

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8						
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

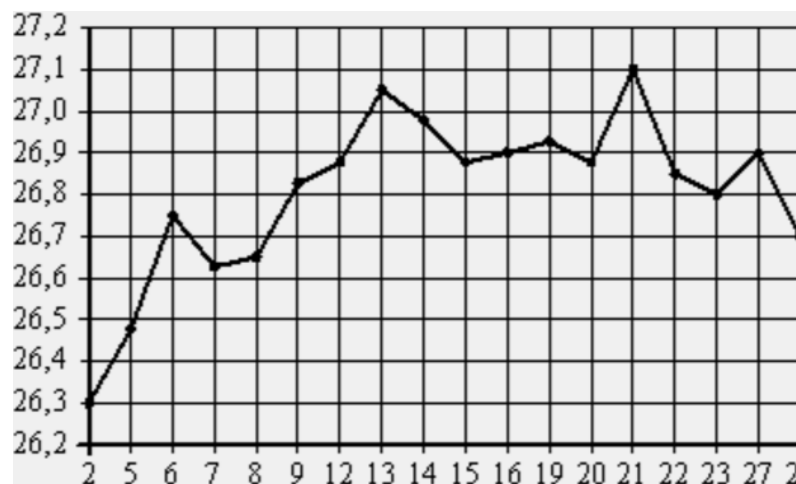
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 26 кг яблок?

Ответ: _____.

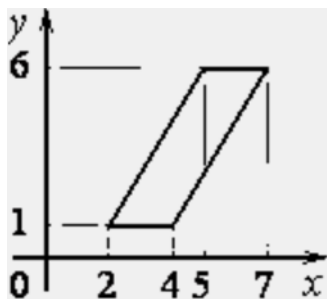
2 На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни со 2 по 28 февраля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – курс евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа курс евро был наименьшим за указанный период.



Ответ: _____.



3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

4 На конференцию приехали 2 учёных из Дании, 7 из Польши и 3 из Венгрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Венгрии.

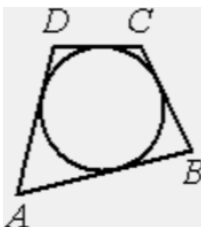
Ответ: _____.

5 Решите уравнение $\sqrt{40 + 3x} = x$.

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

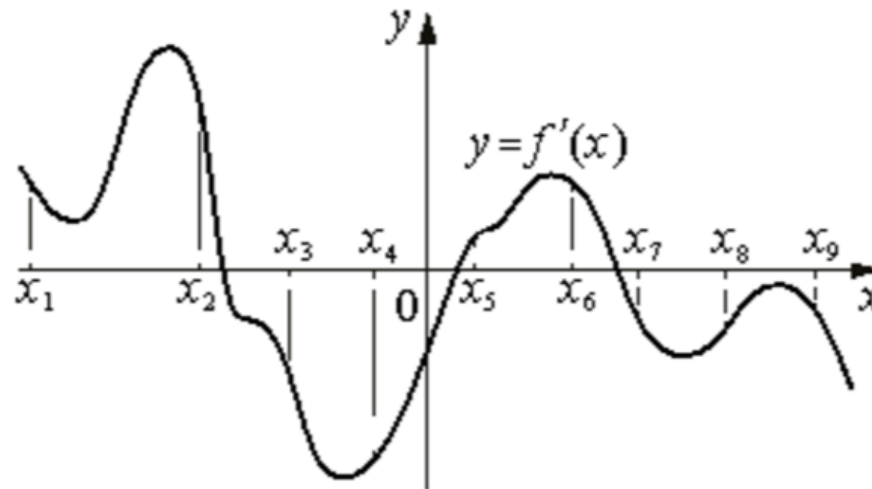
Ответ: _____.

6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 13$, $BC = 7$ и $AD = 11$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



Ответ: _____.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



Ответ: _____.

8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 48 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в см.

Ответ: _____.

9 Найдите $16 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,5$.

Ответ: _____.



10 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)^m}, \text{ где } m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1},$$

$r_{\text{пок}}$ – средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ – оценка магазина, данная экспертами, K – число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,51.

Ответ: _____.

11 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 132 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 1 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 1 час. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$ на отрезке $[-7; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$16^{x-1} - 3 \cdot 4^x + 11 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(\log_4 25; \sqrt{10})$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA = 5:3$ и $B_1F:FB = 5:11$. Точка T – середина ребра B_1C_1 .

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

15 Решите неравенство

$$\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \leq 1 + \frac{1}{3^x - 2}.$$

16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.



17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,5S$	$0,1S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x - 2a}{x + 2} + \frac{x - 1}{x - a} = 1$$

имеет ровно один корень.

19 Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

- а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
- б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
- в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъемностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
 Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
 (также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора



**Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19**

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	32
2	2
3	10
4	0,25
5	8
6	5
7	5
8	12
9	-8
10	0,79
11	11
12	3
13	а) 1; $\log_4 44$. б) $\log_4 44$
14	97,5
15	$(-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1)$
16	$\frac{3}{4}$
17	36
18	$\left\{ \frac{-1 - \sqrt{10}}{2}; -2; -1; 1; \frac{-1 + \sqrt{10}}{2} \right\}$
19	а) Можно, б) Нельзя, в) 39

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$16^{x-1} - 3 \cdot 4^x + 11 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(\log_4 25; \sqrt{10})$.

Решение:

а)

Умножение степеней с одинаковыми основаниями

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Деление степеней с одинаковыми основаниями

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$\frac{16^x}{16^1} - 3 \cdot 4^x + 11 = 0$$

$$\frac{16^x}{16} - 3 \cdot 4^x + 11 = 0 \quad | \cdot 16$$



$$16^x - 48 \cdot 4^x + 176 = 0$$

Пусть $4^x = t$

$$t^2 - 48t + 176 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 2304 - 704 = 1600 = 40^2$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{48 + 40}{2} = 44$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{48 - 40}{2} = 4$$

$4^x = 4$	$4^x = 44$
$4^x = 4^1$	$4^x = 4^{\log_4 44}$
$x = 1$	$x = \log_4 44$

б)

Оценим значения границ промежутка

$$\log_4 16 < \log_4 25 < \log_4 64$$

$$2 < \log_4 25 < 3$$

$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$$

$$3 < \sqrt{10} < 4$$

=>

$$x = 1 \notin (\log_4 25; \sqrt{10})$$

Оценим значение $\log_4 44$

$$\log_4 16 < \log_4 44 < \log_4 64$$

$$2 < \log_4 44 < 3$$

=>

$$x = \log_4 44 \in (\log_4 25; \sqrt{10})$$

Ответ: а) 1; $\log_4 44$. б) $\log_4 44$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в	1

пункте б ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

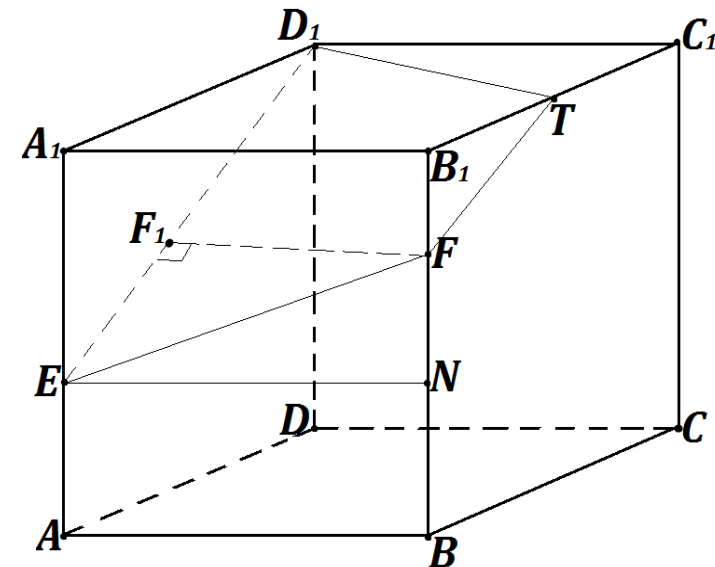
14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1 E : EA = 5 : 3$ и $B_1 F : FB = 5 : 11$. Точка T – середина ребра $B_1 C_1$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .
- б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

Решение:

а)



$$A_1 E : EA = 5 : 3 \text{ и } AA_1 = 16$$

=>



$$A_1E = 10$$

$$EA = 6$$

$$B_1F : FB = 5 : 11 \text{ и } BB_1 = 16$$

=>

$$B_1F = 5$$

$$FB = 11$$

T – середина B_1C_1

=>

$$B_1T = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

=>

ΔB_1FT – равнобедренный

Построим сечение:

Построим прямую EF , т.к. точки E и F лежат в одной плоскости

Построим прямую FT , т.к. точки F и T лежат в одной плоскости

Построим такую прямую через точку E , чтобы она была параллельна FT и т.к. ΔB_1FT – равнобедренный, то треугольник на плоскости AA_1D_1 тоже будет равнобедренным, а т.к.

$A_1E = A_1D_1 = 10$, то плоскость EFT проходит через вершину D_1

■

б)

ED_1TF – трапеция

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = \sqrt{EA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$FT = \sqrt{TB_1^2 + B_1F^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$TD_1 = \sqrt{TC_1^2 + C_1D_1^2} = \sqrt{5^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{97} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

Пусть EN – прямая, параллельная AB , тогда:

$$EN = 6\sqrt{2} \text{ и } FN = BF - EA = 11 - 6 = 5$$

$$EF = \sqrt{EN^2 + FN^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{97} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

=> ED_1TF – трапеция равнобедренная

Пусть FF_1 – высота трапеции, тогда:

$$F_1E = \frac{ED_1 - TF}{2} = \frac{10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{2} = 2,5\sqrt{2}$$

$$FF_1 = \sqrt{EF^2 - F_1E^2} = \sqrt{(\sqrt{97})^2 - (2,5\sqrt{2})^2} = \frac{13}{\sqrt{2}} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$S = \frac{ED_1 + TF}{2} \cdot FF_1 = \frac{10\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{13}{\sqrt{2}} = 97,5$$

Ответ: 97,5

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт a . ИЛИ Верно решён пункт b при отсутствии обоснований в пункте a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство

$$\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \leq 1 + \frac{1}{3^x - 2}$$

Решение:

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t - 1}{t - 3} \leq 1 + \frac{1}{t - 2}$$

$$\frac{t - 1}{t - 3} - \frac{1}{t - 2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{(t - 1)(t - 2) - 1 \cdot (t - 3) - 1 \cdot (t - 3)(t - 2)}{(t - 3)(t - 2)} \leq 0$$

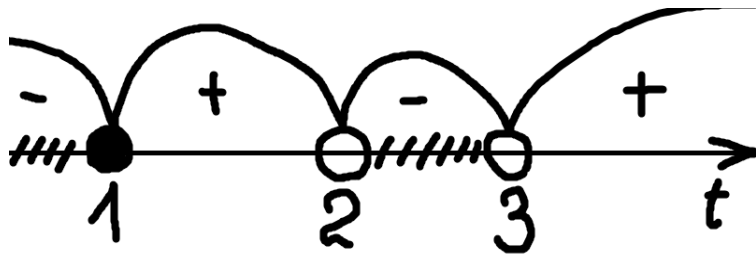
$$\frac{t^2 - 3t + 2 - t + 3 - (t^2 - 5t + 6)}{(t - 3)(t - 2)} \leq 0$$



$$\frac{t^2 - 3t + 2 - t + 3 - t^2 + 5t - 6}{(t - 3)(t - 2)} \leq 0$$

$$\frac{t - 1}{(t - 3)(t - 2)} \leq 0$$

$t - 1 = 0$ $t = 1$	$(t - 3)(t - 2) \neq 0$ $t \neq 3$ $t \neq 2$
------------------------	---



$t \leq 1$ $3^x \leq 1$ $3^x \leq 3^0$ $x \leq 0$	$2 < t < 3$ $3^{\log_3 2} < 3^x < 3^1$ $\log_3 2 < x < 1$
--	---

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1)$

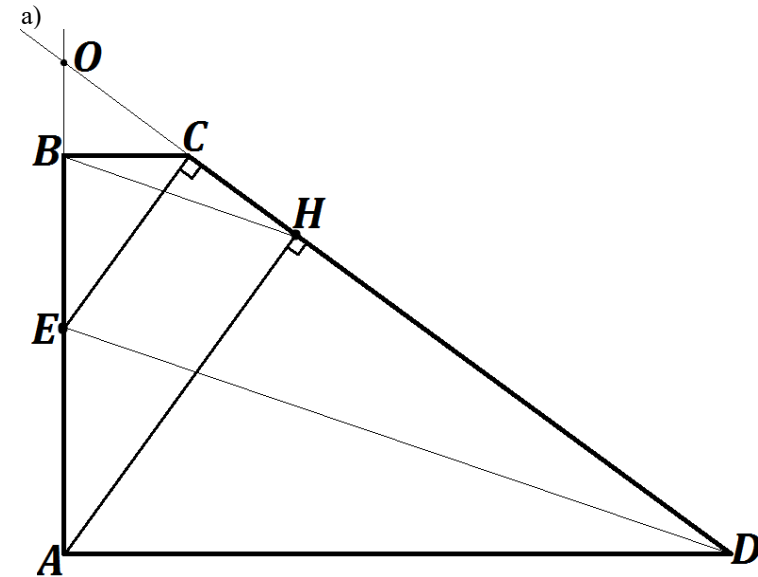
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Решение:



Пусть $AB \cap CD = O$

BH будет параллельна ED , если треугольник OBH будет подобен треугольнику OED

У этих треугольников есть общий угол, поэтому для второго признака подобия осталось получить тождество:

$$\frac{OD}{OH} = \frac{OE}{OB}$$

$\triangle BCO \sim \triangle CEO \sim \triangle AOH \sim \triangle AOD$ по двум углам
(90°
 $\angle O$ – общий)

Запишем отношение прилежащего к углу O катета к гипотенузе в каждом из треугольников:



$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OE} = \frac{OH}{AO} = \frac{OA}{OD}$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD}$$

$$\Rightarrow OC \cdot OA = OB \cdot OD$$

$$\frac{OC}{OE} = \frac{OH}{AO}$$

$$\Rightarrow OC \cdot OA = OE \cdot OH$$

$$\Rightarrow OB \cdot OD = OE \cdot OH \quad | :OB$$

$$OD = \frac{OE \cdot OH}{OB} \quad | :OH$$

$$\frac{OD}{OH} = \frac{OE}{OB}$$

$\Rightarrow \Delta OBH \sim \Delta OED$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

$$\left(\begin{array}{l} \frac{OD}{OH} = \frac{OE}{OB} \\ \angle O - \text{общий} \end{array} \right)$$

$\Rightarrow BH \parallel ED$

б)
Искомое отношение BH к ED — это коэффициент подобия треугольников OBH и OED

$$\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 120 - 90 = 30^\circ$$

$$\angle OCB = \angle OCE - \angle BCE = 90 - 30 = 60^\circ$$

$$\angle BOC = 180 - \angle OBC - \angle OCB = 180 - 90 - 60 = 30^\circ$$

$$\angle OEC = 180 - \angle OCE - \angle EOC = 180 - 90 - 30 = 60^\circ$$

$$\frac{BH}{ED} = \frac{OB}{OE}$$

Выразим OB и BE через BC

$$\operatorname{tg} \angle OCB = \frac{OB}{BC}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{OB}{BC}$$

$$\Rightarrow OB = BC \cdot \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \angle BEC = \frac{BC}{BE}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{BC}{BE}$$

$$\Rightarrow BE = \frac{BC}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{OB}{OE} = \frac{OB}{OB + BE} = \frac{BC \cdot \sqrt{3}}{BC \cdot \sqrt{3} + \frac{BC}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{ED} = \frac{3}{4}$$

Ответ: б) $\frac{3}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ	1



Обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,5S$	$0,1S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Решение:

Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot S = 1,15 \cdot S$
------------	--

01.04.2017	
01.07.2017	$0,8 \cdot S$

=>

01.04.2017	$1,15 \cdot S - 0,8 \cdot S = 0,35 \cdot S$
------------	---

2018 год

01.01.2018	$1,15 \cdot 0,8 \cdot S = 0,92 \cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0,5 \cdot S$

=>

01.04.2018	$0,92 \cdot S - 0,5 \cdot S = 0,42 \cdot S$
------------	---

2019 год

01.01.2019	$1,15 \cdot 0,5 \cdot S = 0,575 \cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	$0,1 \cdot S$

=>

01.04.2019	$0,575 \cdot S - 0,1 \cdot S = 0,475 \cdot S$
------------	---

2020 год

01.01.2020	$1,15 \cdot 0,1 \cdot S = 0,115 \cdot S$
01.04.2020	
01.07.2020	0

=>

01.04.2020	$0,115 \cdot S - 0 = 0,115 \cdot S$
------------	-------------------------------------



Общая сумма выплат должна быть меньше 50 млн рублей
(по условию)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \\ 0,35 \cdot S + 0,42 \cdot S + 0,475 \cdot S + 0,115 \cdot S < 50 \text{ млн} \\ 1,36 \cdot S < 50 \\ S < \frac{5000}{136} \\ S < \frac{625}{17} \\ S < 36 \frac{13}{17} \end{aligned}$$

Требуется найти наибольшее подходящее целое S

$$\begin{aligned} \Rightarrow \\ S = 36 \end{aligned}$$

Ответ: 36

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} = 1$ имеет ровно один корень.

Решение:

$$\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} - 1 = 0$$

$$\frac{(x-2a)(x-a) + (x-1)(x+2) - (x+2)(x-a)}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$\frac{(x-2a)(x-a) + (x-1)(x+2) + (x+2)(a-x)}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$\frac{x^2 - ax - 2ax + 2a^2 + x^2 + 2x - x - 2 + ax - x^2 + 2a - 2x}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$\frac{-2ax + 2a^2 + x^2 - x - 2 + 2a}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$\begin{aligned} x \neq -2 \\ x \neq a \end{aligned}$$

$$-2ax + 2a^2 + x^2 - x - 2 + 2a = 0$$

$$x^2 - (2a+1)x + 2a^2 + 2a - 2 = 0$$

За количество корней в квадратном уравнении отвечает дискриминант, рассмотрим каким он может быть:

$$D = 4a^2 + 4a + 1 - 8a^2 - 8a + 8 = -4a^2 - 4a + 9$$

<p>Если $D < 0$</p> $-4a^2 - 4a + 9 < 0$ $-4a^2 - 4a + 9 = 0$ $D_a = 160$ $a_{1,2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{10}}{-8}$ $a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$  <p>\Rightarrow При получившихся a</p>	<p>Если $D = 0$</p> $x_0 = \frac{-b}{2a}$ $x_0 = \frac{2a+1}{2}$ <p>Получил я единственный корень при</p>	<p>Если $D > 0$</p> $-4a^2 - 4a + 9 > 0$  <p>Есть 2 подходящих варианта:</p> <ol style="list-style-type: none"> $x_1 = -2$ $x_2 \neq a$ $x_1 = a$
--	--	---



уравнение не имеет корней	$a_{1,2}$	$x_2 \neq -2$
	$= \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$	
	Проверим условия	
	$x \neq -2$	
	$x \neq a$	
	$\frac{2a+1}{2}$	
	$= -2$	
	$2a+1 = -4$	
	$a = -2,5$	
	$-2,5$	
$\frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$	$\neq \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$	
$\frac{2a+1}{2}$	$= a$	
$2a+1 = 2a$	$1 = 0$	
Противоречие		

Теорема Виета
 $ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Рассмотрим вариант №1
 По т. Виета получаем систему:
 $\begin{cases} -2 + x_2 = 2a + 1 \\ -2 \cdot x_2 = 2a^2 + 2a - 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 = 2a + 3 \\ x_2 = -a^2 - a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2a + 3 \\ 2a + 3 = -a^2 - a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2a + 3 \\ a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2a + 3 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases}$$

Если $a = -1$, то $x_2 = 1, x_1 = -2$
 $x_2 \neq a$

$$-1 \in \left(\frac{-1 - \sqrt{10}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{10}}{2} \right)$$

И мы получили два корня, один из которых неподходящий
 \Rightarrow
 Уравнение имеет 1 корень, как и требовалось
 \Rightarrow
 $a = -1$ подходит

Если $a = -2$, то $x_2 = -1, x_1 = -2$
 $x_2 \neq a$

$$-2 \in \left(\frac{-1 - \sqrt{10}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{10}}{2} \right)$$

И мы получили два корня, один из которых неподходящий
 \Rightarrow
 Уравнение имеет 1 корень, как и требовалось
 \Rightarrow
 $a = -2$ подходит

Рассмотрим вариант №2
 По т. Виета получаем систему:

$$\begin{cases} a + x_2 = 2a + 1 \\ a \cdot x_2 = 2a^2 + 2a - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = a + 1 \\ a^2 + a = 2a^2 + 2a - 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_2 = a + 1 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = a + 1 \\ (a - 1)(a + 2) = 0 \end{cases}$$

Если $a = 1$, то $x_2 = 2, x_1 = a = 1$
 $x_2 \neq a$

$$1 \in \left(\frac{-1 - \sqrt{10}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{10}}{2} \right)$$

И мы получили два корня, один из которых неподходящий
 \Rightarrow

Уравнение имеет 1 корень, как и требовалось

\Rightarrow

$a = 1$ подходит

Если $a = -2$ уже рассматривали

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{10}}{2}; -2; -1; 1; \frac{-1 + \sqrt{10}}{2} \right\}$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19 Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъемностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Решение:

а)
 Если поместить в грузовик глыбы только одного типа, то:

$$1 \quad 5000 : 800 = 6,25$$

\Rightarrow
 6 (800 килограммовых глыб) поместится в один грузовик

\Rightarrow
 Для перевозки 50 штук таких глыб потребуется 9 грузовиков

$$2 \quad 5000 : 1000 = 5$$

\Rightarrow
 5 (1000 килограммовых глыб) поместится в один грузовик

\Rightarrow
 Для перевозки 60 штук таких глыб потребуется 12 грузовиков

$$3 \quad 5000 : 1500 \approx 3,33 \dots$$

\Rightarrow
 3 (1500 килограммовые глыбы) поместится в один грузовик

\Rightarrow
 Для перевозки 60 штук таких глыб потребуется 20 грузовиков

Итого:
 Для перевозки всех глыб в указанном примере потребовалось:
 $9 + 12 + 20 = 41$ (грузовик)

\Rightarrow
 Можно



б)

Найдём суммарную массу глыб:

$$50 \cdot 800 + 60 \cdot 1000 + 60 \cdot 1500 = 190000 \text{ (кг)}$$

Найдём суммарную грузоподъёмность грузовиков:

$$38 \cdot 5000 = 190000 \text{ (кг)}$$

=>

Чтобы все глыбы было возможно увезти требуется, чтобы все 38 грузовиков были загружены полностью

Если помещать по одной 1500 килограммовой глыбе в грузовик, то грузовик невозможно будет загрузить полностью

Если помещать по три 1500 килограммовых глыбы в грузовик, то грузовик невозможно будет загрузить полностью

=>

Для перевозки 1500 килограммовых глыб нужно в каждый грузовик положить две такие глыбы, только тогда их будет возможно загрузить полностью

=>

30 грузовиков будут заполнены на $\frac{3000}{5000}$ и в каждый из тридцати грузовиков нужно добавить по две 1000 килограммовые глыбы, чтобы загрузить полностью эти 30 грузовиков

Итак, 30 грузовиков заполнены полностью, причём израсходованы все 1000 килограммовые и все 1500 килограммовые глыбы

Оставшиеся 8 грузовиков нужно загрузить полностью 800 килограммовыми глыбами, а это сделать невозможно, не разрезая их

=>

Нельзя

в)

В предыдущем пункте доказано, что в 38 грузовиков все глыбы не уместить.

Попробуем уместить все глыбы в 39 грузовиков:

Стараемся загружать грузовики полностью пока это возможно

10 грузовиков, каждый из которых заполнен:

пятью 800 килограммовыми и одной 1000 килограммовой

=>

Осталось разместить 50 1000 килограммовых и 60 1500 килограммовых по 29 грузовикам

25 грузовиков, каждый из которых заполнен:

двумя 1500 килограммовыми и двумя 1000 килограммовыми

=>

Осталось разместить 10 1500 килограммовых по 4 грузовикам

3 грузовика, каждый из которых заполнен:

тремя 1500 килограммовыми

=>

Осталось разместить 1 1500 килограммовую в 1 грузовик, делаем это

=>

39 - наименьшее количество грузовиков, которое потребуется для заданной цели

Ответ: а) Можно, б) Нельзя, в) 39

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

