**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

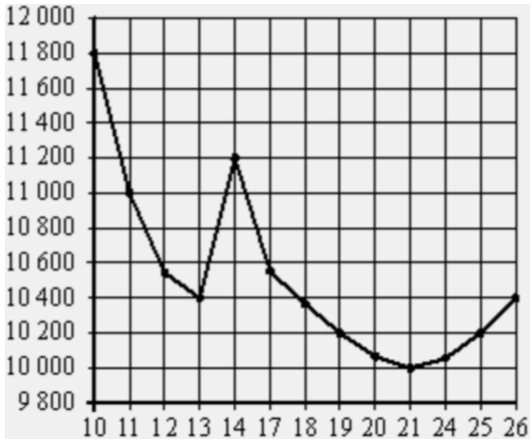
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В школе есть пятиместные туристические палатки. Какое наименьшее число палаток нужно взять в поход, в котором участвует 29 человек?

Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену никеля на момент закрытия торгов в период с 11 по 17 ноября (в долларах США за тонну).



Ответ: ____________________________.

3 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;12)$, $(7;14)$, $(7;20)$.

Ответ: ___________________________.

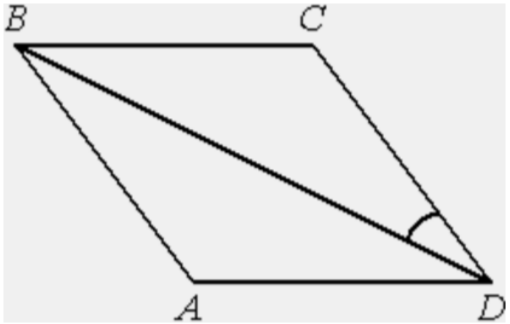
4 Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,82. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$(x+7)^3 = 216$.

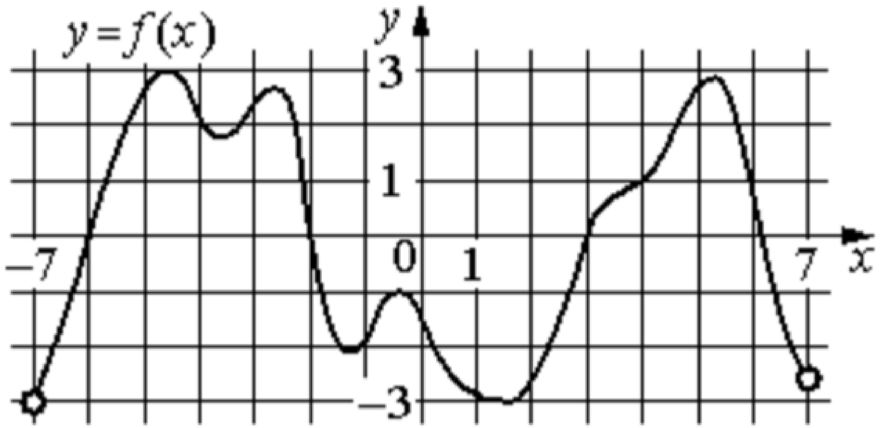
Ответ: ___________________________.

6 В ромбе $ABCD$ угол DAB равен 148°. Найдите угол BDC. Ответ дайте в градусах.



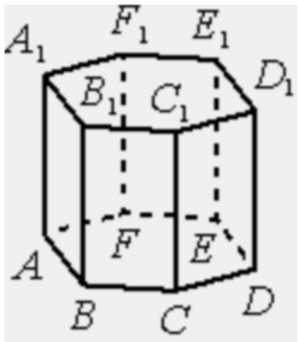
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7;7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки D, E, F, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 9.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$12\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$.

Ответ: ___________________________.

10 Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика H (в м) вычисляется по формуле $H = \frac{{v_0}^2}{4g}(1-\cos\alpha)$, где $v_0 = 26$ м/с – начальная скорость мячика, а $g-$ ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α мячик пролетит над стеной высотой 7,45 м на расстоянии 1 м? Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

11 Смешали некоторое количество 19-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 17-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции

$y = x^3 - 12x + 5$ на отрезке $[-3; 0]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$15^{\cos x} = 3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и $L-$ середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_x 2x^{-1}\cdot\log_x 2x^2}{\log_{2x} x\cdot\log_{2x^{-2}} x} < 40.$$

16 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и $C-$ вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть $N-$ точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что

$BM : MC = 1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180204

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$$

имеет ровно три различных корня.

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 28?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180204

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	6
2	10400
3	18
4	0,11
5	-1
6	16
7	8
8	12
9	-3
10	60
11	18
12	21
13	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n \in Z.$ б) $5{,}25\pi;\ 6{,}25\pi$
14	0,75
15	$\left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2};\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$
16	96
17	3
18	$[-2;-1) \cup (-1;1) \cup (1;2]$
19	а) да, например, для числа 140, б) Нет, в) 11

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение
$15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение:
а)

Умножение степеней с одинаковым показателем
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$
$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} - 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} = 0$
$3^{\cos x} \cdot (5^{\cos x} - 5^{\sin x}) = 0$

$3^{\cos x} = 0$ Нет решений, т.к. число в степени всегда положительно	$5^{\cos x} - 5^{\sin x} = 0$ $5^{\cos x} = 5^{\sin x}$

	$\cos x = \sin x \quad \vert : \cos x$ $\operatorname{tg} x = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$

б)
Подберём корни для $x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z$

Если $n = 4$, то $x = \frac{\pi}{4} + 4\pi = 4{,}25\pi \notin \left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$

Если $n = 5$, то $x = \frac{\pi}{4} + 5\pi = 5{,}25\pi \in \left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$

Если $n = 6$, то $x = \frac{\pi}{4} + 6\pi = 6{,}25\pi \in \left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$

Если $n = 7$, то $x = \frac{\pi}{4} + 7\pi = 7{,}25\pi \notin \left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$

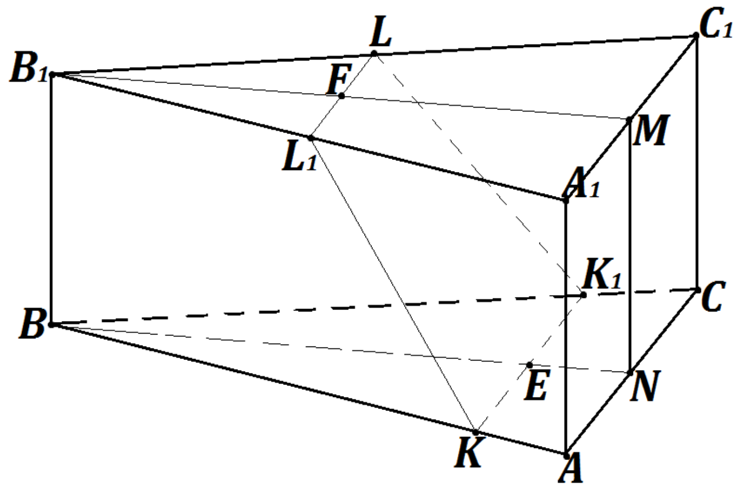
Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$. б) $5{,}25\pi;\ 6{,}25\pi$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

Решение:
а)



Построим плоскость γ:
Построим прямую KK_1 такую, что $KK_1 \parallel AC$
Построим прямую K_1L, т.к. точки K_1 и L лежат в одной плоскости
Построим прямую LL_1 такую, что $LL_1 \parallel A_1C_1$
Построим прямую KL_1, т.к. точки K и L_1 лежат в одной плоскости
Трапеция KK_1LL_1 – искомое сечение плоскостью γ

Рассмотрим плоскость BB_1M:
Опустим перпендикуляр MN на прямую AC
Пусть $B_1M \cap LL_1 = F$
Пусть $BN \cap KK_1 = E$
BB_1MN – прямоугольник
$BB_1 = 3$

$$B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$$

$NE : BE = AK : BK$
$AK : BK = 1 : 5$
$\Rightarrow NE : BE = 1 : 5$

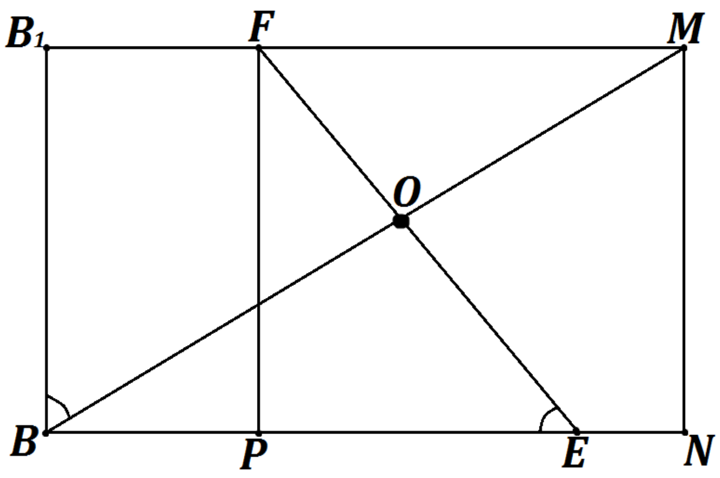
$$NE = \frac{1}{6} \cdot B_1M = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BE = \frac{5}{6} \cdot B_1M = \frac{5}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$B_1F : FM = B_1L : LC_1$
$B_1L : LC_1 = 1 : 1$
$=> B_1F = FM$

$$B_1F = FM = \frac{1}{2} \cdot B_1M = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Построим прямую EF
Докажем, что прямые EF и BM перпендикулярны:
$\angle BOE$ — искомый
Рассмотрим BB_1MN — прямоугольник:



Опустим перпендикуляр FP на прямую BN

$$PE = FM - NE = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

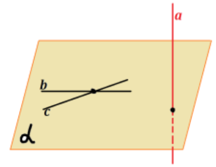
$$\operatorname{tg}\angle BEF = \frac{FP}{PE} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\angle MBB_1 = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$=> \angle BEF = \angle MBB_1 = 60°$
$=> \angle MBN = 90 - 60 = 30°$

$=> BOE = 180 - \angle BEF - \angle MBN = 180 - 60 - 30 = 90°$

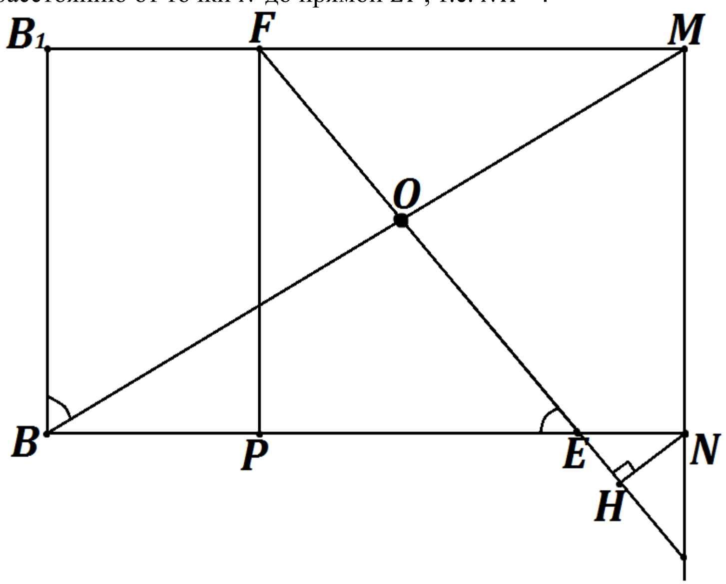
Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$BM \perp EF$
$BM \perp KK_1$ (т.к. $KK_1 \perp BN$, являющейся проекцией BM на плоскость ABC по теореме о трёх перпендикулярах)
$=> BM \perp \gamma$
■

б)
Т.к. прямая $AC \parallel \gamma$, то расстояние от точки C до плоскости γ будет равно расстоянию от точки N до прямой EF, т.е. NH—?



$\operatorname{tg}\angle BEF = \operatorname{tg}\angle NEH = \sqrt{3}$

Основные Тригонометрические формулы

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\sqrt{3}^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\angle NEH}$

$\cos\angle NEH = \dfrac{1}{2}$

$\sin^2\angle NEH + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1$

$\sin\angle NEH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{NH}{EN}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{NH}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad => NH = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Ответ: б) 0,75

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40.$$

.

Решение:

ОДЗ:

1.

$x > 0$

2.

$x \neq 1$

3.

$2x \neq 1$

$x \neq \dfrac{1}{2}$

4.

$2x^{-2} \neq 1$

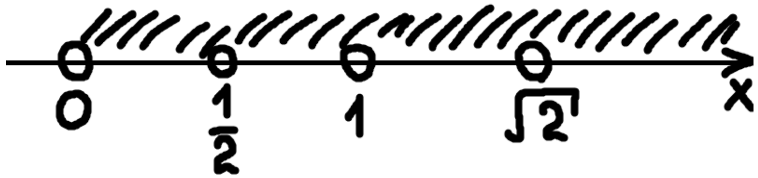
$x^{-2} \neq \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{x^2} \neq \dfrac{1}{2}$

$x^2 \neq 2$

$x \neq \pm\sqrt{2}$

Объединим ОДЗ:



$$\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40$$

Задача: привести каждый логарифм к основанию x

Свойство логарифмов

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$$\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\dfrac{1}{\log_x 2x} \cdot \dfrac{1}{\log_x 2x^{-2}}} < 40$$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$

$$\frac{(\log_x 2 + \log_x x^{-1}) \cdot (\log_x 2 + \log_x x^2)}{\frac{1}{(\log_x 2 + \log_x x)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2 + \log_x x^{-2})}} < 40$$

$$\frac{(\log_x 2 - 1) \cdot (\log_x 2 + 2)}{\frac{1}{(\log_x 2 + 1)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2 - 2)}} < 40$$

$(\log_x 2 - 1)(\log_x 2 + 1) \cdot (\log_x 2 + 2)(\log_x 2 - 2) < 40$

Пусть $\log_x 2 = t$

$(t - 1)(t + 1) \cdot (t + 2)(t - 2) < 40$

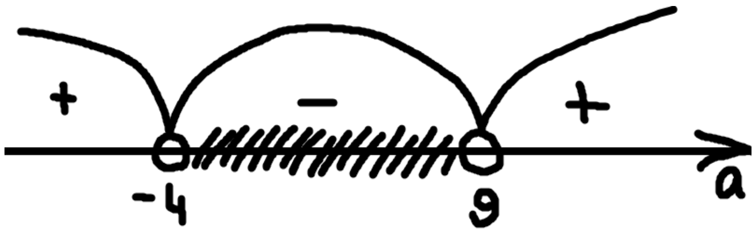
$(t^2 - 1) \cdot (t^2 - 4) - 40 < 0$

$t^4 - 5t^2 + 4 - 40 < 0$

$t^4 - 5t^2 - 36 < 0$

Пусть $t^2 = a$

$a^2 - 5a - 36 < 0$
$a^2 - 5a - 36 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 169$
$a_1 = \frac{5 + 13}{2} = 9$
$a_2 = \frac{5 - 13}{2} = -4$



$-4 < a < 9$
$-4 < t^2 < 9$
=>
$t^2 < 9$
$t^2 - 9 < 0$
$(t - 3)(t + 3) < 0$

$-3 < t < 3$
$-3 < \log_x 2 < 3$

$\begin{cases} \log_x 2 > -3 \\ \log_x 2 < 3 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_x 2 > \log_x x^{-3} \\ \log_x 2 < \log_x x^3 \end{cases}$

Решим каждое неравенство, а потом объединим решения:
1.
$\log_x 2 > \log_x x^{-3}$

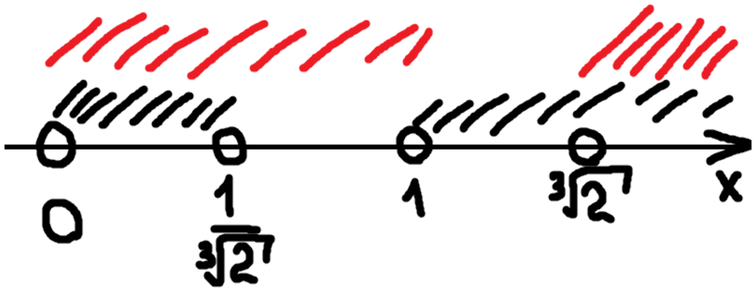
$\begin{cases} x > 1 \\ 2 > x^{-3} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2 < x^{-3} \end{cases}$
$\begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{x^3} < \frac{2}{1} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x^3} > \frac{2}{1} \end{cases}$
$\begin{cases} x > 1 \\ 1 < 2x^3 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$
$\begin{cases} x > 1 \\ x^3 > \frac{1}{2} \end{cases}$	=>

$\begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$ => $x > 1$	$0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

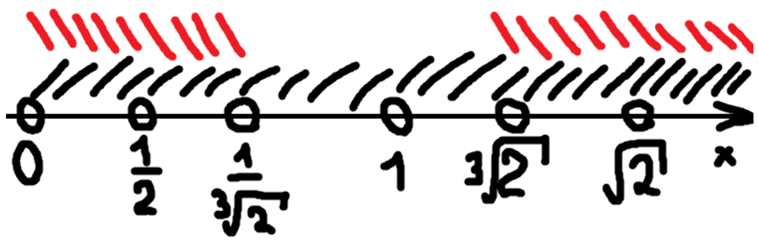
2.
$\log_x 2 < \log_x x^3$

$\begin{cases} x > 1 \\ 2 < x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x > \sqrt[3]{2} \end{cases}$ => $x > \sqrt[3]{2}$	$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2 > x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < \sqrt[3]{2} \end{cases}$ => $0 < x < 1$

Оценим значение $\sqrt[3]{2}$
$\sqrt[3]{1{,}728} = 1{,}2$
$\sqrt[3]{2{,}197} = 1{,}3$
=>
$1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$



Объединим получившийся ответ с ОДЗ



Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2};\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$

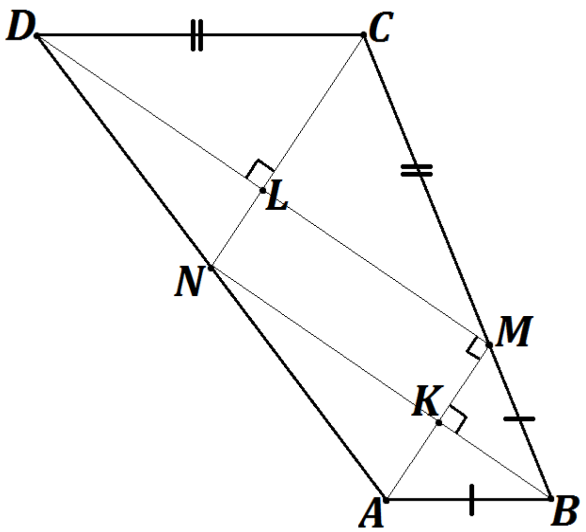
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C – вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.
б) Пусть N – точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC = 1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

Решение:
а)

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180204



Проведём биссектрису BK в $\triangle ABM$
BK — высота и медиана
(по свойству равнобедренного треугольника)

Пусть $BK \cap AD = N$

$BK \perp AM$
(т.к. BK — высота в $\triangle ABM$)
$MD \perp AM$
(по условию)
=>
$BK \parallel MD$
=>
$BN \parallel MD$
=>
$KN \parallel MD$

K — середина AM
(т.к. BK — медиана в $\triangle ABM$)
=>
KN — средняя линия в $\triangle ADM$
=>
N — середина AD

Аналогично,

Проведём биссектрису CL в $\triangle CDM$
CL — высота и медиана
(по свойству равнобедренного треугольника)

Пусть $CL \cap AD = E$

$CL \perp DM$
(т.к. CL — высота в $\triangle CDM$)
$AM \perp DM$
(по условию)
=>
$CL \parallel AM$
=>
$CE \parallel AM$
=>
$EL \parallel AM$

L — середина DM
(т.к. CL — медиана в $\triangle CDM$)
=>
EL — средняя линия в $\triangle ADM$
=>
E — середина AD

=> точки N и E совпадают в середине стороны AD
■

б)
$KLMN$ — прямоугольник
(т.к. $KN \parallel LM$, $KM \parallel LN$ и $\angle KML = 90°$)

Пусть
$BM = x$
$CM = 3x$
$\angle MBK = \angle CMD$
(т.к. это соответственные углы при параллельных прямых)

Пусть
$\angle MBK = \alpha = \angle CMD$

$\sin\alpha = \dfrac{MK}{BM} = \dfrac{MK}{x}$
=>
$MK = x \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{ML}{CM} = \dfrac{ML}{3x}$
=>
$ML = 3x \cdot \cos\alpha$

$MK \cdot ML = 18$
$x \cdot \sin\alpha \cdot 3x \cdot \cos\alpha = 18$
$x^2 \cdot \sin 2\alpha = 12$

$S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{CDM} + S_{ADM}$

$S_{ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot \sin\angle ABM$
$S_{ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 2\alpha = 0{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{CDM} = \dfrac{1}{2} \cdot CM \cdot DM \cdot \sin\angle CMD$
$S_{CDM} = \dfrac{1}{2} \cdot CM \cdot 2ML \cdot \sin\angle CMD$
$S_{CDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot 2 \cdot 3x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 4{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{ADM} = \dfrac{AM \cdot DM}{2}$
$S_{ADM} = \dfrac{2MK \cdot 2ML}{2}$
$S_{ADM} = \dfrac{2 \cdot x \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot 3x \cdot \cos\alpha}{2} = 3x^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{ABCD} = 0{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha + 4{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha + 3x^2 \cdot \sin 2\alpha$
$S_{ABCD} = 8x^2 \cdot \sin 2\alpha$
$S_{ABCD} = 8 \cdot 12 = 96$

Ответ: 96

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение:

Пусть x – сумма кредита

Тогда $1{,}3x$ – общая сумма выплат, превышающая сумму кредита на 30%

Составим таблицу:

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180204

Месяц	Долг на начало месяца	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	x	$\frac{x}{19}$	$\frac{r}{100}\cdot x$
2	$\frac{18x}{19}$	$\frac{x}{19}$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{18x}{19}$
…			
19	$\frac{x}{19}$	$\frac{x}{19}$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{x}{19}$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

$$\text{ОСВ} = 19\cdot\frac{x}{19} + \frac{\frac{r}{100}\cdot x + \frac{r}{100}\cdot\frac{x}{19}}{2}\cdot 19 = 1{,}3x$$

$$19\cdot\frac{x}{19} + \frac{\frac{r}{100}\cdot x + \frac{r}{100}\cdot\frac{x}{19}}{2}\cdot 19 = 1{,}3x$$

$$\frac{\frac{r}{100}\cdot\left(x+\frac{x}{19}\right)}{2}\cdot 19 = 0{,}3x$$

$$\frac{r\cdot\frac{20x}{19}}{200}\cdot 19 = 0{,}3x$$

$$\frac{r\cdot 20x}{200\cdot 19}\cdot 19 = 0{,}3x$$

$$\frac{r\cdot x}{10} = 0{,}3x \qquad \Big|:x$$

$$\frac{r}{10} = 0{,}3 \qquad \Big|\cdot 10$$

$$r = 3$$

Ответ: 3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$\sqrt{3x^2+2ax+1} = x^2+ax+1$
имеет ровно три различных корня.

Решение:

Правая часть уравнения равна корню
=>
Правая часть уравнения неотрицательна

Получаем систему:

$$\begin{cases} x^2+ax+1 \ge 0 \\ \sqrt{3x^2+2ax+1}^{\,2} = (x^2+ax+1)^2 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$3x^2+2ax+1 = \left(x^2+(ax+1)\right)^2$$

$3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2x^2(ax + 1) + (ax + 1)^2$

$3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2x^3a + 2x^2 + a^2x^2 + 2ax + 1$

$3x^2 = x^4 + 2x^3a + 2x^2 + a^2x^2$

$x^4 + 2x^3a - x^2 + a^2x^2 = 0$

$x^2(x^2 + 2ax - 1 + a^2) = 0$

$x^2(x^2 + 2ax + a^2 - 1) = 0$

$x^2((x + a)^2 - 1) = 0$

Это уравнение умеет 3 решения
$x_1 = 0$

$x + a = 1$
$x_2 = 1 - a$

$x + a = -1$
$x_3 = -1 - a$

Мы ищем все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно три различных корня
=>
$1 - a \neq 0$
$a \neq 1$

$-1 - a \neq 0$
$a \neq -1$

При этом каждый их трёх «иксов» должен удовлетворять неравенству $x^2 + ax + 1 \geq 0$ из системы:

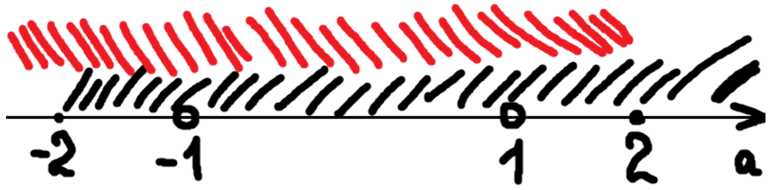
Если $x_1 = 0$, то
$0^2 + 0 + 1 \geq 0$
$1 \geq 0$

Если $x_2 = 1 - a$, то
$(1 - a)^2 + a - a^2 + 1 \geq 0$
$1 - 2a + a^2 + a - a^2 + 1 \geq 0$
$a \leq 2$

Если $x_3 = -1 - a$, то
$(-1 - a)^2 - a - a^2 + 1 \geq 0$
$1 + 2a + a^2 - a - a^2 + 1 \geq 0$
$a \geq -2$

Запишем систему всех условий для a:

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \\ a \leq 2 \\ a \geq -2 \end{cases}$$



Ответ: $a \in [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 28?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Решение:

Пусть

$a-$ число сотен $1 \le a \le 9$
$b-$ число десятков $0 \le b \le 9$
$c-$ число единиц $0 \le c \le 9$

Тогда
$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c -$ данное трёхзначное число

а)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a+b+c} = 28$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 28 \cdot (a+b+c)$
$100a + 10b + c = 28a + 28b + 28c$
$72a = 18b + 27c$

Если $a = 1$, то
$72 = 18b + 27c$

Нетрудно подобрать подходящую комбинацию:
$b = 4$
$c = 0$
=>
Может, частное числа 140 и суммы его цифр равно 28

б)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a+b+c} = 88$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 88 \cdot (a+b+c)$
$100a + 10b + c = 88a + 88b + 88c$
$12a = 78b + 87c$

Рассмотрим варианты комбинаций b и c, начиная с наименьших:
Вариант #1
$b = 0$
$c = 0$

Тогда
$12a = 0$
Не подходит, т.к. $1 \le a \le 9$
Вариант #2
$b = 0$
$c = 1$

Тогда
$12a = 87$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #3
$b = 1$
$c = 0$

Тогда
$12a = 78$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #4
$b = 1$
$c = 1$

Тогда
$12a = 78 + 87$
$12a = 165$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
$1 \le a \le 9$
$12 \le 12a \le 108$
=>
дальнейшее увеличение значений b и c не имеет смысла, т.к. правая часть уравнения будет всё больше и больше
=>
Не может

в)
Подбором можно заметить, что частное числа 198 и суммы его цифр равно 11

Проверим 10

$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 10$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 10 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 10a + 10b + 10c$
$90a = 9c$
$10a = c$
=>
c в 10 раз больше, чем a
=>
противоречие, т.к. a и c – цифры

Проверим 9

$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 9$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 9 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 9a + 9b + 9c$
$91a + b = 8c$
=>
левая часть уравнения больше правой
=>
противоречие

Проверим 8

$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 8$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 8 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 8a + 8b + 8c$
$92a + 2b = 7c$
=>
левая часть уравнения стала ещё больше правой
=>
противоречие и дальнейший перебор натуральных значений частного от числа и суммы его цифр также не даст решения
=>
11

Ответ: а) да, например, для числа 140, б) Нет, в) 11

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180204