Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 .

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

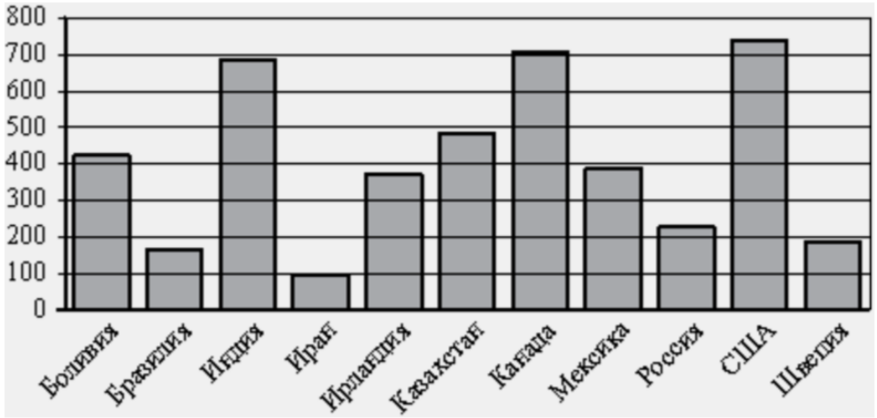
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее количество таких тетрадей можно будет купить на 450 рублей после понижения цены на 10%?

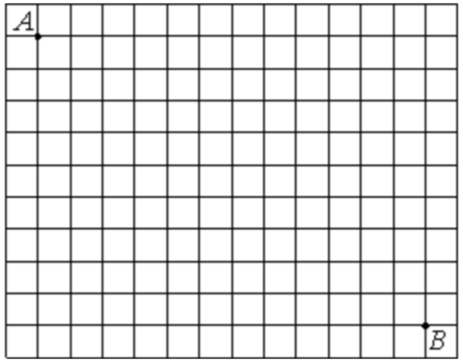
Ответ: ____________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимали США, одиннадцатое место – Иран. Какое место занимал Казахстан?



Ответ: ____________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.



Ответ: ___________________________.

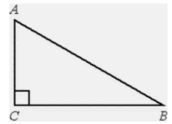
4 Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$6^{1+3x} = 36^{2x}$.

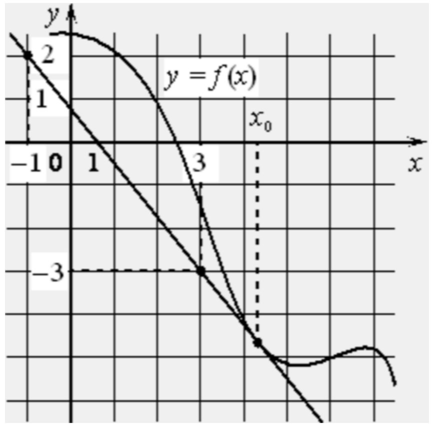
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 40$, $AC = 4\sqrt{51}$. Найдите $\sin A$.



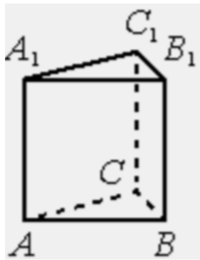
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 9.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180121

9 Найдите значение выражения

$\frac{\log_8 14}{\log_{64} 14}$.

Ответ: ___________________________.

10 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$T(t) = T_0 + bt + at^2$,

где t – время (в мин.), $T_0 = 680$ К, $a = -16\ \frac{\text{К}}{\text{мин}^2}$, $b = 224$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ___________________________.

11 Моторная лодка прошла против течения реки 187 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции
$y = (6 - 4x)\cos x + 4\sin x + 12$ принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

15 Решите неравенство
$$\frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6} \le 0.$$

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 120°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 6\sqrt{3}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180121

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \left|\frac{6}{x} - 3\right|$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет ровно один корень.

19 Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \ldots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180121

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180121

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	16
2	4
3	15
4	0,08
5	1
6	0,7
7	-1,25
8	12
9	2
10	5
11	14
12	1,5
13	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $1{,}5\pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$
14	$0{,}4\sqrt{10}$
15	$\{0\}\cup(1;\log_2 3)$
16	3
17	20,25 млн
18	$\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$
19	а) нет, б) да, в) 2

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

.

Решение:

а)

Синус двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$2\sin x\cdot\cos x = \sin x - 2\cos x + 1$

$2\sin x\cdot\cos x - \sin x + 2\cos x - 1 = 0$

$\sin x\cdot(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1) = 0$

$(2\cos x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$2\cos x - 1 = 0$ $2\cos x = 1$	$\sin x + 1 = 0$ $\sin x = -1$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{2} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = 1{,}5\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi = 3{,}5\pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

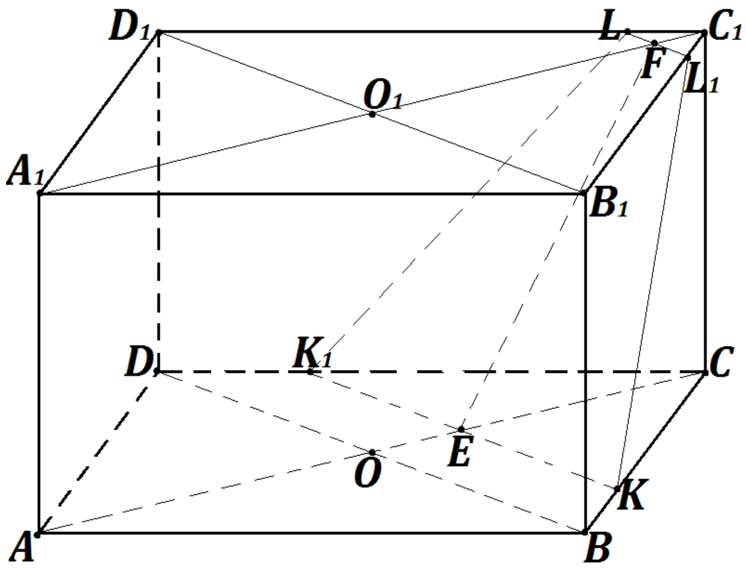
Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $1{,}5\pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

Решение:
а)



Построим плоскость γ:
Построим прямую BD
Построим прямую KK_1 такую, что $KK_1 \parallel BD$
Построим прямую LL_1 такую, что $LL_1 \parallel BD$
Построим прямую LK_1, т.к. точки L и K_1 лежат в одной плоскости
Построим прямую KL_1, т.к. точки K и L_1 лежат в одной плоскости
Трапеция KK_1LL_1 – сечение плоскостью γ

$BK = 2$

=>
$CK = BC - BK = 8 - 2 = 6$
$C_1L = 2$
=>
$D_1L = C_1D_1 - C_1L = 8 - 2 = 6$

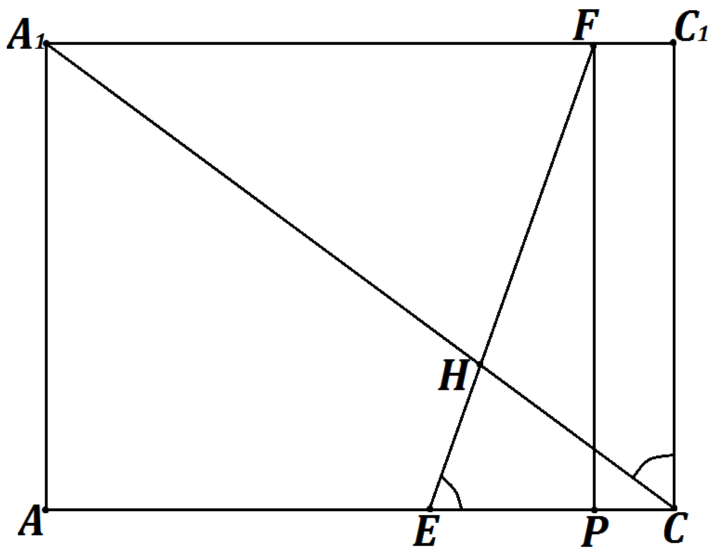
Рассмотрим прямоугольник ACC_1A_1:
Пусть $AC \cap KK_1 = E$
Пусть $A_1C_1 \cap LL_1 = F$
Пусть $AC \cap BD = O$
Пусть $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$
$AA_1 = 4\sqrt{2}$
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)

Распишем отношение высот и сходственных сторон в подобных треугольниках CKK_1 и CBD

$$\frac{CE}{OC} = \frac{CK}{BC}$$
$$\frac{CE}{OC} = \frac{6}{8}$$
$$\frac{CE}{OC} = \frac{3}{4}$$
=>
$$CE = \frac{3}{8} \cdot AC = \frac{3}{8} \cdot 8\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Распишем отношение высот и сходственных сторон в подобных треугольниках C_1LL_1 и $B_1C_1D_1$

$$\frac{C_1F}{C_1O_1} = \frac{C_1L}{C_1D_1}$$
$$\frac{C_1F}{C_1O_1} = \frac{2}{8}$$
$$\frac{C_1F}{C_1O_1} = \frac{1}{4}$$
=>
$$C_1F = \frac{1}{8} \cdot AC = \frac{1}{8} \cdot 8\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

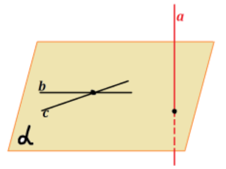


Пусть $A_1C \cap EF = H$
Требуется доказать, что $\angle EHC = 90°$

Пусть P — основание перпендикуляра из точки F на прямую AC
$EP = CE - CP = CE - C_1F = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$$\operatorname{tg} \angle FEP = \frac{FP}{EP} = \frac{AA_1}{EP} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$$
$$\operatorname{tg} \angle A_1CC_1 = \frac{A_1C_1}{CC_1} = \frac{AC}{AA_1} = \frac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 2$$
=> $\angle FEP = \angle A_1CC_1$
Пусть
$\angle FEP = \angle A_1CC_1 = \alpha$
Тогда
$\angle A_1CA = 90 - \alpha$
$\angle EHC = 180 - \alpha - (90 - \alpha) = 90°$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$A_1C \perp EF$

$A_1C \perp KK_1$ (по теореме о трёх перпендикулярах, т.к. $KK_1 \perp AC$, являющейся проекцией A_1C на плоскость ABC)

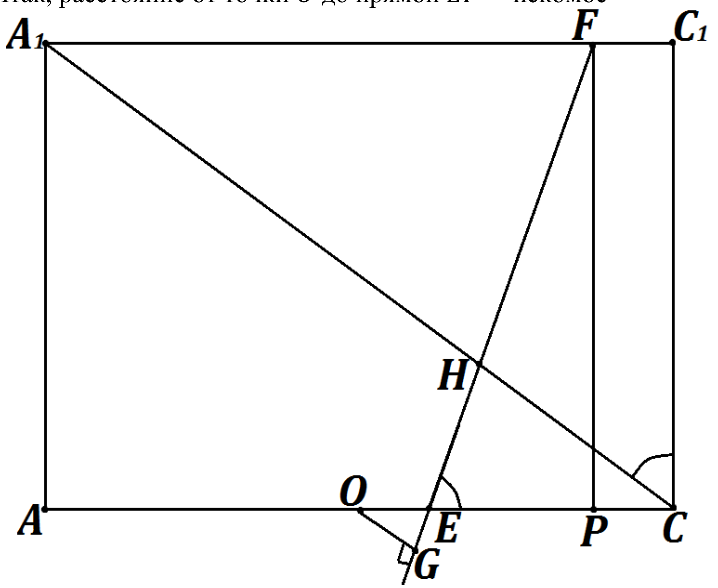
$=> A_1C \perp \gamma$

■

б)

Расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки O до прямой EF, потому что B и O лежат на одной прямой

Итак, расстояние от точки O до прямой EF — искомое



Пусть G — основание перпендикуляра из точки O на прямую EF

OG—?

$\operatorname{tg}\angle FEP = \operatorname{tg}\angle OEG = 2$

Основные Тригонометрические формулы

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\cos\angle OEG = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\angle OEG = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{OG}{OE}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{OG}{OC - CE}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{OG}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{OG}{\sqrt{2}}$$

$$OG = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 0{,}4\sqrt{10}$$

Ответ: б) $0{,}4\sqrt{10}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{2^x}{2^x-3}+\frac{2^x+1}{2^x-2}+\frac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\le 0.$$

Решение:

Пусть $2^x = t$

$$\frac{t}{t-3}+\frac{t+1}{t-2}+\frac{5}{t^2-5t+6}\le 0$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$t^2-5t+6=0$

$D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1$

$t_1=\dfrac{5+1}{2}=3$

$t_2=\dfrac{5-1}{2}=2$

$t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$

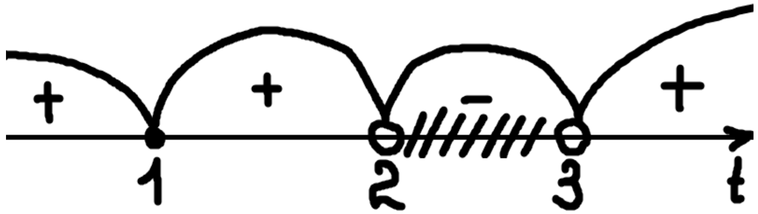
$$\frac{t}{t-3}+\frac{t+1}{t-2}+\frac{5}{(t-2)(t-3)}\le 0$$

$$\frac{t^2-2t+t^2+t-3t-3+5}{(t-2)(t-3)}\le 0$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-2)(t-3)}\le 0$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-2)(t-3)}\le 0$$

$2(t-1)^2=0$	$(t-2)(t-3)\ne 0$
$t=1$	$t\ne 2$
	$t\ne 3$



$t=1$	$2<t<3$
$2^x=1$	$2<2^x<3$
$2^x=2^0$	$2^1<2^x<2^{\log_2 3}$
$x=0$	$1<x<\log_2 3$

Ответ: $\{0\}\cup(1;\log_2 3)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

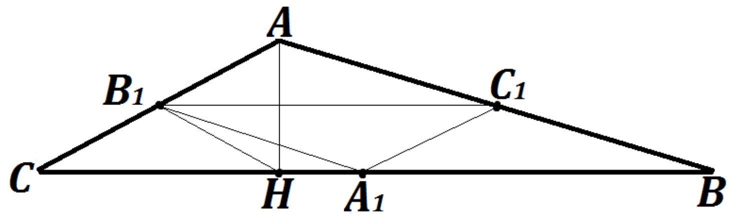
16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC=120°$, $\angle BCA=45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC=6\sqrt{3}$.

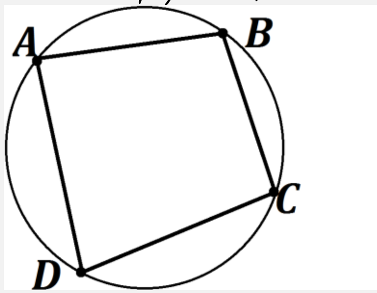
Решение:

а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1C_1B_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность

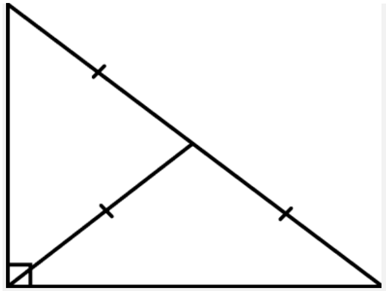


$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$

Наша задача – доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:
$\angle BCA = 45°$
$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 45 - 120 = 15°$
$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 15 = 75°$
$\angle CAH = \angle BAC - \angle BAH = 120 - 75 = 45°$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ACH$ – прямоугольный
B_1H – медиана
=>
$B_1H = AB_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)
=>
$\triangle AB_1H$ – равнобедренный
=>
$\angle AHB_1 = \angle CAH = 45°$

Признаки параллелограмма

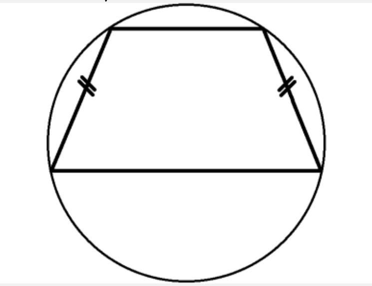
Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $B_1C_1A_1C$
$\left.\begin{array}{l} A_1C_1 \parallel CB_1 \\ A_1C_1 = CB_1 \end{array}\right.$ (т.к. A_1C_1 – средняя линия)
=>
$B_1C_1A_1C$ – параллелограмм
=>
$\angle B_1C_1A_1 = \angle ACB = 45°$
$\angle A_1HB_1 = \angle AHA_1 + \angle AHB_1 = 90 + 45 = 135°$

$\angle B_1C_1A_1 + \angle A_1HB_1 = 45 + 135 = 180°$
=>
Четырёхугольник $A_1C_1B_1H$ можно вписать в окружность
=>
Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности
■

б)

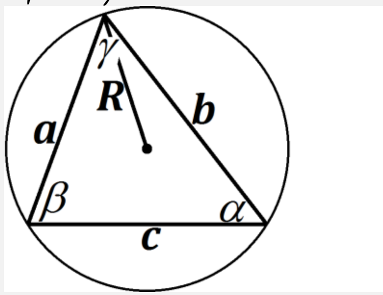
Свойство трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1C_1B_1H$ – равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



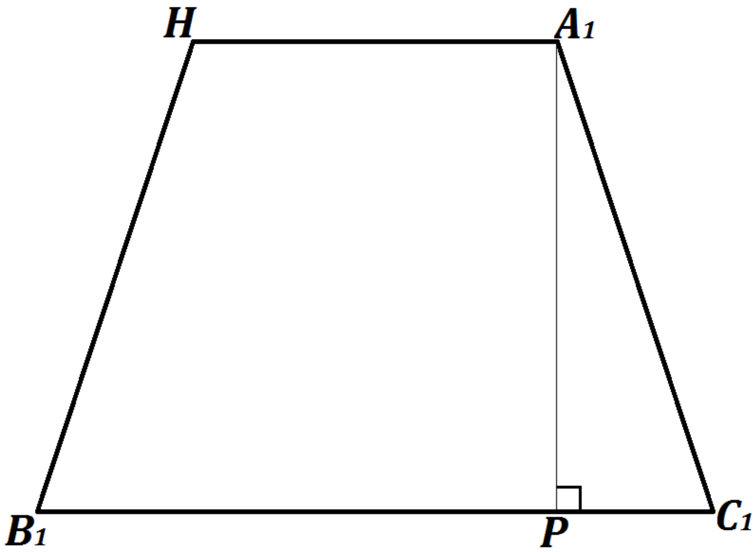
$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$
или
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sin 120°} = \frac{AC}{\sin 15°}$$

$$AC = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\sin 120°} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12\sin 15°$$
=>
$$A_1C_1 = \frac{AC}{2} = \frac{12\sin 15°}{2} = 6\sin 15°$$
$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1C_1B_1H$:



Пусть
A_1P – высота трапеции

$\angle A_1C_1P = \angle ACB = 45°$
$\angle PA_1C_1 = 180 - \angle A_1PC_1 - \angle A_1C_1P = 180 - 90 - 45 = 45°$
=>
$\Delta\ A_1C_1P$ – равнобедренный
По теореме Пифагора:
$A_1C_1{}^2 = C_1P^2 + A_1P^2$

$A_1C_1{}^2 = 2C_1P^2$
$(6\sin 15°)^2 = 2C_1P^2$
$36\sin^2 15° = 2C_1P^2$
$C_1P^2 = 18\sin^2 15°$
$C_1P = 3\sqrt{2}\sin 15°$

$A_1H = B_1C_1 - 2C_1P = 3\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\sin 15°$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$\sin 15° = \sin(45 - 30)°$
$\sin 15° = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$A_1H = 3\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$A_1H = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$A_1H = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3 = 3$$

Ответ: б) 3

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

.

Решение:
Пусть n – срок кредита

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	9	$\frac{9}{n}$	$\frac{25}{100}\cdot 9 = 2{,}25$
…			
n	$\frac{9}{n}$	$\frac{9}{n}$	$\frac{25}{100}\cdot\frac{9}{n} = \frac{2{,}25}{n}$

Очевидно, что наименьший годовой платёж будет в последнем году (потому что платежи равномерно уменьшаются в течение n лет)
=>
Наименьший годовой платёж = 1,25 млн

$$\frac{9}{n}+\frac{2{,}25}{n}=1{,}25$$

$$\frac{11{,}25}{n}=1{,}25$$

$$n=9$$

=>
В таблице все значения становятся известными:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	9	$\frac{9}{9}=1$	2,25
…			
9	1	1	$\frac{2{,}25}{9}=0{,}25$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии
$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

$$\text{ОСВ}=9\cdot 1+\frac{2{,}25+0{,}25}{2}\cdot 9$$

$$\text{ОСВ}=9+1{,}25\cdot 9=20{,}25$$

Ответ: 20,25 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax-1=\left|\frac{6}{x}-3\right|$$
на промежутке $(0;+\infty)$ имеет ровно один корень.

Решение:
Решим графически:

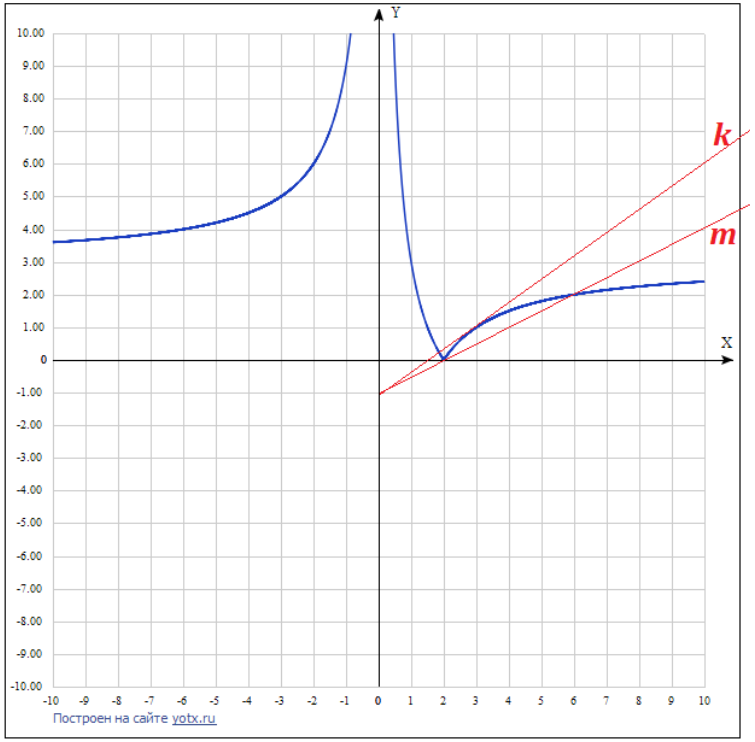
Построим $y=\left|\frac{6}{x}-3\right|$ (можно строить только в первой и четвёртой четверти)

Уравнение $y=ax-1$ задаёт множество прямых, проходящих через точку $(0;-1)$

Если $a=1$, то получаем 1 пересечение с гиперболой
Если $a<0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. прямая в 4-й четверти будет располагаться ниже оси Ox)
Если $a=0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. прямая станет параллельна оси абсцисс)

Пусть
m – прямая, проходящая через точку $(2;0)$, т.е. через точку «перелома» гиперболы
k – прямая, проходящая через точку касания гиперболы

Проведём прямые m и k:



Гипербола в точке касания – это гипербола с отрицательным коэффициентом, поэтому раскрываем модуль, меняя знаки на противоположные

$y = \left|\frac{6}{x} - 3\right|$

$y = -\frac{6}{x} + 3$ – гипербола при $x > 2$

Найдём значение параметра a у прямой m:

$y = ax - 1$ проходит через т. $(2; 0)$

$0 = a \cdot 2 - 1$

$1 = 2a$

$a = \frac{1}{2}$

Найдём значение параметра a у прямой k:

$y = ax - 1$ является касательной к гиперболе $-\frac{6}{x} + 3$

Условие касания функции и прямой

$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$

$$\begin{cases} (ax-1)' = \left(-\frac{6}{x} + 3\right)' \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = (-6 \cdot x^{-1} + 3)' \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{6}{x^2} \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 3 \end{cases}$$

Подставим значение a под второе уравнение системы:

$\frac{6}{x^2} \cdot x - 1 = -\frac{6}{x} + 3$

$\frac{6}{x} - 1 = -\frac{6}{x} + 3$

$\frac{12}{x} = 4$

$x = 3$

$a = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{3^2} = \frac{2}{3}$

Если $a = \frac{1}{2}$, то получаем 2 пересечения с гиперболой

Если $a = \frac{2}{3}$, то получаем 2 пересечения с гиперболой

Если $\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$, то получаем 3 пересечения с гиперболой

Если $0 < a < \frac{1}{2}$, то получаем 1 пересечение с гиперболой

Если $a > \frac{2}{3}$, то получаем 1 пересечение с гиперболой

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \dots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

Решение:

а)
В данном множестве много простых чисел, например:
199 – простое число, поэтому множество нельзя разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел: одно из произведений будет делиться на 199, а другое нет, т.к. в этом произведении не может содержаться делителя 199
=>
Нет

б)
Заметим, что

$2 \cdot 2^{200} = 2^{201}$
$4 \cdot 2^{199} = 2^{201}$
$8 \cdot 2^{198} = 2^{201}$
и т.д.
=>
Получаем два подмножества:
$\{2^1; 2^{200}; 2^3; 2^{198}; \dots; 2^{99}; 2^{102}\}$
$\{2^2; 2^{199}; 2^4; 2^{197}; \dots; 2^{100}; 2^{101}\}$

В каждом из подмножеств произведение всех 100 чисел равно $(2^{201})^{50}$
=>
Множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ является хорошим
=>
Да

в)
5, 7, 11 – простые числа, которые не могут входить в хорошие подмножества (тройку сюда не включаем, т.к. у других чисел множества есть тройка в числе делителей)
=>
У нас остались $\{1; 3; 4; 6; 9; 12\}$

К числу 1 в пару можно взять только 12
$\{1; 12; 3; 4\}$

К числу 3 в пару можно взять только 12
$\{3; 12; 4; 9\}$

К числам 4, 6, 9 и 12 в пару не получается взять никакое число

Ответ: а) нет, б) да, в) 2

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а;	1

- обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4