**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

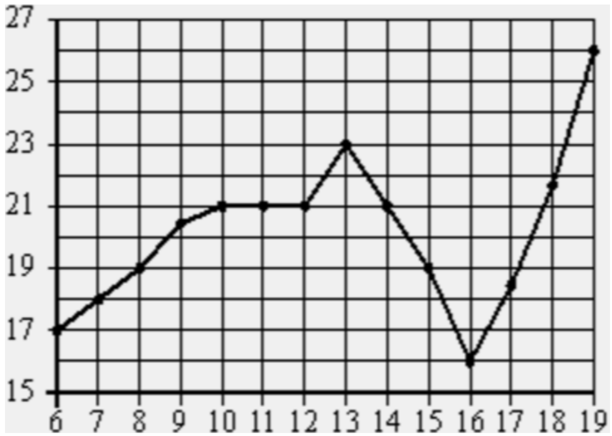
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180128

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В квартире, где проживает Ася, установлен прибор учёта расхода горячей воды (счётчик). 1 мая счётчик показывал расход 84 куб. м воды, а 1 июня – 96,5 куб. м. Какую сумму должна заплатить Ася за горячую воду за май, если цена 1 куб. м горячей воды составляет 72 руб. 60 коп.? Ответ дайте в рублях.

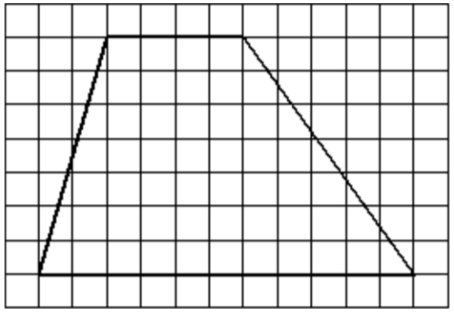
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднесуточная температура за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



Ответ: ___________________________.

4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков – чётное число.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

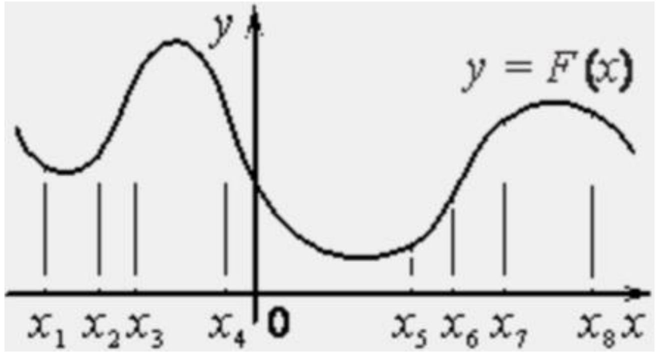
$\log_{27} 3^{5x+5} = 2.$

Ответ: ___________________________.

6 Один угол параллелограмма больше другого на 52°. Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.

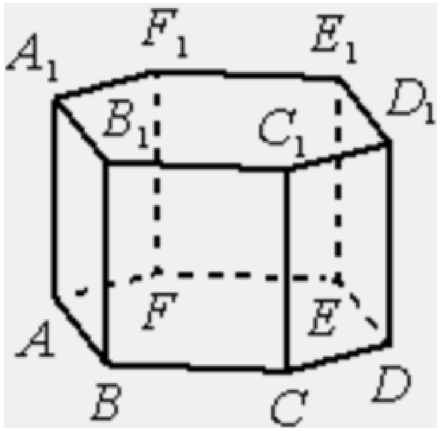
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



Ответ: ___________________________.

8 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 3, найдите угол между прямыми CD и E_1F_1. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180128

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{1,2}\cdot\sqrt{1,4}}{\sqrt{0,42}}.$$

Ответ: ___________________________.

10 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 217 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c\cdot\frac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов (в МГц), f – частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: ___________________________.

11 Первый час автомобиль ехал со скоростью 115 км/ч, следующие три часа – со скоростью 45 км/ч, а затем два часа – со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции

$y = 2x - \ln(x+7) + 9$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$\left(81^{\cos x}\right)^{\sin x} = 9^{-\sqrt{3}\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство

$$9\log_{12}(x^2-3x-4) \le 10 + \log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

16 К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соотвественно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 2$?

17 Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+x+7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0{,}5x^2+x+7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$\sqrt{1-2x}=a-3|x|$
имеет более двух корней.

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника. Три числа назовём отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180128

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	907,5
2	26
3	7,5
4	0,75
5	0,2
6	116
7	3
8	60
9	2
10	220,5
11	55
12	-6,5
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n \in Z.$ б) $-1{,}5\pi;\ -0{,}5\pi;\ -\frac{2\pi}{3}$
14	$\frac{80\sqrt{3}}{3}$
15	$[-8;-1) \cup (4;16]$
16	$\frac{1}{2}$
17	9
18	$\left[1{,}5;\frac{5}{3}\right)$
19	а) да, б) нет, в) 20

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$(81^{\cos x})^{\sin x} = 9^{-\sqrt{3}\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а)

Возведение степени в степень

$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

$81^{\sin x\cdot\cos x} = 9^{-\sqrt{3}\cos x}$

$(9^2)^{\sin x\cdot\cos x} = 9^{-\sqrt{3}\cos x}$

$9^{2\sin x\cdot\cos x} = 9^{-\sqrt{3}\cos x}$

$2\sin x\cdot\cos x = -\sqrt{3}\cos x$

$2\sin x\cdot\cos x + \sqrt{3}\cos x = 0$

$\cos x\cdot\left(2\sin x+\sqrt{3}\right) = 0$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180128

$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$	$2\sin x + \sqrt{3} = 0$ $2\sin x = -\sqrt{3}$ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$ $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$

Если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -2{,}5\pi \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -1{,}5\pi \in \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -0{,}5\pi \in \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{8\pi}{3} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{2\pi}{3} \in \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-1{,}5\pi; -0{,}5\pi; -\frac{2\pi}{3}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

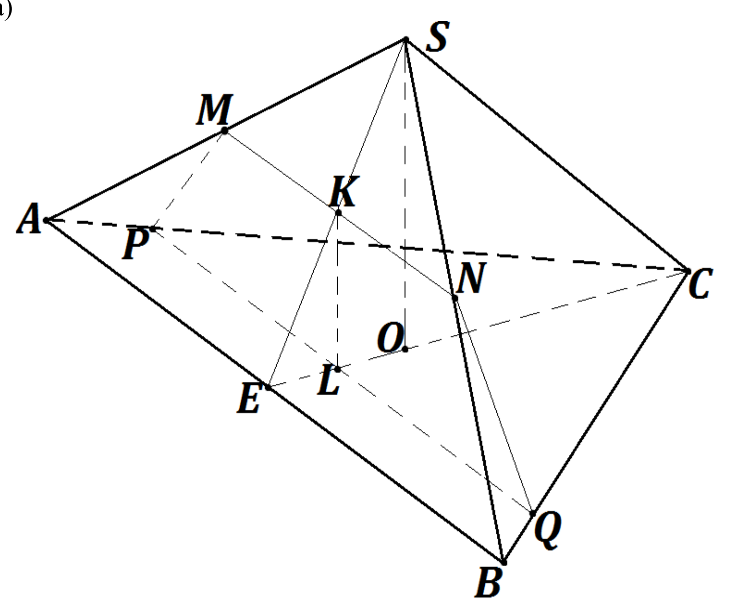
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

.

Решение:

а)



Пусть O – центр основания пирамиды

Рассмотрим $\triangle ABS$ – равнобедренный:

Проведём медиану SE, являющуюся ещё и биссектрисой и высотой

Пусть $(SEC) \cap MN = K$

Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$
Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$
Построим прямую NQ, т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости
Построим прямую PM, т.к. точки P и M лежат в одной плоскости
$MNQP$ – сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ – прямоугольный:
Т.к. K – середина SE и $KL \parallel SO$, то KL – средняя линия $\triangle SOE$
=> L – середина OE
Пусть $EL = OL = x$
Т.к. CE – медиана в $\triangle ABC$, то:

$$\frac{OC}{OE} = 2:1$$

$$=> OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$$

$$=> \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$

■

б)

$$V_{CMNQP} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNQP} \cdot CL$$

Найдём основания и высоту трапеции $MNQP$:

$MN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (т.к. MN – средняя линия $\triangle ABS$)

$PQ = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10$ (т.к. $\frac{CL}{LE} = 5:1$)

$$OC = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2} = 4$ (по теореме Пифагора)

$KL = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (т.к. KL – средняя линия $\triangle SOE$)

$$S_{MNQP} = \frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = \frac{6 + 10}{2} \cdot 2 = 16$$

$$CL = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = 5\sqrt{3}$$

$$V_{CMNQP} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{80\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: б) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

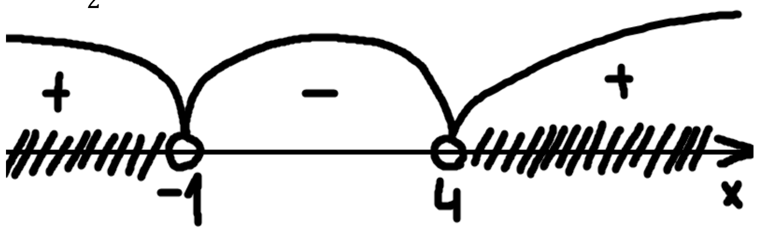
$$9\log_{12}(x^2 - 3x - 4) \le 10 + \log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

.

Решение:
ОДЗ:
1.
$x^2 - 3x - 4 > 0$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$

$$t_1 = \frac{3+5}{2} = 4$$

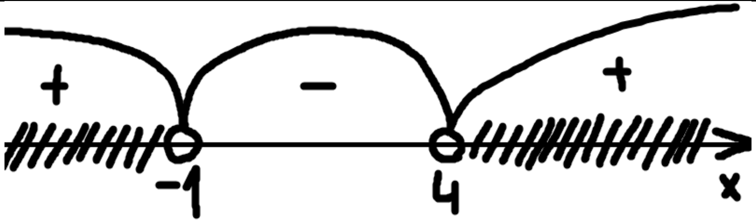
$$t_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$



2.

$$\frac{(x+1)^9}{x-4} > 0$$

$x+1=0$ $x=-1$	$x-4\neq 0$ $x\neq 4$



Разложение квадратного трёхчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$9\log_{12}(x+1)(x-4)\leq 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m = m\cdot\log_a b$

$$\log_{12}(x+1)^9(x-4)^9\leq 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b+\log_a c=\log_a b\cdot c$

Вычитание логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b-\log_a c=\log_a\dfrac{b}{c}$

$$\log_{12}(x+1)^9+\log_{12}(x-4)^9\leq 10+\log_{12}(x+1)^9-\log_{12}(x-4)$$

$$\log_{12}(x-4)^9\leq 10-\log_{12}(x-4)$$

$$\log_{12}(x-4)^9+\log_{12}(x-4)\leq 10$$

$$\log_{12}(x-4)^{10}\leq\log_{12}12^{10}$$

$$(x-4)^{10}\leq 12^{10}$$

=>

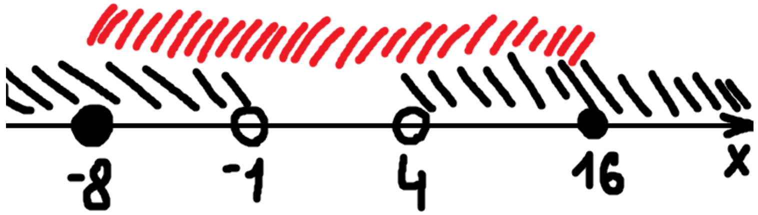
$|x-4|\leq 12$

=>

$-12\leq x-4\leq 12$

$-8\leq x\leq 16$

Объединим все найденные корни и промежутки на числовой прямой



Ответ: $[-8;-1)\cup(4;16]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соотвественно.

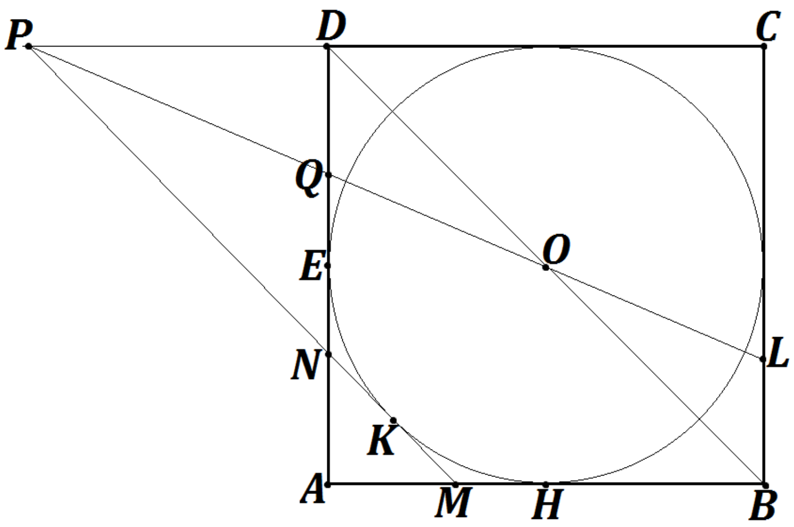
а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM:MB=1:2$?

.

Решение:

а)



Пусть
E – точка касания AD и окружности
K – точка касания MN и окружности
H – точка касания AB и окружности

$EN = NK$
$KM = MH$
(по свойству касательных)

$P_{AMN} = AM + MN + AN$
$P_{AMN} = AM + (NK + KM) + AN$
$P_{AMN} = AM + (EN + MH) + AN$
$P_{AMN} = (AM + MH) + (AN + EN) = AH + AE$
$P_{AMN} = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(AB + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2AB = AB$
■

б)
Пусть
O – центр вписанной в квадрат окружности
$PO \cap BC = L$
$PO \cap AD = Q$

$\frac{BL}{CL}$ –?

$AM: MB = 1: 2$
Пусть
$AM = 2x$
$MB = 4x$
$AD = AM + MB = 2x + 4x = 6x$
$AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 6x = 3x = AH$
$EN = y = NK$

Рассмотрим $\triangle AMN$ – прямоугольный
$AM = 2x$
$AN = AE - EN = 3x - y$
$MH = AH - AM = 3x - 2x = x = KM$
$MN = NK + KM = x + y$

По теореме Пифагора:
$MN^2 = AN^2 + AM^2$
$(x + y)^2 = (3x - y)^2 + (2x)^2$
$x^2 + 2xy + y^2 = 9x^2 - 6xy + y^2 + 4x^2$
$12x^2 - 8xy = 0$
$4x(3x - 2y) = 0$

$4x = 0$ $x = 0$ (посторонний корень)	$3x - 2y = 0$ $3x = 2y$ $y = \frac{3}{2}x$

=>
$EN = \frac{3}{2}x$
$AN = 3x - y = 3x - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x$
$MN = x + y = x + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}x$

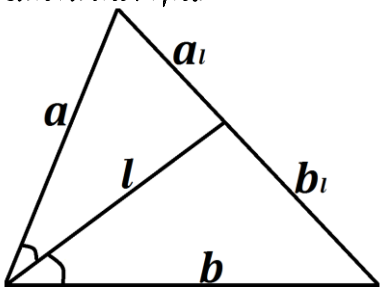
Проведём BD – диаметр квадрата

$\triangle ODQ = \triangle OBL$ по двум сторонам и углу между ними
$$\left(\begin{matrix} DO = BO \\ QO = LO \\ \angle DOQ = \angle BOL \text{ – вертикальные} \end{matrix}\right)$$

=>
$BL = DQ$

PO − биссектриса угла P
(по свойству касательных, проведённых из одной точки)

Свойство биссектрисы



$$\frac{a_l}{b_l} = \frac{a}{b}$$

Воспользуемся свойством биссектрисы для $\triangle DPN$

$$\frac{QD}{QN} = \frac{PD}{PN}$$

$\triangle PDN \sim \triangle AMN$ по двум углам

$$\frac{PD}{AM} = \frac{PN}{MN}$$

$$\frac{PD}{2x} = \frac{PN}{\frac{5}{2}x}$$

$$\frac{5}{2}PD = 2PN \qquad \Big|:10PN$$

$$\frac{PD}{4PN} = \frac{1}{5} \qquad \Big|\cdot 4$$

$$\frac{PD}{PN} = \frac{4}{5} = \frac{QD}{QN}$$

$$DN = AD - AN = 6x - \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}x$$

=>

$$QD = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2}x = 2x = BL$$

=>

$$CL = BC - BL = 6x - 2x = 4x$$

$$\frac{BL}{CL} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180128

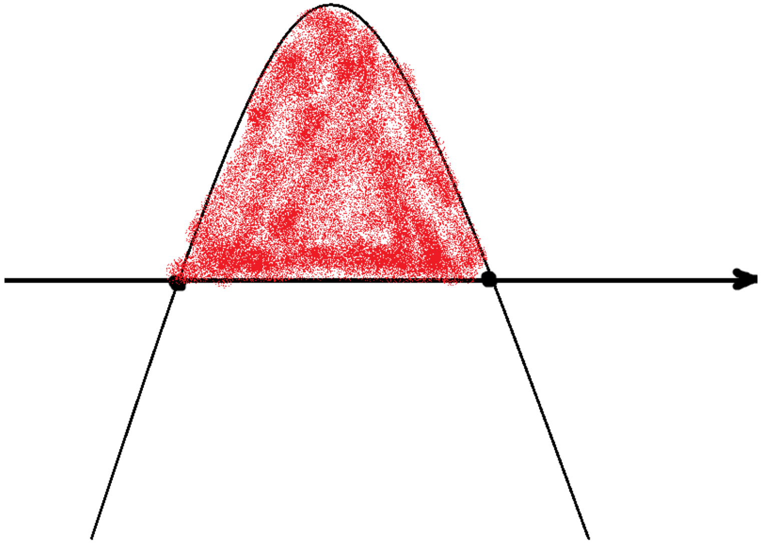
каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Решение:

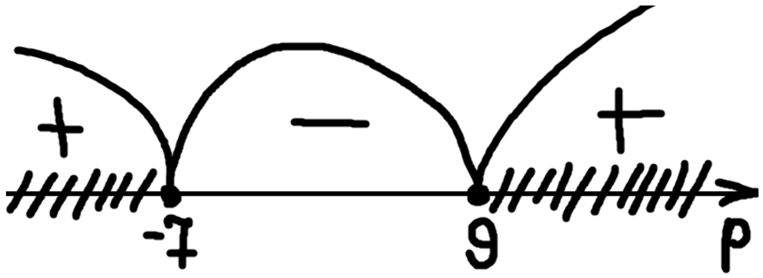
Прибыль за 3 года должна быть не менее 75 млн рублей, получаем неравенство:

$$3 \cdot \left(px - (0{,}5x^2 + x + 7)\right) \geq 75$$
$$px - (0{,}5x^2 + x + 7) \geq 25$$
$$-0{,}5x^2 + px - x - 32 \geq 0$$
$$-0{,}5x^2 + x(p-1) - 32 \geq 0$$

Это квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями вниз, и она будет ≥ 0 если будет иметь 2 корня или 1 корень



=>
$D \geq 0$
$b^2 - 4ac \geq 0$
$(p-1)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-32) \geq 0$
$(p-1)^2 - 64 \geq 0$
$(p-1-8)(p-1+8) \geq 0$
$(p-9)(p+7) \geq 0$



p – это цена, поэтому отрицательные значения отбрасываем и выбираем наименьшее подходящее положительное, как и требовалось в условии

Ответ: 9

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$\sqrt{1-2x} = a - 3|x|$
имеет более двух корней.

Решение:

ОДЗ:
$1 - 2x \geq 0$
$x \leq 0{,}5$

$\sqrt{1-2x} + 3|x| = a$

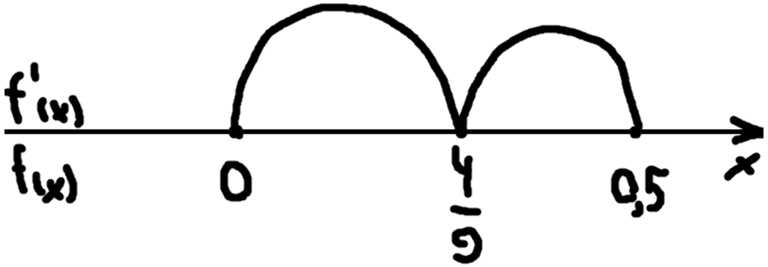
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180128

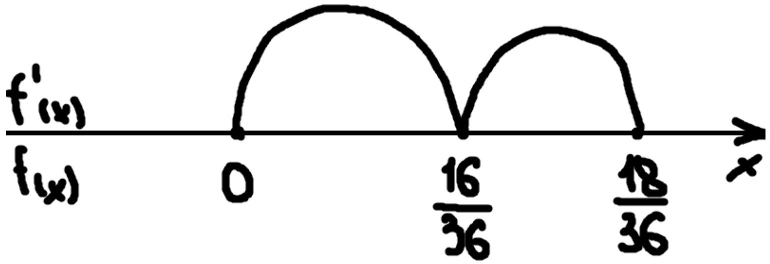
Решим графически:

Пусть $f(x) = \sqrt{1-2x} + 3|x|$
1 случай раскрытия модуля
Если $0 \le x \le 0{,}5$, то
$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3x$

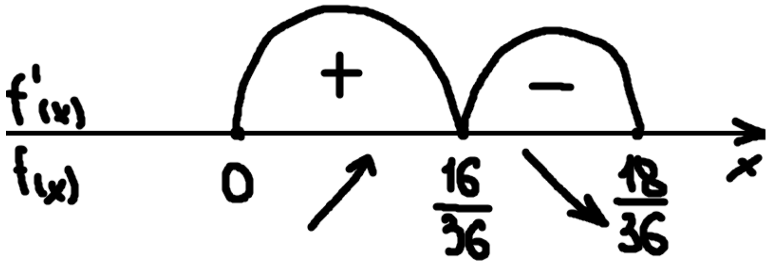
Исследуем $f(x)$ на возрастание/убывание
$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} + 3 = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}} + 3 = \frac{3\sqrt{1-2x}-1}{\sqrt{1-2x}}$$
$$\frac{3\sqrt{1-2x}-1}{\sqrt{1-2x}} = 0$$

$3\sqrt{1-2x} - 1 = 0$
$\sqrt{1-2x} = \frac{1}{3}$
$1 - 2x = \frac{1}{9}$
$\frac{8}{9} = 2x$
$x = \frac{4}{9}$



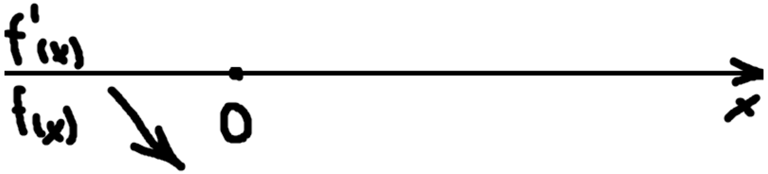


Подставим $x = \frac{17}{36}$ в производную, чтобы определить знак на интервале
$$f'(x) = \frac{3\sqrt{1-2x}-1}{\sqrt{1-2x}}$$
$$f'\left(\frac{17}{36}\right) = \frac{3\sqrt{1-2\cdot\frac{17}{36}}-1}{\sqrt{1-2\cdot\frac{17}{36}}} = \frac{3\sqrt{\frac{1}{18}}-1}{\sqrt{\frac{1}{18}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-1}{\sqrt{\frac{1}{18}}} < 0$$
=>

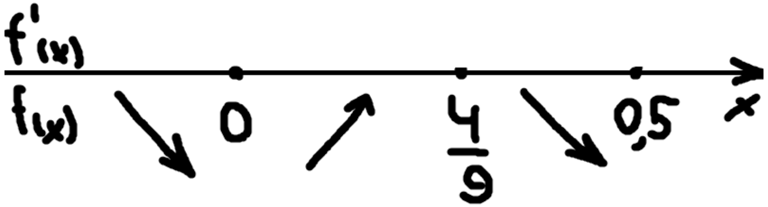


2 случай раскрытия модуля
Если $x < 0$, то
$f(x) = \sqrt{1-2x} - 3x$

$\sqrt{1-2x}$ – убывающая функция
$-3x$ – убывающая функция
(т.к. при увеличении значения x, значение y становится всё меньше)
=>
$f(x) = \sqrt{1-2x} - 3x$ убывает при $x < 0$



Склеим данные о монотонности $f(x)$ на одной числовой прямой:



Найдём значения в данных трёх точках:

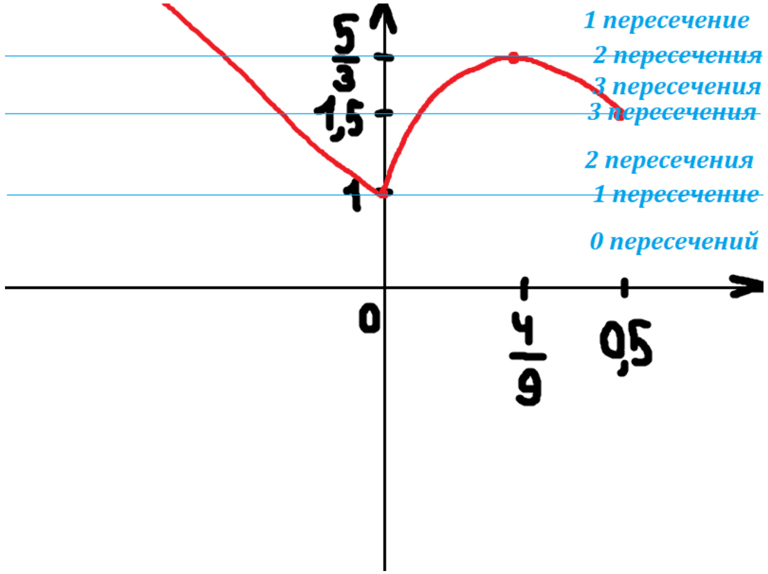
$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3|x|$

$f(0) = \sqrt{1-2\cdot 0} + 3|0| = 1$

$f\left(\frac{4}{9}\right) = \sqrt{1 - 2\cdot\frac{4}{9}} + 3\left|\frac{4}{9}\right| = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - 2\cdot\frac{1}{2}} + 3\left|\frac{1}{2}\right| = 1{,}5$

Построим эскиз функции $f(x)$ с учётом найденных данных



Графически определим сколько решений имеет уравнение $\sqrt{1-2x} + 3|x| = a$

Если

$a > \frac{5}{3}$ (1 решение)

$a = \frac{5}{3}$ (2 решения)

$1{,}5 < a < \frac{5}{3}$ (3 решения)

$a = 1{,}5$ (3 решения)

$1 < a < 1{,}5$ (2 решения)

$a = 1$ (1 решение)

$a < 1$ (0 решений)

Ответ: $a \in \left[1{,}5; \frac{5}{3}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные	2

точки искомого множества значений а	
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.
Три числа назовём отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?
.

Решение:
Три числа могут быть длинами сторон треугольника, если выполняется правило неравенства треугольника

а)
Может, например, геометрическая прогрессия с $b_1 = 1$ и $q = 2$
1 2 4 8 16

$1 + 2 < 4$
$2 + 4 < 8$
$4 + 8 < 16$

3 нарушения неравенства треугольников
=>
Нет ни одной хорошей тройки

б)
Три числа могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника, если выполняется теорема Пифагора

Пусть
a, b, c и d — эти различные натуральные числа
$a < b < c < d$
Тогда гипотенузой могут быть только c и d (потому что требуется наличие двух сторон меньше, чем они сами)

$$\begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array} \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a^2 + c^2 = d^2 \\ b^2 + c^2 = d^2 \end{cases}$$

Из уравнений $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ следует, что $a = b$, что противоречит условию различности
=>
Не может

в)
Пусть дан набор чисел
$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ j$

Пусть
$a < b < c < d < e < f < g < h < i < j$

j может быть гипотенузой максимум в 4 треугольниках
(т.к. при большем количестве треугольников какие-то из оставшихся чисел окажутся равны аналогично ситуации в пункте б)

j может быть гипотенузой максимум в 4 треугольниках
i может быть гипотенузой максимум в 4 треугольниках
h может быть гипотенузой максимум в 3 треугольниках
g может быть гипотенузой максимум в 3 треугольниках
f может быть гипотенузой максимум в 2 треугольниках
e может быть гипотенузой максимум в 2 треугольниках
d может быть гипотенузой максимум в 1 треугольнике
c может быть гипотенузой максимум в 1 треугольнике
=>
20 – Наибольшее возможное количество отличных троек

Пример такого набора чисел:
$1\ \sqrt{2}\ \sqrt{3}\ \sqrt{4}\ \sqrt{5}\ \sqrt{6}\ \sqrt{7}\ \sqrt{8}\ \sqrt{9}\ \sqrt{10}$

Ответ: а) да, б) нет, в) 20

Содержание критерия	**Баллы**

Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4