$ $\log_{1/2} x=1 \Rightarrow x=1/2$
- $t<1 \Rightarrow |t-3|=3-t, |t-1|=1-t$ и 1-t+2=3-t$\Rightarrow 3=3$, т.е. уравнение верно при всех t<1 , откуда $\log_{1/2} x<1 \Rightarrow x>1/2$ и имеем бесчисленно множество решений.

Объединив второй и третий случаи, получим ответ $x \in \left[\frac{1}{2};\infty\right)$.

**Ответ:** $\left[\frac{1}{2};\infty\right)$**.**

**№7. Решить уравнение** $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{20}}(2x^2-3)}=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 5x}-\dfrac{1}{1-\log_{\frac{1}{5}} x}$**.**

Решение:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{20}}(2x^2-3)}=\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 5x}-\frac{1}{1-\log_{\frac{1}{5}} x}$$

1)Найдем область допустимых значений x:

$$\begin{cases} 2x^2-3>0, \\ \log_{\frac{1}{20}}(2x^2-3)\neq 0, \\ 5x>0, \\ 5x\neq 1, \\ x>0, \\ \log_{\frac{1}{5}} x\neq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}})\cup(\sqrt{\frac{3}{2}};\infty) \\ 2x^2-3\neq 1; \\ x>0; \\ x\neq \frac{1}{5;} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}})\cup(\sqrt{\frac{3}{2}};\infty) \\ x\neq \pm 2, \\ x>0, \\ x\neq \frac{1}{5}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (\sqrt{\frac{3}{2}};\infty), \\ x \neq \sqrt{2}, \\ x \neq \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Сравним $\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\frac{1}{5}$:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{1}{5}$$

Следовательно, областью допустимых значений x является :

$$x \in (\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\infty)$$

2)выполним преобразование, используя свойства логарифмов

$$\log_{2x^2-3}\frac{1}{20} = \log_{5x}\frac{1}{4} - \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5} - \log_{\frac{1}{5}} x}$$

$$\log_{2x^2-3}\frac{1}{20} = \log_{5x}\frac{1}{4} - \frac{1}{-\log_{\frac{1}{5}} 5 - \log_{\frac{1}{5}} x}$$

$$\log_{2x^2-3}\frac{1}{20} = \log_{5x}\frac{1}{4} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} 5x}$$

$$\log_{2x^2-3}\frac{1}{20} = \log_{5x}\frac{1}{4} + \log_{5x}\frac{1}{5}$$

$$\log_{2x^2-3}\frac{1}{20} = \log_{5x}\frac{1}{20}$$

$$2x^2 - 3 = 5x$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 49$$

$$x_1 = 3 \in ОДЗ$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \notin ОДЗ$$

**Ответ: 3.**

**№8. Решить уравнение** $\log_2(x^2-3)+\log_{\frac{1}{2}}(6x-10)+1=0$**.**

Решение:

$$\log_2(x^2-3)+\log_{\frac{1}{2}}(6x-10)+1=0$$

1)Найдем область допустимых значений

$$\begin{cases} x^2-3>0 \\ 6x-10>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\infty) \\ x\in(1\frac{2}{3};\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(\sqrt{3};\infty)$$

Сравним $1\frac{2}{3}$ и $\sqrt{3}$:

$$1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}=\sqrt{\frac{25}{9}=\sqrt{2\frac{7}{9}}};$$

$$\sqrt{2\frac{7}{9}}<\sqrt{3}\Rightarrow 1\frac{2}{3}<\sqrt{3}.$$

$$2)\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+\log_2 2=0$$
$$(x^2-3)2=6x-10$$
$$x^2-3=3x-5$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$D=1$$
$$x_1=2\in ОДЗ$$
$$x_2=1\notin ОДЗ$$

**Ответ: 2.**

**№9. Решите уравнение** $\boldsymbol{log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\frac{1}{log_2(3-4x^2)}}$ **.**

Решение:

$$log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\frac{1}{log_2(3-4x^2)}$$

$$ОДЗ:\ \begin{cases} 3-4x^2>0, \\ 3-4x^2\neq 1, \\ 9-16x^4>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x)>0, \\ 2-4x^2\neq 0, \\ (3-4x^2)(3+4x^2)>0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x) > 0, \\ x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решаем уравнение , применяя свойства логарифмов.

$$log_{3-4x^2}(9-16x^4) = 2 + \frac{1}{log_2(3-4x^2)} ,$$

$$log_{3-4x^2}(3-4x^2) + log_{3-4x^2}(3+4x^2) = 2 + log_{3-4x^2}2,$$

$$1 + log_{3-4x^2}(3+4x^2) = 2 + log_{3-4x^2}2,$$

$$log_{3-4x^2}\frac{3+4x^2}{2} = 1,$$

$$\frac{3+4x^2}{2} = 3-4x^2; \quad 3+4x^2 = 6-8x^2;$$

$12x^2$-$3$= $0$; $\quad x^2 = \frac{1}{4}$; $\quad x = \pm\frac{1}{2}$ .

$x = \pm\frac{1}{2}$ удовлетворяют ОДЗ.

**Ответ:** $\pm\frac{1}{2}$**.**

**№10. Решите уравнение** $\sqrt{9-\frac{24}{log_x 4}} = 5log_4(2^{\frac{4}{5}} \cdot (\frac{2}{x})^{0,4})$ **.**

Решение:

$$\sqrt{9-\frac{24}{log_x 4}} = 5log_4(2^{\frac{4}{5}} \cdot (\frac{2}{x})^{0,4}) .$$

*ОДЗ:* $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 9-\frac{24}{log_x 4} \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 9 - 24log_4 x \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ log_4 x \leq \frac{9}{24}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \leq 4^{\frac{9}{24}} \end{cases}; \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (0;1)(1;4^{\frac{9}{24}}]$ .

Решаем уравнение, применяя свойства логарифмов.

$\sqrt{9-24log_4x} = 4log_4 2 + 2log_4\frac{2}{x}$ ,

$\sqrt{9-24log_4x} = 2 + 1 - 2log_4x$ ,

$\sqrt{9-24log_4x} = 3 - 2log_4x$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} 3-2log_4x \geq 0, \\ 9-24log_4x = 9-12log_4x+4\,log_4^2x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_4x \leq \frac{3}{2}, \\ 4\,log_4^2x+12log_4x = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} log_4x \leq \frac{3}{2}, \\ 4log_4x(log_4x+3) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_4x \leq \frac{3}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} log_4x = 0, \\ log_4x = -3; \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4^{-3}. \end{array}\right.$$

$x = 1 \notin$ ОДЗ,

$x = \dfrac{1}{64} \in$ ОДЗ.

**Ответ: $\frac{1}{64}$.**

## № 11 Решите уравнение $\frac{8-lg(x-5)}{\sqrt{x+7}-lg2} = 1$.

Решение:

1) ОДЗ $\begin{cases} x-5>0 \\ \sqrt{x+7}>0 \\ lg\sqrt{x+7} - lg2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>-7 \\ \sqrt{x+7} \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>-7 \\ x \neq -3 \end{cases} \Rightarrow x>5$

2)lg8-lg(x-5)=lg$\sqrt{x+7}$ -lg2

lg8+lg2=lg$\sqrt{x+7}$ + lg(x-5)

lg(8·2)=lg( $\sqrt{x+7}$ (x-5))

16=$\sqrt{x+7}$ (x-5)

$$\begin{cases} ((x-5)\sqrt{x+7} = 16 \\ x>5 \end{cases}$$

Можно методом подбора :

Пусть x=9, тогда

(9-5) $\sqrt{9+7}$ =16 –верное

Поэтому x=9.

**Ответ 9.**

## №12. Решить уравнение $\log_{\sqrt{2}}$ x+ $\log_{x\sqrt{x}}$ 8 =3-$\log_{1/\sqrt{2}}$ $\sqrt{x}$ .

Решение:

$\log_{\sqrt{2}}$ x+ $\log_{x\sqrt{x}}$ 8 =3-$\log_{1/\sqrt{2}}$ $\sqrt{x}$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x\in(0;1)\cup(1;\ \infty)$

Применяя формулу $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ рассмотрим:

1)$\log_{\sqrt{2}}$ x+$\dfrac{\log_2 x}{\log_2\sqrt{2}}=\dfrac{\log_2 x}{1/2}$=2$\log_2$ x;

2)$\log_{x\sqrt{x}}$ 8=$\dfrac{\log_2 8}{\log_2 x\sqrt{x}}=\dfrac{3}{\log_2 x^{3/2}}=\dfrac{3}{3/2\log_2 x}=\dfrac{2}{\log_2 x}$;

3)$\log_{1/\sqrt{2}}\sqrt{x}=\dfrac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 1/\sqrt{2}}=\dfrac{\log_2 x^{1/2}}{-1/2}$=-2*1/2$\log_2$ x=-$\log_2$ x.

Решим уравнение

2$\log_2$ x+$\dfrac{2}{\log_2 x}$ =3+$\log_2$ x.

2 $\log_2$ x-$\log_2$ x+$\dfrac{2}{\log_2 x}$ =3

$\log_2$ x+$\dfrac{2}{\log_2 x}$ =3

$\log_2^2$ x+2=3$\log_2$ x

$\log_2^2$ x-3$\log_2$ x+2=0

Пусть $\log_2$ x=y, тогда

$y^2-3y+2=0$

Д=9-8=1

$y_1=\frac{3+1}{2}=2$;   $y_2=\frac{3-1}{2}=1$, отсюда

$\log_2 x=2$   и   $\log_2 x=1$

$x=4\in ОДЗ$   $x=2\in ОДЗ$

**Ответ: 2;4.**

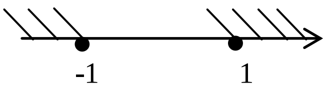
**№ 13. Решите неравенство** $\frac{x^2-4}{\log_{1/2}(x^2-1)}<0$**.**

Решение: $\frac{x^2-4}{\log_{1/2}(x^2-1)}<0$

$\frac{(x-2)*(x+2)}{\log_{1/2}(x^2-1)}<0$

Решим методом интервалов.

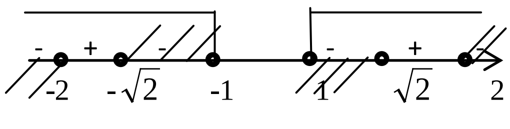
1) (x-2)*(x+2)=0
   x=2 или x=-2
2) $\log_{1/2}(x^2-1)\neq 0$
   a) ОДЗ $x^2-1>0$
      (x-1)(x+1)>0




$x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$

   b) $x^2-1\neq 1$
      $x^2\neq 2$
      $x\neq\pm\sqrt{2}$

3)




$x\in(-\infty;-2)\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(2;\infty)$;

**Ответ: x** $\in(-\infty;-2)\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(2;\infty)$;

**№14. Решите неравенство** $\mathbf{5\log_8(x^2\text{-}15x+56) \leq 6+\log_8 \frac{(x-7)^5}{x-8}}$.

Решение:

$5\log_8(x^2-15x+56) \leq 6+\log_8 \frac{(x-7)^5}{x-8}$

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2$-15x+56:

$X^2$-15X+56=0

D=$(-15)^2-4\bullet 56$=225-224=1

$X_1= \frac{15+1}{2}=8$;

$X_2$=7;

$X^2$-15X+56=(X-8)(X-7)

$5\log_8(x-8)(x-7) \leq 6+\log_8 \frac{(x-7)^5}{x-8}$

1)ОДЗ:

$\begin{cases}(x-8)(x-7) \succ 0 \\ \frac{(x-7)^5}{x-8}\end{cases} \Longrightarrow$ (x-8)(x-7)>0 $\Longrightarrow x \in (-\infty; 7) \cup (8; \infty)$.

2)$\log_8(x-8)^5(x-7)^5 - \log_8 \frac{(x-7)^5}{x-8} \leq 6$

$\log_8 \frac{(x-8)^5\ (x-7)^5}{\frac{(x-7)^5}{x-8}} \leq 6$

$\log_8 \frac{(x-8)^5(x-7)^5 \times (x-8)}{(x-7)^5} \leq 6$

$\log_8(x-8)^6 \leq 6$

$\log_8(x-8)^6 \leq \log_8 8^6$

***I способ***

$\log_8(x-8)^6 \leq \log_8 8^6$

$6\log_8|x-8| \leq 6\log_8 8$

т.к. функция y=$\log_8 u$ - возрастает, то $|x-8| \le 8$;

-8$\le x-8 \le 8$

$0 \le x \le 16$

***<u>II способ</u>***

$\log_8(x-8)^6 \le \log_8 8^6$

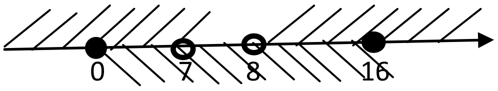
$3\log_8(x-8)^2 \le 3\log_8 8^2$

$(x-8)^2 \le 8^2$

$(x-8)^2-8^2 \le 0$

$x \in [0;16]$

3.С учетом ОДЗ




$x \in [0;7)U(8;16]$- решение неравенства

**Ответ: $x \in [0;7)U(8;16]$.**

**№15.Решите неравенства $9\log_{12}(x^2-3x-4) \le 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$ .**

Решение:

$9\log_{12}(x^2-3x-4) \le 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$

Разложим на множители выражение $x^2$-3x-4.

$x^2-3x-4=0$

$x_1=4$

$x_2=-1$

$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$

$9\log_{12}(x-4)(x+1) \le 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$

1)<u>ОДЗ</u>:

$$\begin{cases}(x-4)(x+1)\succ 0\\ \dfrac{(x+1)^9}{x-4}\succ 0\end{cases} \Rightarrow (x-4)(x+1)\succ 0 \Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(4;\infty);$$

2)$\log_{12}(x\text{-}4)^9(x+1)^9 \le 10+\log_{9}\dfrac{(x+1)^9}{x-4}$

$\log_{12} \quad \dfrac{(x-4)^9(x+1)^9(x-4)}{(x+1)^9}\le 10$

$\log_{12}(x\text{-}4)^{10}\le 10 \Rightarrow$

***<u>I способ</u>***

$\log_{12}$lx-4l$^{10}\le 10$

$10\log_{12}$lx-4l$\le 10$

$\log_{12}$lx-4l$\le 1$

$\log_{12}$lx-4l$\le \log_{12}12$

Функция y=$\log_{12}$u-возрастает,$\Rightarrow$lx-4l$\le 12$

$-12\le x\text{-}4\le 12$

$-8\le x\le 16$

***<u>II способ</u>***

$\log_{12}(x\text{-}4)^{10}\le 10$

$\log_{12}(x\text{-}4)^{2}\le 2$

$\log_{12}(x\text{-}4)^{2}\le \log_{12}12^2$

$(x\text{-}4)^2\le 12^{\,2}$

$X^2\text{-}8x+16\text{-}144\le 0$

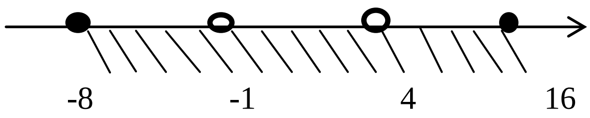
$X^2\text{-}8x\text{-}128\le 0$

$X_1=-8$

$X_2=16$

$x\in[-8;16];$

3)С учетом ОДЗ:




$x \in [-8;-1)U(4;16]$.

**Ответ: [-8;-1)U(4;16].**

**№16. Решите неравенство $7\log_{12}(x^2-13x+42) \le 8+\log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6}$.**

Решение:

$7\log_{12}(x^2-13x+42) \le 8+\log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6}$

Разложим на множители выражение $x^2-13x+42$.

$x^2-13x+42=0$

$x_1=7 \qquad x_2=6$

$x^2-13x-42=(x-7)(x-6)$

$7\log_{12}(x-7)(x-6) \le 8+\log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6}$

1)<u>ОДЗ</u>:

$\begin{cases}(x-7)(x-6)>0 \\ \frac{(x-7)^7}{x-6}>0\end{cases} \Rightarrow (x-7)(x-6)>0 \Rightarrow x \in (-\infty;6) \cup (7;\infty)$.

2)$\log_{12}(x-7)^7(x-6)^7-\log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6} \le 8$

$\log_{12} \quad \frac{(x-7)^7(x-6)^7(x-6)}{(x-7)^7} \le 8$

$\log_{12}(x-6)^8 \le 8 \Rightarrow$

***<u>I способ</u>***

$\log_{12}(x-6)^8 \le 8$

$\underline{8}\log_{12}|x-6| \le 8$

$\log_{12}|x-6| \le \log_{12}12$

Так как функция вида $y=\log_{12}u$-возрастает, то

$|x-6|\le 12$

$-12\le x-6\le 12$

$-6\le x\le 18$

***<u>II способ</u>***

$4\log_{12}(x-6)^2\le 8$

$\log_{12}(x-6)^2\le 2$

$\log_{12}(x-6)^2\le \log_{12}12^2$

$(x-6)^2\le 12^2$

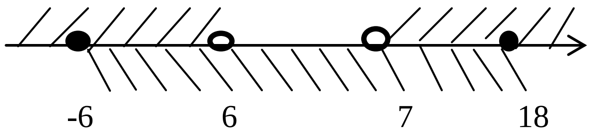
$(x-6)^2-12^2\le 0$

$(x-6-12)(x-6+12)\le 0$

$(x-18)(x+6)\le 0$

$x\in[-6;18]$;

3)С учетом ОДЗ:




$x\in[-6;6)U(7;18]$.

**Ответ: $x\in$ [-6;6)U(7;18].**

**№ 17. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения :**

$\mathbf{10x\ \log_4\sqrt{2я+5}-2x^2\log_{\frac{1}{4}}(2x+5)}$ и $\mathbf{2x^2\ +5x}$ **принимают равные значения.**

Решение:

1.Из условия задания следует:

$10x\log_4\sqrt{2x+5}\ -2x^2\ \log_{\frac{1}{4}}(2x+5)\ =2x^2\ +5x$

2. Решим составленное уравнение:

$10x\log_4\sqrt{2x+5}$ $-2x^2\log_{\frac{1}{4}}(2x+5)=2x^2+5x \Leftrightarrow 5x\log_4(2x+5)+2x^2\log_4(2x+5)=2x^2+5x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x^2+5x)(\log_4(2ч+5)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2+5x=0\\ 2x+5>0\end{cases}\\ 2x+5=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ x>-2,5\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2,5\\ x>-2,5\end{cases}\\ x=-0,5\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ x=0,5\end{cases}.$$

**Ответ: -0,5; 0.**

***№18. Решите уравнение*** $\log_{2x^2-9}21=\frac{1}{\log_7 3x}+\frac{1}{\log_3 x+1}$.

Решение:

1) Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases}2x^2-9>0,\\ 2x^2-9\neq 1,\\ 3x>0,\\ 3x\neq 1,\\ x>0,\\ x\neq\frac{1}{3};\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;-\frac{3}{\sqrt{2}})\cup(\frac{3}{\sqrt{2}};\infty),\\ x\neq\pm\sqrt{5},\\ x>0,\\ x\neq\frac{1}{3};\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\in(\frac{3}{\sqrt{2}};\infty),\\ x\neq\sqrt{5};\end{cases} \Rightarrow x\in(\frac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\infty).$$

2) Решим, используя свойства логарифмов и формулу перехода к логарифму с другим основанием:

$$\log_{2x^2-9}21=\log_{3x}7+\frac{1}{\log_3 x+\log_3 3}$$

$$\log_{2x^2-9}21=\log_{3x}7+\frac{1}{\log_3 3x}$$

$$\log_{2x^2-9}21=\log_{3x}21$$

$2x^2-9=3x$

$2x^2-3x-9=0$

$D=9+72=81$

$x_1=3\in$ ОДЗ

$x_2=-1,5$- не удовлетворяет ОДЗ.

**Ответ: 3.**

## Раздел III. Показательные уравнения, неравенства, иррациональные неравенства и их решение.

**№1. Решить неравенство** $(3^{\sqrt{x}+1}+2\cdot 3^{-\sqrt{x}}-7)\cdot\sqrt{2-x}\le 0$

Решение

$$(3^{\sqrt{x}+1}+2\cdot 3^{-\sqrt{x}}-7)\cdot\sqrt{2-x}\le 0$$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2-x\ge 0, \\ 3^{\sqrt{x}+1}+2\cdot 3^{-\sqrt{x}}-7\le 0, \\ x\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\le 2, \\ x\ge 0, \\ 3\cdot 3^{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{3^{\sqrt{x}}}-7\le 0 \end{cases}$$

1) Решим неравенство $3\cdot 3^{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{3^{\sqrt{x}}}-7\le 0$ .

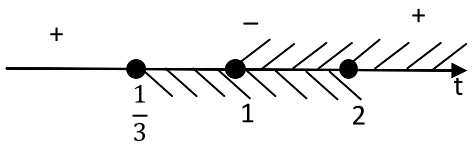
Пусть $3^{\sqrt{x}}=t, t>0$, но при $x\ge 0, t\ge 1,$ тогда

$3t+\dfrac{2}{t}-7\le 0$ ,

$\dfrac{3t^2-7t+2}{t}\le 0,$ решаем методом интервалов

$3t^2-7t+2\le 0$ при $t\ge 1$.

D=49-24=25

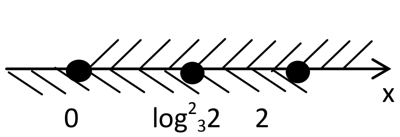



$t_1=\dfrac{7+5}{6}=2;$ $t_2=\dfrac{1}{3}$

$$t\in[1;2]\Rightarrow\begin{cases} 3^{\sqrt{x}}\le 2, \\ 3^{\sqrt{x}}\ge 1; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3^{\sqrt{x}}\le 3^{\log_3 2}, \\ 3^{\sqrt{x}}\ge 3^0, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \sqrt{x}\le\log_3 2, \\ \sqrt{x}\ge 0; \end{cases}\Rightarrow 0\le\sqrt{x}\le\log_3 2\Rightarrow 0\le x\le\log^2{}_3 2$$

2) С учетом ОДЗ получаем

$$\begin{cases} x\le 2, \\ x\ge 0, \\ 0\le x\le\log^2{}_3 2 \end{cases}\Rightarrow x\in\left[0;\log^2{}_3 2\right]\cup\{2\}, \text{ т.к.}$$




**Ответ:** $\left[0;\log^2{}_3 2\right]\cup\{2\}$.

**№2.Решите неравенство:** $\frac{2-2x-\sqrt{21-14x}}{x+3} \le -1$

Решение:

$$\frac{2-2x-\sqrt{21-14x}}{x+3} \le -1$$

а) Найдем область допустимых значений x:

$$\begin{cases} 21-14x \ge 0, \\ x+3 \ne 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1{,}5, \\ x \ne -3 \end{cases},$$

$$x \in (-\infty;-3) \cup (-3;1{,}5]$$

б) Переведем исходное неравенство к стандартному виду

$$\frac{2-2x-\sqrt{21-14x}}{x+3} \le -1 \Leftrightarrow \frac{2-2x-\sqrt{21-14x}+x+3}{x+3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-x+5-\sqrt{21-14x}}{x+3} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-x-\sqrt{21-14x}}{x+3} \le 0.$$

Рассмотрим функцию f(x)= $\frac{5-x-\sqrt{21-14x}}{x+3}$ .

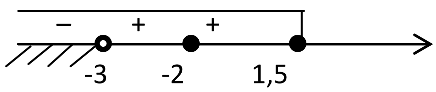
Используем метод интервалов. Найдем точки в которых числитель и знаменатель дроби обращаются нуль:

1) 5-x- $\sqrt{21-14x} = 0$,
   $\sqrt{21-14x} = 5-x$,
   21-14$x$= 25-10$x$+$x^2$,
   $x^2$+4$x$+4=0, $(x+2)^2$=0,

   $x$=-2

   Проверка $\sqrt{21-14\cdot(-2)} = 7$; $5-(-2) = 7$, значит, $x$=-2 – корень уравнения

2) $x$+3=0
   $x$= -3
3) Точки $x$=-2, $x$= -3 разбивают область допустимых значений числовой прямой на интервалы с учетом ОДЗ имеем




$$f(-4) = \frac{5+4-\sqrt{21-14\cdot(-4)}}{-4+3} = \frac{9-\sqrt{77}}{-1} < 0,$$

$$f(-2.5) = \frac{5+2.5-\sqrt{21-14\cdot(-2.5)}}{-2.5+3} = \frac{7.5-\sqrt{56}}{0.5} = \frac{\sqrt{56.25}-\sqrt{56}}{0.5} > 0,$$

$f(0)=\frac{5-\sqrt{21}}{3}>0$,

$x\in(-\infty;-3)\cup\{-2\}$.

**Ответ:** $(-\infty;-3)\cup\{-2\}$.

## №3. Решите неравенство: $2^{1-x}$-$15\cdot 2^{-x-3}$<$(\frac{1}{2})^{11-\sqrt{x^2+3x-18}}$

Решение:

$(\frac{1}{2})^{x-1}$-$15\cdot 2^{-x-3}$<$(\frac{1}{2})^{11-\sqrt{x^2+3x-18}}$

$(\frac{1}{2})^{x-1}$(1-15$\cdot$ $(\frac{1}{2})^{4}$)<$(\frac{1}{2})^{11-\sqrt{x^2+3x-18}}$

$(\frac{1}{2})^{x-1}$(1-$\frac{15}{16}$)<$(\frac{1}{2})^{11-\sqrt{x^2+3x-18}}$

$(\frac{1}{2})^{x-1+4}$<$(\frac{1}{2})^{11-\sqrt{x^2+3x-18}}$

Т.к. фукция вида y=$(\frac{1}{2})^{u}$ - убывает (0<$\frac{1}{2}<1$),

То x+3>11-$\sqrt{x^2+3x-18}$,

$\sqrt{x^2+3x-18}$>8-x.

Полученное неравенство равносильно совокупности 2-х систем неравенств:

1) Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases} 8-x>0 \\ x^2+3x-18>(8-x)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8-x<0, \\ x^2+3x-18>=0. \end{cases}$$

2) Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases} 8-x<0, \\ x^2+3x-18>=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>8 \\ x\in(-\infty;-6]\cup[3;+\infty); \end{cases} \Rightarrow x\in(8;\infty)$$

Решение исходного неравенства найдем из систем:

3) $$\begin{cases} x\in(4\frac{6}{19};8] \\ x\in(8;\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(4\frac{6}{19};\infty).$$

**Ответ:** $(4\frac{6}{19};\infty)$.

**№4. Решите неравенство** $5\cdot 15^x+225\le 45\cdot 5^x+25\cdot 3^x$

**Варианты ответа:**

$а)(-\infty;1]$**;** $б)(-\infty;1]\cup[2;\infty)$**;** $в)[1;2]$; **г)(1;2).**

Решение:

$5\cdot 15^x+225\le 45\cdot 5^x+25\cdot 3^x$

$5\cdot 15^x+225-45\cdot 5^x-25\cdot 3^x\le 0,$

$5\cdot 5^x(3^x-9)-25(3^x-9)\le 0,$

$(3^x-9)(5\cdot 5^x-25)\le 0,$

$5(3^x-9)(5^x-5)\le 0$

$(3^x-9)(5^x-5)\le 0$

I способ. Данное неравенство равносильно совокупности 2-х систем

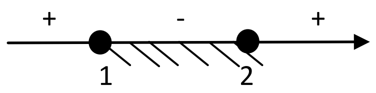
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^x-9\le 0,\\ 5^x-5\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}3^x-9\ge 0,\\ 5^x-5\le 0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2,\\ x\ge 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow x\in[1;2]$$

II способ. Решим неравенство методом интервалов

Рассмотрим функцию $y=(3^x-9)(5^x-5)$

Найдем нули фукции:

Y(x)=0,при x=2 или x=1




$x\in[1;2]$.

**Ответ: в).**

**№5. Решите уравнение 4 $^{x-\sqrt{x^2-5}}$ -12·2 $^{x-1-\sqrt{x^2-5}}$ +8=0.**

Решение:

ОДЗ: $x^2-5\geq 0$, $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})\geq 0, x\in(-\infty;-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5};\infty)$.

$4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12\cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}+8=0$,

$4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12\cdot 2^{-1}\cdot 2^{x-\sqrt{x^2-5}}+8=0$,

$(2^{x-\sqrt{x^2-5}})^2-6\cdot 2^{x-\sqrt{x^2-5}}+8=0$.

Пусть $2^{x-\sqrt{x^2-5}}=t$ ,тогда

$t^2-6t+8=0$

$\frac{Д}{4}=(\frac{-6}{2})^2-8=1$

$t_1=3+1=4$ $\qquad$ $t_2=3-1=2$

Возвращаемся к замене:

$2^{x-\sqrt{x^2-5}}=4$ $\qquad$ или $\qquad$ $2^{x-\sqrt{x^2-5}}=2$

$x-\sqrt{x^2-5}=2^2$ $\qquad$ $x-\sqrt{x^2-5}=1$

$x-\sqrt{x^2-5}=2$ $\qquad$ $x-1=\sqrt{x^2-5}$

$x-2=\sqrt{x^2-5}$ $\qquad$ $(x-1)^2=(\sqrt{x^2-5})^2$

$x^2-4x+4=x^2-5$ $\qquad$ $x^2-2x+1=x^2-5$

$x^2-4x-x^2=-5-4$ $\qquad$ $x^2-2x-x^2=-5-1$

$-4x=-9$ $\qquad$ $-2x=-6$

$x=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}\in$ ОДЗ $\qquad$ $x=3\in$ ОДЗ

так как $2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}=\sqrt{\frac{81}{16}}=\sqrt{5\frac{1}{16}}>\sqrt{5}$.

**Ответ:** $2\frac{1}{4};3$.

**№6. Решите уравнение:** $2^{2x^2-2} - 2^{3-4x} + 7 \cdot 2^{x^2-2x-1} = 0$.

Решение:

$$2^{\;2(x^2-1)} - 2^3 \cdot 2^{-4x} + 7 \cdot 2^{x^2-1} \cdot 2^{-2x} = 0,$$

$$(2^{x^2-1})^2 - 2^3 \cdot (2^{-2x})^2 + 7 \cdot 2^{x^2-1} \cdot 2^{-2x} = 0,$$

Пусть a= $2^{x^2-1}$, b= $2^{-2x}$, $a>0$, $b>0$, тогда

$a^2-8b^2+7ab=0$

$$\frac{a^2}{b^2} - 8\frac{b^2}{b^2} + 7\frac{a}{b} = 0$$

$$\frac{a^2}{b^2} - 8 + 7\frac{a}{b} = 0$$

Пусть $b$ = t, где $t>0$, тогда

$t^2 +7t-8=0$

$D=b^2-4ac$

$D=49+32=81>0$

$t_1 = 1$, $t_2=-8<0$

отсюда $\frac{a}{b}$ =1,

$a = b \Rightarrow 2^{x^2-1} = 2^{-2x} \Rightarrow x^2 - 1 = -2x,$

т. е. $x^2 + 2x - 1 = 0.$

$\frac{D}{4} = 2,$

$x_1=-1+\sqrt{2}$ ,    $x_2=-1-\sqrt{2}$ .

**Ответ: $-1\pm\sqrt{2}$ .**

**№7. Решить неравенство** $\frac{8\cdot 3^{x-2}}{3^x-2^x}$ **>1+** $(\frac{2}{3})^x$ **.**

Решение:

$\frac{8\cdot 3^{x-2}}{3^x-2^ч}>1+(\frac{2}{3})^x$ ; $\frac{8\cdot 3^x\cdot 3^{-2}}{3^x(1-\frac{2^x}{3^x})}>1+(\frac{2}{3})^x$ ;

$\frac{8}{9(1-(\frac{2}{3})^x)}>1+(\frac{2}{3})^x$ ;

Пусть t= $(\frac{2}{3})^x$ , тогда

$\frac{8}{9(1-t)}>1+t$;

$\frac{8}{9(1-t)}-1-t>0$;

$\frac{8-9(1-t)-t(1-t)9}{9(1-t)}>0$;

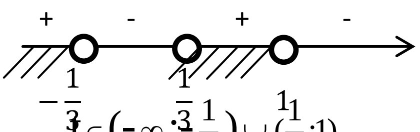
$\frac{8-9+9t-9t+9t^2}{9(1-t)}>0$;

$\frac{9t^2-1}{9(1-t)}>0$;

$\frac{(3t-1)(3t+1)}{9(1-t)}>0$; $\frac{(3t-1)(3t+1)}{1-t}>0$;

Найдем нули числителя и знаменателя дроби:

1) (3t -1)(3t+1)=0
   t=$\frac{1}{3}$ или t=$-\frac{1}{3}$;
2) 1-t=0, t=1.




$t\in(-\infty;\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};1)$ .

$\left[\begin{array}{l} t < -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} < t < 1 \end{array}\right.$. Возвращаемся к замене

1) $(\frac{2}{3})^x < -\frac{1}{3}$ -неверно.
2) $\frac{1}{3}$<t<1, отсюда

$$(\frac{2}{3})^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}} < (\frac{2}{3})^x < (\frac{2}{3})^0.$$

Так как функция вида y=$(\frac{2}{3})^x$ - убывающая (0 <$\frac{2}{3}$<1), то 0<x<$\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}$,

то есть x$\in$(0; $\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}$).

**Ответ: x$\in$(0; $\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}$).**

## №8. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^x - 4\cdot 5^{-x-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}}$.

Решение:

$\left(\frac{1}{5}\right)^x - 4\cdot 5^{-x-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}}$,

$\left(\frac{1}{5}\right)^x - 4\cdot 5^{-1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}}$,

$\left(\frac{1}{5}\right)^x\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right) > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}}$,

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}}$,

Из определения убывающей функции получаем:

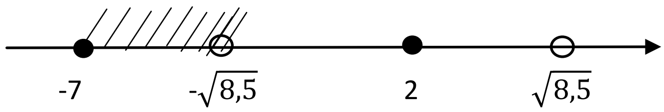
$x+1 < 3-\sqrt{21-4x-x^2}$,

$\sqrt{21-4x-x^2} < 2-x$.

Полученное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 21-4x-x^2 \geq 0, \\ 2-x>0, \\ 21-4x-x^2 < 4-4x+x^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+4x-21 \leq 0, \\ x<2, \\ 2x^2-17>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7;3], \\ x \in (-\infty;2), \\ x \in \left(-\infty;-\sqrt{\frac{17}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{17}{2}};\infty\right) \end{cases}.$$

Воспользуемся методом интервалов




$x \in \left[-7;-\sqrt{8{,}5}\right)$.

**Ответ:** $\left[-\mathbf{7};-\sqrt{\mathbf{8,5}}\right)$**.**

## №9. Решите неравенство $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} \leq x\sqrt{x}+27$ .

Решение:

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \leq x\sqrt{x}+27$$

$$\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3} \leq x\sqrt{x}+27$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}-3 \neq 0 \\ \sqrt{x}+3 \leq x\sqrt{x}+27 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \neq 9 \\ (\sqrt{x}+3)-((\sqrt{x}\ )^3+3^3) \leq 0 \end{array}\right.$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad x \geq 0$$

а) $(\sqrt{x}+3)-((\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9) \leq 0$

$(\sqrt{x}+3)(1-x+3\sqrt{x}-9) \leq 0$

Т.к. $\sqrt{x}+3>0$, то $-x+3\sqrt{x}-8 \leq 0$

$(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+8 \geq 0$

Пусть $\sqrt{x}$ = t,

$t^2 - 3t + 8 \geq 0$

$t^2 - 3t + 8 = 0$

D=9-32<0 – уравнение не имеет корней $\Rightarrow$ $t^2 - 3t + 8 \geq 0$ при $t \in [0, \infty) \Rightarrow$

$-x + 3\sqrt{x} - 8 \leq 0 \Rightarrow$ при $x \in [0;9) \cup (9;\infty)$.

**Ответ: $x \in [0;9) \cup (9;\infty)$.**

## №10. Решите неравенство $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \leq x\sqrt{x} + 8$.

Решение:

$$\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} \leq x\sqrt{x} + 8$$

$$\begin{cases} x \neq 4 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 2 \leq x\sqrt{x} + 8 \end{cases}$$

а) $\sqrt{x}$ +2-(($\sqrt{x}$ $)^3$ +$2^3$) $\leq 0$

($\sqrt{x}$ +2)-($\sqrt{x}$ +2)(x-2$\sqrt{x}$ +4) $\leq 0$

($\sqrt{x}$ +2)(1-x+2$\sqrt{x}$ -4) $\leq 0$

Т.к $\sqrt{x}$ +2>0 , то

-x+2$\sqrt{x}$ -3 $\leq 0$

x-2$\sqrt{x}$ +3 $\geq 0$

$(\sqrt{x})^2$ -2$\sqrt{x}$ +3 $\geq 0$

Пусть $\sqrt{x}$ =t,

$t^2$ - 2t + 3 $\geq 0$

$t^2$ - 2t + 3=0

D=4-12<0 – уравнение не имеет корней , поэтому

$t^2$ - 2t + 3>0 при $t \in [0, \infty)$, а

$(\sqrt{x})^2$ -2$\sqrt{x}$ +3 $\geq 0$

$x \geq 0$; но с учетом ОДЗ

$x \in [0;4) \cup (4;\infty)$

**Ответ:** $\mathbf{x} \in [0;4) \cup (4;\infty)$.

## Раздел IV. Задачи по геометрии и их решение.

**Задача №1**

**В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки D до плоскости $(CAD_1)$.**

Дано:

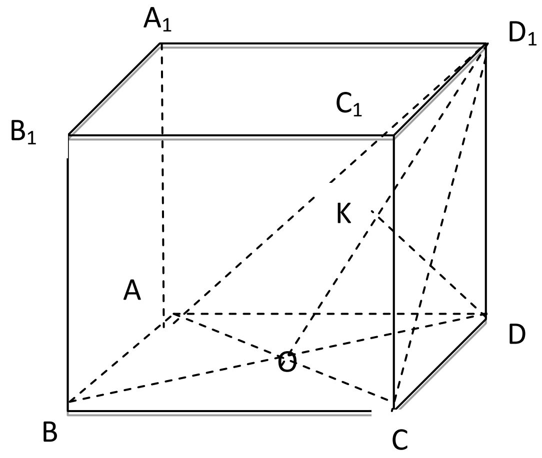
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

BC=1

Определить:

$\rho(D, (CAD_1))$

Решение:




$\rho$ (D; $(CAD_1)$) = DK ($DK \perp OD_1$)

***I способ***. Работаем по формуле $h=\frac{ab}{c}$, т.к. $\Delta OD_1D$ – прямоугольный

$D_1D=1$; $OD = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $OD_1 = \sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ из $\Delta ODD_1$ - прямоугольного

$KD = \frac{OD * DD_1}{OD_1}$, $KD = \frac{1*\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

***II способ.*** 1) $\Delta$ $ODD_1$ – прямоугольный

$\sin\angle D_1OD = \frac{DD_1}{OD_1}$; $DD_1 = 1$; $OD=\frac{1}{2}\cdot BD=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$OD_1 = \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\sin D_1OD = 1 : \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2) $\Delta OKD$ - прямоугольный

KD=OD sin KOD

$KD = \dfrac{\sqrt{2}}{2} * \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ : $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

## Задача №2

**В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AD и $CA_1$.**

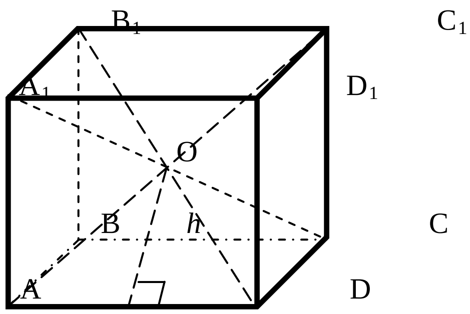
Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$- куб

AB=1.

Определить: $\rho$ (AD,$CA_1$)

Решение:




1)AD и $CA_1$-скрещивающиеся прямые. За расстояние между скрещивающимися прямыми принимают расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью , проходящей через другую прямую, параллельно первой . Но ($A_1AC$) не параллельна AD. В этом случае расстояние между скрещивающимися прямыми – это расстояние от точки одной прямой до другой, т.е. это длина перпендикуляра от точки одной прямой до другой. За данную точку удобно взять точку пересечения диагоналей плоскости $A_1AC$, т.е. точку O, O- точка пересечения всех диагоналей куба (проведем $B_1D$).

2) $\rho$ (AD; $A_1C$)= $\rho$ (O; AD)= OK, т.к. OK $\perp$ AD.

$\triangleleft$ AOD- равнобедренный, OK-высота, медиана и биссектриса $\triangleleft$ AOD.

OK=$\sqrt{AO^2 - AK^2}$, AO=$\dfrac{1}{2}AC_1$, $AC_1$=$A_1C$=$B_1D$=$\sqrt{3}$, AO=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ , AK=$\frac{1}{2}$; OK=$\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\rho(AD; A_1C)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## Задача №3

**В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра 3, найдите расстояние между прямыми $AA_1$ и $BC_1$.**

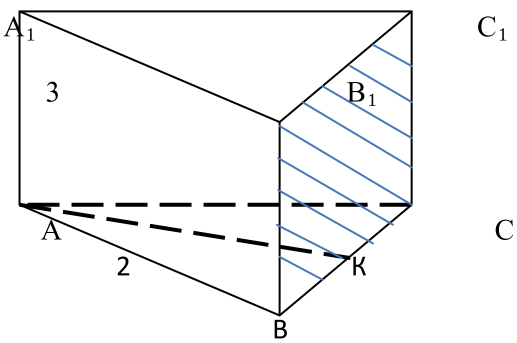
Дано:

$ABCA_1B_1C_1$- правильная треугольная призма

AB=2, $AA_1$ =3;

Определить: $\rho$ ($AA_1$;$BC_1$)

Решение:




1)$AA_1$, $BC_1$- скрещивающиеся прямые. За расстояние между скрещивающимися прямыми принимают расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую, параллельно первой.

$AA_1 \parallel (B_1BC)$.

2) $\rho$ ($AA_1$; $BC_1$) = $\rho$ ($AA_1$; ($BB_1C_1$))=AK, где AK $\perp$ ($BB_1C$), т.к

а) $B_1B \perp$ (ABC)=〉 BB $\perp$ AK;

б) AK $\perp$ BC.

3)AK=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ , где a=2, т.к. $\triangle ABC$ -правильный.

AK=$\sqrt{3}$, значит, $\rho$ ($AA_1$, $BC_1$)= $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

## Задача №4

**В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой $AC_1$ и плоскостью $BB_1C_1$.**

Дано:

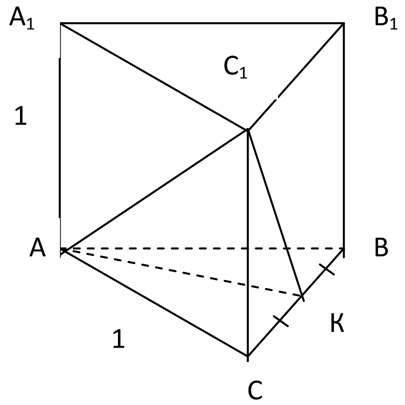
$ABCA_1B_1C_1$-правильная треугольная призма

$AA_1=1$

$AC=1$

Определить cos $(AC_1;(BB_1C_1))$

Решение:




1) Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость

   $AK \perp BC \Rightarrow$ $C_1K$ – проекции $AC_1$ на $(BCC_1)$ $\angle(AC_1;(BCC_1)) = \angle(AC_1; C_1K) = \angle AC_1K$.

2) Косинус угла AC1K можно найти по теореме косинусов:

   $AK^2=AC_1^{\,2}+C_1K^2-2AC_1*C_1K\cos AC_1K$.

   а) $AK=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ из правильного $\Delta ABC$ по формуле $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

   б) $AC1=\sqrt{2}$ из прямоугольного $\Delta ACC_1$;

   в) $C_1K=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ из прямоугольного $\Delta C_1CK$.

   $\dfrac{3}{4}=2+\dfrac{5}{4}-2\sqrt{2}*\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cos AC_1K$;

   $\cos AC_1K=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$, значит, $\cos(AC_1;(BB_1C_1)))=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

   Ответ : $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

**Задача №5**

**Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $2\sqrt{13}$, а диагональ боковой грани равна 13. Найдите угол между плоскостью $C_1AB$ и плоскостью основания призмы.**

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма

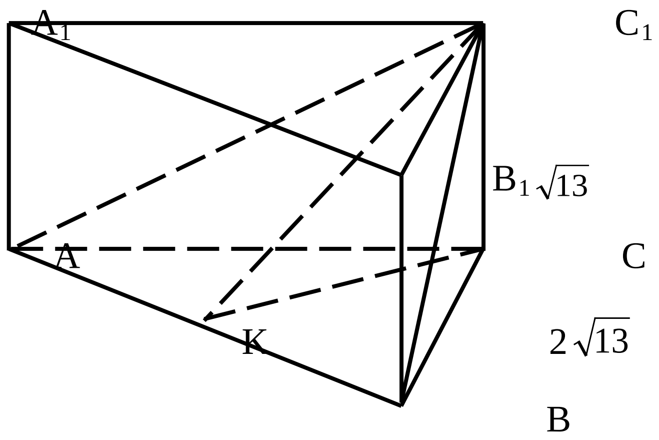
$AB=2\sqrt{13}$

$BC_1=13$

Определить:

$\angle((C_1AB);(ABC))$.

Решение:




1) Угол между двумя плоскостями $C_1AB$ и $ABC$ с их общей границей называют двугранным углом. $\angle C_1ABC$ – двугранный. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

$\angle((C_1AB);(ABC))= \angle C_1KC$, т.к. $CK\perp AB$, $CK$ – проекция $C_1K$, поэтому $C_1K\perp AB$.

2)Рассмотрим $\Delta C_1KC$ – прямоугольный и найдем tg $C_1KC = \dfrac{C_1C}{KC}$.

$C_1C=\sqrt{13^2-(2\sqrt{13})^2} = \sqrt{169-52} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ из прямоугольного $\Delta BC_1C$.

$KC=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$; $KC=\dfrac{2*\sqrt{13}*\sqrt{3}}{2} = \sqrt{13}*\sqrt{3}$ - из правильного $\Delta ABC$.

tg $C_1KC = \dfrac{3*\sqrt{13}}{\sqrt{13}*\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$;

$\angle C_1KC = 60^o \Rightarrow \angle((C_1AB); (ABC))=60^o$

Ответ:$60^o$.

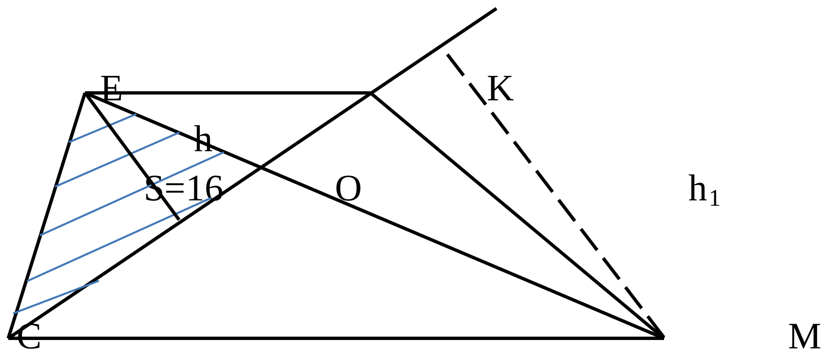
**Задача №6**

**Диагонали трапеции СЕКМ (ЕК и СМ – основания) пересекаются в точке О. Площадь треугольника СОЕ равна 16, СО = 2 ОК. Найдите площадь трапеции.**

Дано:
СЕКМ – трапеция
ЕК, СМ – основания
$CK \cap EM = O$
$S_{\Delta COE} = 16$
СО=2ОК

Определить:
$S_{трапеции}$

Решение:




1)$S_{\Delta COE} = \frac{1}{2} CO*h$, $S_{\Delta COE} = 16$, $OK = \frac{1}{2} CO$

2)$S_{\Delta EOK} = \frac{1}{2} OK*h = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} *CO*h = \frac{1}{4} *CO*h = \frac{1}{2} *16 = 8$, где h – высота $\Delta COE$ и $\Delta EOK$.

3) $\Delta EOK$ подобен $\Delta MOC$ по 2 углам ($\angle EOK = \angle COM$, как вертикальные, $\angle OEK = \angle OMC$, как накрест лежащие при ЕК ||СМ и секущей ЕМ) с коэффициентом подобия

$$\kappa = \frac{OK}{CO} = \frac{OK}{2OK} = \frac{1}{2};$$

$\frac{S_{\Delta EOK}}{S_{\Delta MOC}} = \kappa^2$, поэтому $\frac{S_{\Delta EOK}}{S_{\Delta MOC}} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, следовательно, $\frac{8}{S_{\Delta MOC}} = \frac{1}{4}$; $S_{\Delta MOC} = 32$.

4)$S_{\Delta KOM} = \frac{1}{2} h_1 * OK = \frac{1}{2} * h_1 * \frac{1}{2} CO = \frac{1}{2} S_{\Delta MOC} = 16$, т.к. $h_1$ – высота $\Delta MOC$ и $\Delta KOM$.

5) $S_{трап} = 16+8+32+16 = 72$.

Ответ: 72.

## Задача №7

**Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является прямоугольник ABCD, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$. Высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину $D_1$ и середины ребер AD и CD. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.**

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$-прямая призма

ABCD- прямоугольник

DC=$6\sqrt{5}$

BC= $12\sqrt{5}$

$DD_1$=8

M-середина DA

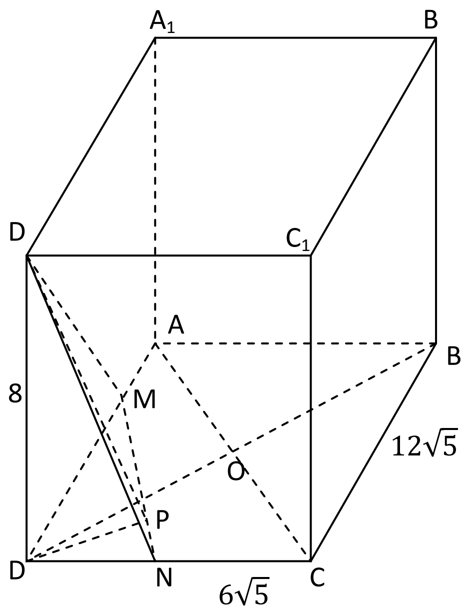
N-середина DC

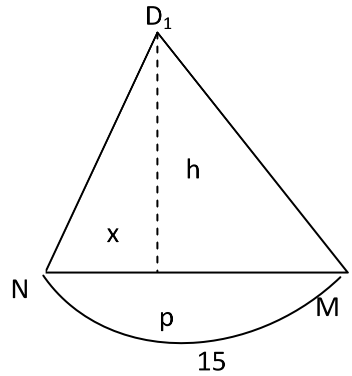
($D_1NM$)-секущая

Определить

cos ((ABC),($D_1NM$)).

Решение:




Заметим, что cos ((ABC),($D_1NM$))= cos $D_1PD$= cos$\varphi$, где $D_1P \perp$ NM, DP$\perp$ NM, $\angle D_1PD$ - линейный угол двугранного $\angle D_1NMD$.

1) DB=AC=$\sqrt{(6\sqrt{5})^2+(3\sqrt{5})^2}$ =30, NM=15, $D_1P$=h, P$\notin$ DB. NP$\neq$ PM.
2) а) $ND_1=\sqrt{8^2+(3\sqrt{5})^2}=\sqrt{109}$ из $\Delta D_1DN$-прямоугольного.

   б) $MD_1=\sqrt{8^2+(6\sqrt{5})^2}=\sqrt{244}$ из $\Delta D_1DM$- прямоугольного.

3) $\Delta ND_1M$, NP=x, тогда

   $109-x^2=244-(15-x)^2$,

   $109-x^2=244-225+30x-x^2$,

   x=3, т.е. NP=3.

4) h=$D_1P=\sqrt{(\sqrt{109})^2-3^2}$ =10 из $\Delta$DNP - прямоугольного

5) $\sin\varphi=\dfrac{DD_1}{D_1P}$; $\sin\varphi=\dfrac{8}{10}=0.8$

6) $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}$ из $\Delta D_1DP$; $\cos\varphi$=0,6

**Ответ:** cos ((ABC),($D_1NM$)) =0,6.

**Задача №8**

**Трапеция ABCD вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.**

Дано:

ABCD – трапеция, вписанная

в окружность,

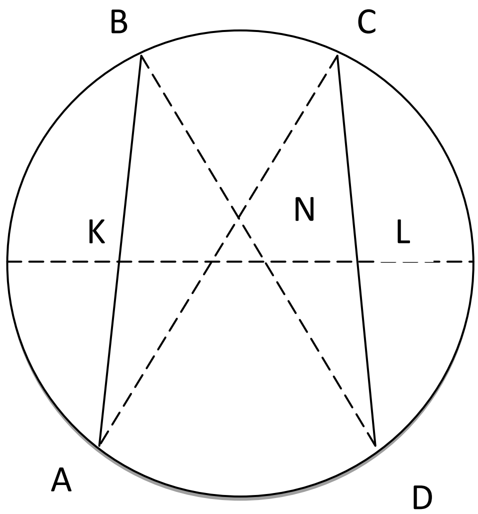
AD=15,

sin ABD=$\frac{5}{9}$

Определить:

Среднюю линию трапеции

Решение:




1) ABCD - равнобедренная трапеция.
   а) $\triangle$ABN=$\triangle$DCN по 2 признаку равенства треугольников (AB=CD; $\angle$BAC=$\angle$BDC, как вписанные, опирающиеся на дугу BC ; аналогично,
   $\angle$ ABD=$\angle$ACD). Следовательно, BN=NC, AN=ND.
   б) $\triangle$BCN $\backsim$ $\triangle$DAN, т.к. $\angle$BNC=$\angle$AND, как вертикальные, и $\frac{ND}{NC}=\frac{AN}{NB}$
   .

2) По теореме синусов:

$$\frac{ND}{\sin NCD}=\frac{NC}{\sin NDC};\ \frac{ND}{NC}=\frac{\sin NCD}{\sin NDC};\ \frac{ND}{NC}=\frac{\frac{5}{9}}{\frac{1}{3}};\ \ \frac{ND}{NC}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{ND}{BN}=\frac{5}{3}.$$

3) $\frac{BC}{AD}=\frac{BN}{ND}=\frac{NC}{AN}$; $\frac{BC}{AD}=\frac{3}{5}$, но AD=15 , поэтому $\frac{BC}{15}=\frac{3}{5}$; BC=9.

4) Найдем среднюю линию трапеции ABCD.

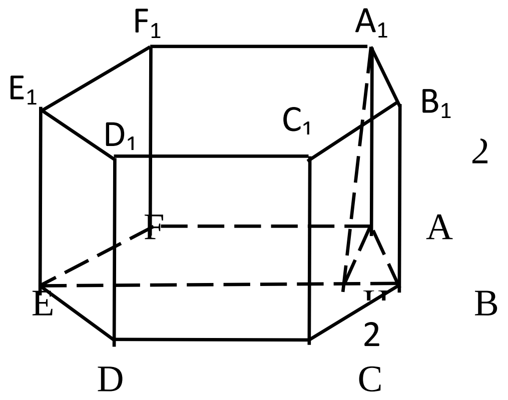
KL=$\frac{BC+AD}{2}$; KL=$\frac{15+9}{2}$= 12.

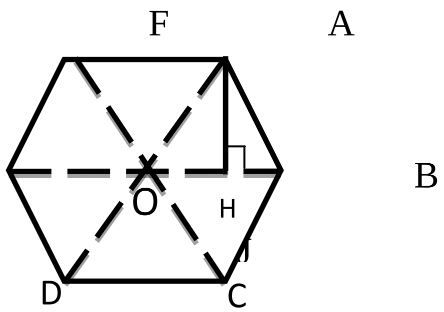
Ответ: средняя линия трапеции равна 12.

**Задача №9**

**В правильной 6-угольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , все ребра которой равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой $A_1F_1$.**

Решение:




1) $\rho$(B,$A_1F_1$)=$\rho$(BE,$A_1F_1$), где BE||$A_1F_1$,B$\in$BE, т.к. BE||AF, AF||$A_1F_1$.

2) $A_1H\perp BE$, поэтому $\rho$(BE,$A_1F_1$)=$A_1H$.

3)$\Delta A_1AH$ – прямоугольный. $A_1H = \sqrt{AA_1^{\,2}+AH^2}$ , где AH – проекция $A_1H$ на плоскость.

4) а) $\Delta$AHB – прямоугольный, sin60° = $\frac{AH}{AB}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{AH}{2}$; AH = $\sqrt{3}$

Или

б) $\Delta$OAB – равносторонний. AH (высота) = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; AH = $\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

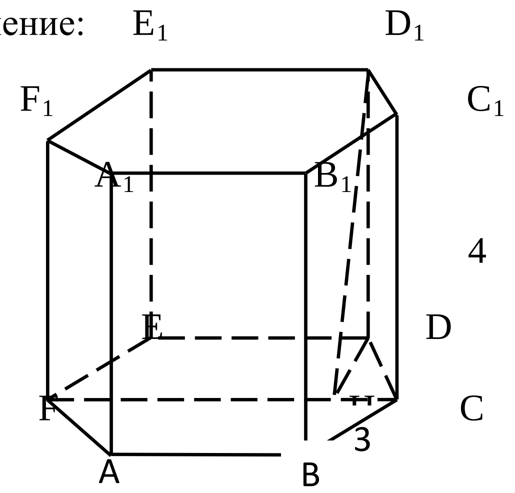
Значит, $A_1H = \sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$.

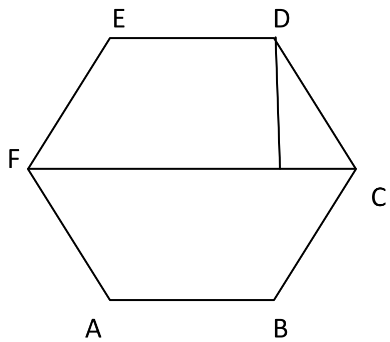
Ответ: $\sqrt{7}$.

### Задача №10

**В правильной 6-угольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые ребра 4, найдите расстояние от точки C до прямой $E_1D_1$.**

Решение:



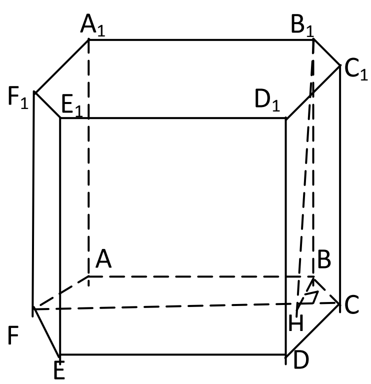

За расстояние от C до $E_1D_1$ берем расстояние между $E_1D_1$ и FC, $\rho(E_1D_1;FC) = D_1H$, где

$D_1H \perp FC$.

### Задача №11

**В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые ребра равны 3, найдите расстояние от точки C до прямой $A_1B_1$.**

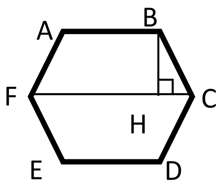
Решение:




1) Расстояние от точки до прямой есть расстояние между двумя параллельными прямыми, на одной из которых лежит точка.

$(A_1B_1 \parallel AB,\ AB \parallel FC) \Rightarrow A_1B_1 \parallel FC.$ $\rho(C;\ A_1B_1) = \rho(FC; A_1B_1) = B_1H$, где $B_1H \perp A_1B_1$.

2) $\Delta B_1HB$ – прямоугольный. $B_1H = \sqrt{B_1B^2 + BH^2}$ , BH из $\Delta BHC$ – прямоугольного (BH – проекция $B_1H$).




$60^0$

$\sin 60^0 = \dfrac{HB}{BC}$ ; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{HB}{4}$; HB=$2\sqrt{3}$. $B_1H = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+12} = \sqrt{21}$.

Ответ: $\sqrt{21}$.

## Задача №12

**В правильной четырехугольной пирамиде MABCD с вершиной M, стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC, параллельно прямой BD.**

Дано:

MABCD-правильная пирамида.

DC=6; MC=5.

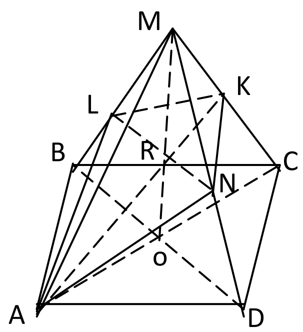
K-середина MC

Определить:

$S_{сеч}$, проходящего через A и K,

параллельно BD.

Решение:




1)$S_{сеч} = \frac{1}{2}$ RK*LN+$\frac{1}{2}$ AR*LN= $\frac{1}{2}$ LN( RK+AR) = $\frac{1}{2}$ LN*AK;

2) $\Delta$AMC; OM, AK-медианы. AK=AR+RK; RK= $\frac{1}{2}$AR, из $\Delta$AOR – прямоугольного. AR= $\sqrt{AO^2 + OR^2}$ , AO=$\frac{1}{2}$AC; OR=$\frac{1}{3}$OM; AC=$\sqrt{6^2+6^2}$ =$6\sqrt{2}$; AO=$3\sqrt{2}$

OM=$\sqrt{MC^2 - OC^2}$ ; OM=$\sqrt{5^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{25-18} = \sqrt{7}$ ; OR=$\frac{1}{3}\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

AR= $\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{3})^2}$ = $\sqrt{18+\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{18*9+7}}{3}=\frac{13}{3}\Rightarrow$ RK= $\frac{1}{2}*\frac{13}{3}=\frac{13}{6}$; AK=

$\frac{13}{3}+\frac{13}{6}=\frac{39}{6}=\frac{13}{2}$;

3) $\Delta$LNM подобен $\Delta$BDM по двум углам; K= $\frac{2}{3}$ (MO – медиана, AK–медиана из $\Delta$AMC,

$\frac{MK}{MO}=\frac{2}{3}$)

LN= $\frac{2}{3}$ BD, т.е. LN= $\frac{2}{3}$ $*6\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ ;

4) $S_{сеч}$= $\frac{1}{2}*\frac{13}{2}*4\sqrt{2}=13\sqrt{2}$ ;

Ответ: $S_{сеч}$= $13\sqrt{2}$ .

## Задача №13

**В правильной четырехугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые ребра 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью проходящей через точку B и середину ребра MD, параллельно прямой AC.**

Дано:

MABCD-правильная пирамида.

BC=3; MD=8

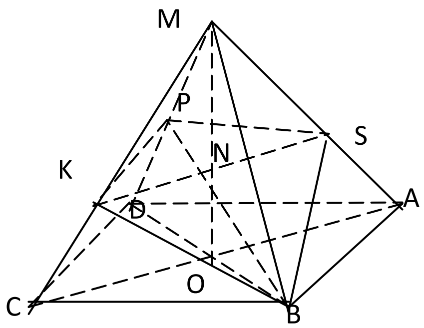
P-середина MD

Секущая плоскость

параллельна ФС

Определить: $S_{сеч}$

Решение




1)Сечение правильной пирамиды – KPSB, где KB=B S из равенства треугольников CKB и ASB, аналогично, KP=PS. PM- высота (медиана)равнобедренного треугольника $\Delta$KPS, BM- высота(медиана) $\Delta$KBS, т.е. PM$\perp$KS и BM$\perp$KS.

$S_{сеч}$= $\frac{1}{2}$ KS*PM+ $\frac{1}{2}$ KS*BM= $\frac{1}{2}$ KS*PB;

2) KS||AC по условию; В $\Delta$DMB MO-медиана, BP-медиана, т.е. NO= $\frac{1}{3}MO, MN=\frac{2}{3}MO$;

$\Delta$KMS подобен $\Delta$CMA с K=$\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ KS=$\frac{2}{3}$AC; AC=$\sqrt{3^2+3^2}$ $=3\sqrt{2}$; KS=$\frac{2}{3}*3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$;

3) MO=$\sqrt{8^2-OB^2}=\sqrt{64-(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{64-\frac{9*2}{4}}=\frac{\sqrt{256-18}}{2}=\frac{\sqrt{238}}{2}; NO=\frac{\sqrt{238}}{6}$;

OB=$\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

4) NB=$\sqrt{OB^2+ON^2}$;

NB=$\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{238}}{6})^2}=\sqrt{\frac{9*2}{4}+\frac{238}{36}}=\frac{\sqrt{162+238}}{6}=\frac{\sqrt{400}}{6}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$;

PN=$\frac{1}{2}NB; PN=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$, $т.к$ BP-медиана $\Delta$DMB; PB=$\frac{10}{3}+\frac{5}{3}=5$;

5)$S_{сеч}$=$\frac{1}{2}*2\sqrt{2}*5=5\sqrt{2}$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

## Раздел V. Задачи для самостоятельного решения.

1) Тригонометрические уравнения.

Решите уравнение:

1. $\sin\left(4x = \frac{\pi}{3}\right) + cos2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $\sin\left(6x = \frac{\pi}{4}\right) + sin3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Логарифмические уравнения.

Решите уравнение:

1. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{15}}(3x^2-2)} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} 5x} - \frac{1}{1-\log_{\frac{1}{5}} x}$;
2. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(3x^2-32)} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} 4x} - \frac{1}{1-\log_{\frac{1}{4}} x}$;
3. $\log_{(2x^2-22)} 14 = \frac{1}{\log_2 7x} + \frac{1}{\log_7 x+1}$;
4. $\log_{(3x^2-96)} 18 = \frac{1}{\log_9 2x} + \frac{1}{1+\log_2 x}$;
5. Найдите все значения $x$, при каждом из которых выражения
   $6x\log_2 \sqrt[3]{2-5x} + 5x^2 \log_{\frac{1}{2}}(2-5x)$ и $5x^2 - 2x$
   принимают равные значения.

3) Показательные неравенства.

Решите неравенство:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 6 \cdot 3^{-x-1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2-\sqrt{16-6x-x^2}}$;
2. $3^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}-4}$;
3. $6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} + 5 \cdot 2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\sqrt{20+8x-x^2}}$;
4. $5^{-x-1} + 24 \cdot 5^{-x-3} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x^2+3x-28}-7}$;

4) Геометрические задачи.

1. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC, в котором $AC = 10, \sin C = 0{,}2$. Высота призмы равна 17. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью $A_1BC$.
2. Высота ромба ABCD равна $3\sqrt{5}$, косинус угла A равен $\frac{2}{3}$, высота BH пересекает диагональ AC в точке M. Найдите длину отрезка $BM$.

3. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$- правильный треугольник ABC, сторона которого равна $8\sqrt{3}$. На ребре $BB_1$ отмечена точка P так, что $BP:PB_1 = 3:5$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP, если расстояние между прямыми BC и $A_1C_1$ равно 16.
4. В правильной четырехугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые ребра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.
5. В правильной четырехугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые ребра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.
6. В правильной четырехугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны $\frac{9}{2}$, а боковые ребра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.
7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостямиABD и $CAD_1$.
8. Высота прямоугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4. Основание призмы – треугольник ABC, в которой $AB = BC$ , $AC = 6$, $\text{tg}A = 0{,}5$. Найдите тангенс угла между прямой $A_1B$ и плоскостью $ACC_1$.
9. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF со стороной 2 и боковым ребром 3 точка M делит ребро SD в отношении 1:2 (считая от вершины S). Найдите угол между прямой BM и плоскостью AEC.

## Ответы к задачам для самостоятельного решения.

| **Задание** | **Ответ** | **Задание** | **Ответ** |
|---|---|---|---|
| 1.1 | $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi n;$<br>$x = \frac{5}{12}\pi + \pi k; n, k \in Z.$ | 1.2 | $x = \frac{1}{3}\pi n;\ x = \frac{5}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi k;$<br>$x = \frac{13}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi k; n, k \in Z.$ |
| 2.1 | $x = 2$ | 2.2 | $x = 4$ |
| 2.3 | $x = 5{,}5$ | 2.4 | $x = 6$ |
| 2.5 | $x = 0; 0{,}3$ | 3.1 | $x \in \left[-8;\ -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{2}}; 2\right]$ |
| 3.2 | $x \in (-\infty;\ 2] \cup \left[5; \frac{59}{11}\right)$ | 3.3 | $x \in [-2;\ -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 10]$ |
| 3.4 | $x \in \left[-\frac{128}{17};\ -7\right] \cup [4; \infty)$ | 4.1 | 8,5 |
| 4.2 | 3 | 4.3 | $\frac{1}{2}$ |
| 4.4 | $10\frac{2}{3}$ | 4.5 | $85\sqrt{2}$ |
| 4.6 | $11,25\sqrt{2}$ | 4.7 | $\sqrt{2}$ |
| 4.8 | 0,3 | 4.9 | $arctg\frac{\sqrt{65}}{13}$ |

# Список литературы


1. Заочный курс абитуриента Всероссийская школа математики и физики «Авангард».
2. Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. Математика. Экзаменационные тесты, профильный уровень. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ. М: Издательство «Экзамен», 2015г.
3. Варианты заданий по математике на вступительных экзаменах в РЭА им. Г. В. Плеханова в 2005г.
4. Методические указания для поступающих в Санкт- Петербургский государственный институт (технический университет).
5. Математика. 50 типовых вариантов для подготовки к ЕГЭ 2010-2011 уч.г.
6. Типовые тестовые задания 2003, 2008, 2011, 2013 гг.