Досрочный ЕГЭ-2018 по математике профильного уровня

13. а) Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x.$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

Решение.

а) ОДЗ: $3 - x \geq 0$, $x \leq 3$. Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x^3 - 4x^2 - 10x + 29 = x^2 - 6x + 9,$$

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0,$$

$$x^2(x - 5) - 4(x - 5) = 0,$$

$$(x - 5)(x^2 - 4) = 0,$$

$$(x - 5)(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2, \\ x = 5. \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ остаются только числа $x = -2$ и $x = 2$. Очевидно, $x = 2$ принадлежит указанному промежутку. Остается сравнить:

$$-2 \vee -\sqrt{3}, \qquad \sqrt{3} \vee 2, \qquad 3 < 4, \qquad -2 < -\sqrt{3}.$$

Ответ: а) –2, 2; б) 2.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

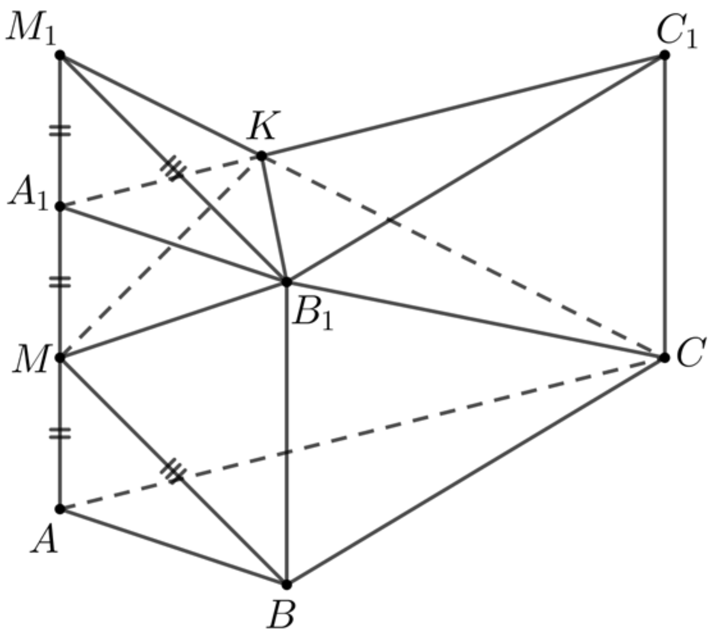
Решение.

а) На прямой AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1M_1 = A_1M = MA = 1$. Из прямоугольного треугольника M_1AC:

$$M_1C = \sqrt{AM_1^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Из прямоугольного треугольника $A_1M_1B_1$:

$$M_1B_1 = \sqrt{A_1M_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$



Из прямоугольного треугольника BB_1C:

$$B_1C = \sqrt{BB_1^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}.$$

Проверим теперь выполнение теоремы Пифагора для треугольника B_1M_1C:

$$M_1B_1^2 + B_1C^2 = 5 + 8 = 13 = M_1C^2,$$

что и требовалось доказать.

б) Поскольку $MB \parallel (M_1B_1C)$, то расстояние от прямой MB до прямой B_1C будем находить как высоту пирамиды MM_1B_1K, проведенную к грани M_1B_1K.

Из подобия треугольников AM_1C и A_1MK следует, что

$$M_1K = \frac{1}{3}M_1C = \frac{\sqrt{13}}{3}, \qquad A_1K = \frac{1}{3}AC = \frac{2}{3}.$$

По теореме косинусов для треугольника B_1A_1K:

$$B_1K = \sqrt{A_1K^2 + A_1B_1^2 - 2 \cdot A_1K \cdot A_1B_1 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9} + 4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

По теореме косинусов для треугольника M_1B_1K:

$$\cos\angle B_1M_1K = \frac{M_1B_1^2 + M_1K^2 - B_1K^2}{2 \cdot M_1B_1 \cdot M_1K} = \frac{5 + \frac{13}{9} - \frac{28}{9}}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{5}{\sqrt{65}}.$$

$$\sin\angle B_1M_1K = \sqrt{1 - \cos^2\angle B_1M_1K} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{65}}.$$

Тогда:

$$V_{MM_1B_1K} = V_{MA_1KB_1} + V_{M_1A_1KB_1} = 2V_{MA_1KB_1} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot S_{A_1B_1K} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

$$h = \frac{3V_{MM_1B_1K}}{S_{M_1B_1K}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{65}} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) $\sqrt{30}/5$.

15. Решите неравенство

$$3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3.$$

Решение.

Умножим обе части неравенства на 5:

$$3^{x^2} \cdot 5^{x} \geq 15.$$

Логарифмируем обе части неравенства по основанию $3 > 1$, знак неравенства не меняется:

$$\log_3\left(3^{x^2} \cdot 5^{x}\right) \geq \log_3 15,$$

$$\log_3 3^{x^2} + \log_3 5^{x} - 1 - \log_3 5 \geq 0,$$

$$x^2 + x\log_3 5 - (1 + \log_3 5) \geq 0,$$

$$D = \log_3^2 5 + 4\log_3 5 + 4 = (\log_3 5 + 2)^2,$$

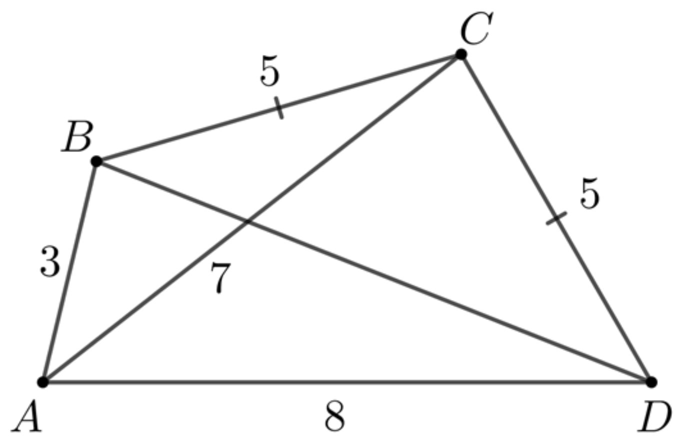
$$x_1 = \frac{-\log_3 5 + \log_3 5 + 2}{2} = 1, \qquad x_2 = -1 - \log_3 5.$$

Ответ: $(-\infty; -1 - \log_3 5] \cup [1; +\infty)$.

16. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

а) Докажите, что вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

б) Найдите *BD*.



Решение.

а) По теореме косинусов для треугольников *ABC* и *ADC*:

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} =$$

$$= \frac{9 + 25 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 7} = -\frac{1}{2},$$

$$\angle ABC = 120°, \qquad \cos\angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2 \cdot AD \cdot CD} = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2},$$

$$\angle ADC = 60°,$$

значит в *ABCD* можно вписать окружность.

б) Поскольку $\angle B + \angle D = 180° = \angle A + \angle C$, то $\cos\angle BAD = -\cos\angle BCD$.

$$AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD = BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos\angle BAD,$$

$$9 + 64 - 48x = 25 + 25 + 50x,$$

$$\cos\angle BAD = \frac{23}{98}, \qquad BD = \sqrt{73 - \frac{552}{49}} = \frac{55}{7}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) 55/7.

17. В регионе *A* среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе *B* среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60000 рублей. В течение трех лет суммарный доход жителей региона *B* увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на *m*% ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах *A* и *B* стал одинаковым. Найдите *m*.

Решение.

Понятно, если a – население региона *A*, а b – население региона *B* в 2014-м году, то среднемесячный доход сокращает эти величины, поэтому население самих регионов в задаче не фигурирует. Важен лишь коэффициент увеличения населения региона *B*.

Коэффициент роста населения региона *B* в 2015, 2016 и 2017 годах:

$$\left(1 + \frac{m}{100}\right), \qquad \left(1 + \frac{m}{100}\right)^2, \qquad \left(1 + \frac{m}{100}\right)^3.$$

Тогда среднемесячный доход на душу населения региона *B* в течение тех же трёх лет:

$$\frac{60000 \cdot (1 + 0{,}17)}{1 + \frac{m}{100}}, \qquad \frac{60000 \cdot (1 + 0{,}17)^2}{\left(1 + \frac{m}{100}\right)^2}, \qquad \frac{60000 \cdot (1 + 0{,}17)^3}{\left(1 + \frac{m}{100}\right)^3}.$$

Среднемесячный доход на душу населения региона *A* в течение четырех лет:

$$43740, \qquad 43740(1 + 0{,}25), \qquad 43740(1 + 0{,}25)^2, \qquad 43740(1 + 0{,}25)^3.$$

По условию задачи:

$$43740(1+0{,}25)^3 = \frac{60000\cdot(1+0{,}17)^3}{\left(1+\frac{m}{100}\right)^3},$$

$$1+\frac{m}{100} = \sqrt[3]{\frac{6000}{4374}}\cdot\frac{1{,}17}{1{,}25},$$

$$1+\frac{m}{100} = \sqrt[3]{\frac{1000}{729}}\cdot\frac{1{,}17}{1{,}25},$$

$$1+\frac{m}{100} = \frac{10}{9}\cdot\frac{1{,}17}{1{,}25}, \qquad m=4.$$

Ответ: 4.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy=a^2-3a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения?

Решение.

Отметим, что при $x=0$ условие задачи не выполняется ни при каком значении a. Также при $a=0$ или $a=3$ условие задачи не выполняется ни при каком x и y.

Тогда первый график задает окружность с центром в начале координат и радиусом, равным $|a|$, а второй график

$$y=\frac{a^2-3a}{x}$$

задает гиперболу. Две общие точки окружность и гипербола имеют только при касании, причем эти точки касания принадлежат либо прямой $y=x$, либо прямой $y=-x$. Рассмотрим случай касания в первой координатной четверти, угловой коэффициент касательной равен (-1).

$$y=\sqrt{-x^2+a^2}, \qquad y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{-x^2+a^2}}=\frac{-x}{\sqrt{-x^2+a^2}}=-1,$$

$$\sqrt{-x^2+a^2}=x, \qquad -x^2+a^2=x^2, \qquad x^2=\frac{a^2}{2}.$$

$$y=\frac{a^2-3a}{x},\qquad y'=\frac{-a^2+3a}{x^2}=-1,\qquad x^2=a^2-3a.$$

Тогда

$$\frac{a^2}{2}=a^2-3a,\qquad a_1=0,\qquad a_2=6.$$

Оставляем только $a=6$.

Пусть теперь касание происходит во второй координатной четверти. Тогда угловой коэффициент касательной равен 1.

$$=\frac{a^2-3a}{x},\qquad y'=\frac{-a^2+3a}{x^2}=1,\qquad x^2=-a^2+3a.$$

$$-a^2+3a=\frac{a^2}{2},\qquad a_1=0,\qquad a_2=2.$$

Оставляем только $a=2$.

Ответ: 2, 6.

19. а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\le\frac{1}{100}?$$

б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что

$$\left|\frac{m^2}{n^2}-2\right|\le\frac{1}{10000}?$$

в) Найдите все возможные значения натурального числа n, при каждом из которых значение выражения

$$\left|\frac{n+10}{n}-\sqrt{2}\right|$$

будет наименьшим.

Решение.

а)

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\le\frac{1}{100}\Leftrightarrow-\frac{1}{100}\le\frac{m}{n}-\sqrt{2}\le\frac{1}{100},$$

$$-0{,}01-\frac{m}{n}\le-\sqrt{2}\le0{,}01-\frac{m}{n},$$

$$\frac{m}{n}-0{,}01\le\sqrt{2}\le\frac{m}{n}+0{,}01.$$

Известно, что $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. В самом деле,

$$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 1{,}42^2 = 2{,}0164,$$

откуда $m = 71$, $n = 50$, $\frac{m}{n} = 1{,}42$.

б) Умножим обе части на $n^2 > 0$. После преобразований получим:

$$-\frac{n^2}{100^2} \le m^2 - 2 \le \frac{n^2}{100^2}.$$

По условию числа n и m натуральные двузначные, поэтому имеет место оценка

$$-1 < m^2 - 2 < 1, \qquad 1 < m^2 < 3,$$

которая показывает отсутствие подходящих m.

в) Заметим, что

$$1 + \frac{10}{24} \vee \sqrt{2}, \qquad 34 \vee 24\sqrt{2}, \qquad 1156 > 1152, \qquad 1 + \frac{10}{24} > \sqrt{2},$$

$$1 + \frac{10}{25} \vee \sqrt{2}, \qquad 7 \vee 5\sqrt{2}, \qquad 49 < 50, \qquad 1 + \frac{10}{25} < \sqrt{2},$$

значит действительный минимум находится между 24 и 25. Подставим:

$$\left|\frac{34}{24} - \sqrt{2}\right| = \frac{34}{24} - \sqrt{2}, \qquad \left|\frac{7}{5} - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - \frac{7}{5}.$$

$$\frac{34}{24} - \sqrt{2} \vee \sqrt{2} - \frac{7}{5}, \qquad \frac{34}{24} + \frac{7}{5} \vee \sqrt{8}, \qquad 338 \vee 120\sqrt{8}, \qquad 114244 < 115200.$$

Ответ: 24.

Задания: alexlarin.net

Решения: [4ege.ru](4ege.ru)