Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

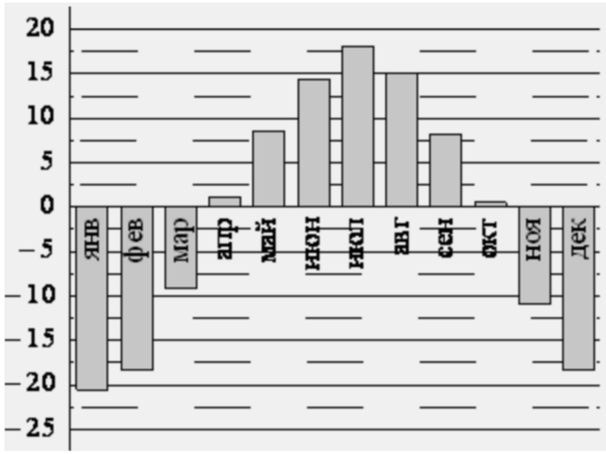
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Система навигации самолёта информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 39000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

Ответ: ___________________.

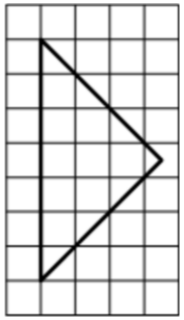
2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Иркутске по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев с начала февраля по конец августа, когда среднемесячная температура в Иркутске положительна.



Ответ: ___________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180423

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его биссектрисы, выходящей из вершины прямого угла.



Ответ: ___________________________.

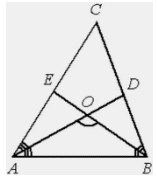
4 Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 80 докладов – первые два дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$\sqrt{28-2x}=2.$

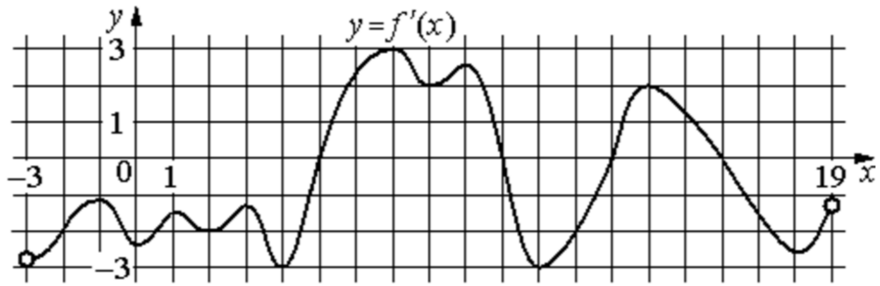
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен 58°, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



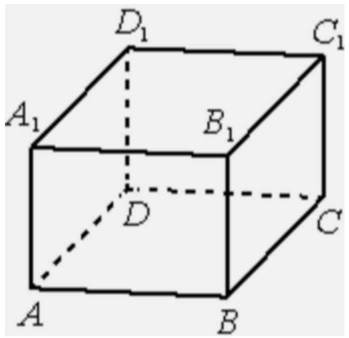
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y = f`(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 15]$.



Ответ: ___________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 28$, $AD = 16$, $AA_1 = 12$. Найдите синус угла между прямыми DD_1 и B_1C.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$\log_7 12{,}25 + \log_7 4$.

Ответ: ____________________________.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) – начальная масса изотопа, t (мин.) – время, прошедшее от начального момента, T (мин.) – период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 50$ мг. Период его полураспада $T = 5$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 12,5 мг?

Ответ: ____________________________.

11 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. За час автомобилист проезжает на 70 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 1 час 10 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку максимума функции

$y = -\dfrac{x^2 + 36}{x}$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$2\sin^2 x + 4 = 3\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём

$AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

15 Решите неравенство

$125^x - 25^x + \dfrac{4 \cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \le 4$.

16 В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180423

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a)\cdot\cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

19 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180423

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	11895
2	5
3	3,5
4	0,35
5	12
6	119
7	1
8	0,8
9	2
10	10
11	20
12	6
13	а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, -\frac{5\pi}{6}+2\pi n.$ б) $-\frac{7\pi}{6}$
14	$6\sqrt{3}$
15	$\{0\} \cup [\log_5 4\,; 1)$
16	2,88
17	7 млн
18	$(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$
19	а) Не может, б) Не может, в) 4

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x + 4 = 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

.

Решение:

$2\sin^2 x + 4 = -3\sqrt{3}\cos x$

Основные тригонометрические формулы

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$2\cdot(1-\cos^2 x) + 4 + 3\sqrt{3}\cos x = 0$

$2 - 2\cos^2 x + 4 + 3\sqrt{3}\cos x = 0$

$-2\cos^2 x + 3\sqrt{3}\cos x + 6 = 0$

Пусть $\cos x = t$

$-2t^2 + 3\sqrt{3}t + 6 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 27 + 48 = 75 = \left(5\sqrt{3}\right)^2$

$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{-4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{-4} = 2\sqrt{3}$ (нет решений)

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

$x_2 = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = \frac{5\pi}{6} - 4\pi = -\frac{19\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{17\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{7\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

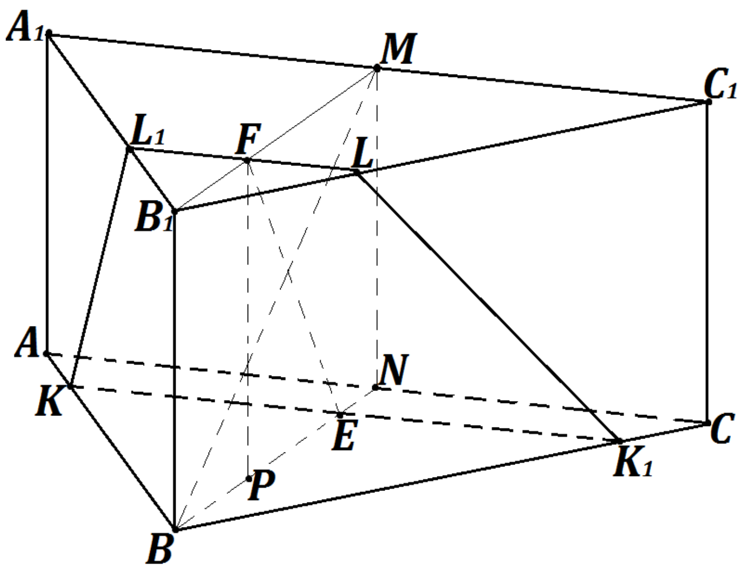
14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём
$AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Решение:

а)



Построим плоскость γ:

Построим прямую KK_1 такую, что $KK_1 \parallel AC$

Построим прямую K_1L, т.к. точки K_1 и L лежат в одной плоскости

Построим прямую LL_1 такую, что $LL_1 \parallel A_1C_1$

Построим прямую KL_1, т.к. точки K и L_1 лежат в одной плоскости

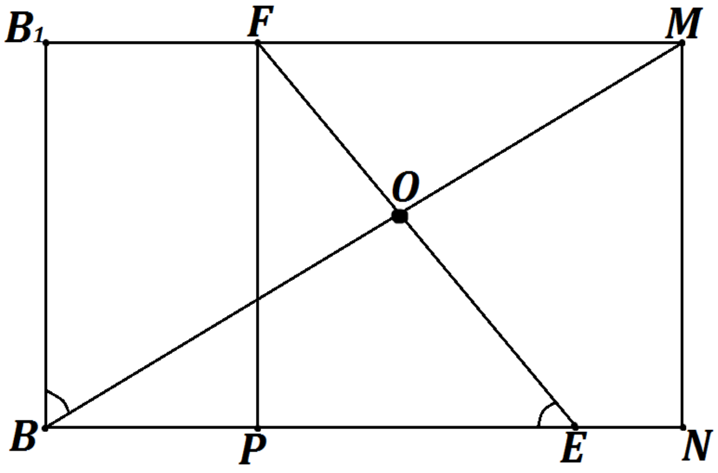
Трапеция KK_1LL_1 – искомое сечение плоскостью γ

Рассмотрим плоскость BB_1M:
Опустим перпендикуляр MN на прямую AC
Пусть $B_1M \cap LL_1 = F$
Пусть $BN \cap KK_1 = E$
BB_1MN – прямоугольник
$BB_1 = 3$
$B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$

$NE : BE = AK : BK$
$AK : BK = 2 : 4$
$\Rightarrow NE : BE = 1 : 2$
$NE = \frac{1}{3} \cdot B_1M = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$
$BE = \frac{2}{3} \cdot B_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

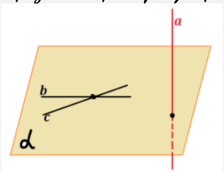
$B_1F : FM = B_1L : LC_1$
$B_1L : LC_1 = 2 : 4$
$\Rightarrow B_1F : FM = 1 : 2$
$B_1F = \frac{1}{3} \cdot B_1M = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$
$FM = \frac{2}{3} \cdot B_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Построим прямую EF
Докажем, что прямые EF и BM перпендикулярны:
$\angle BOE$ – искомый
Рассмотрим BB_1MN – прямоугольник:



Опустим перпендикуляр FP на прямую BN
$PE = FM - NE = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$
$\text{tg}\angle BEF = \frac{FP}{PE} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
$\text{tg}\angle MBB_1 = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$
$\Rightarrow \angle BEF = \angle MBB_1 = 60°$
$\Rightarrow \angle MBN = 90 - 60 = 30°$
$\Rightarrow BOE = 180 - \angle BEF - \angle MBN = 180 - 60 - 30 = 90°$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$BM \perp EF$
$BM \perp KK_1$ (т.к. $KK_1 \perp BN$, являющейся проекцией BM на плоскость ABC по теореме о трёх перпендикулярах)

$=> BM \perp \gamma$
■

б)
$BM \perp EF$
$=> MO$ – высота пирамиды

$BM = \sqrt{BN^2 + MN^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = 6$ (по теореме Пифагора)

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках FOM и BOE

$$\frac{MO}{BO} = \frac{FM}{BE}$$
$$\frac{MO}{BO} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

=>

$$MO = BO = \frac{1}{2} \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$
$$FE = \sqrt{FP^2 + PE^2} = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (по теореме Пифагора)}$$
$$LL_1 = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$
$$KK_1 = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

$$S_{KL_1LK_1} = \frac{L_1L + KK_1}{2} \cdot FE = \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$V_{MKL_1LK_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{KL_1LK_1} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$$

Ответ: б) $6\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$125^x - 25^x + \frac{4 \cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \leq 4.$$

.

Решение:
Пусть $5^x = t$

$$t^3 - t^2 + \frac{4t^2 - 20}{t - 5} - 4 \leq 0$$

$$\frac{t^4 - t^3 - 5t^3 + 5t^2 + 4t^2 - 20 - 4t + 20}{t - 5} \leq 0$$

$$\frac{t^4 - 6t^3 + 9t^2 - 4t}{t - 5} \leq 0$$

$$\frac{t(t^3 - 6t^2 + 9t - 4)}{t - 5} \leq 0$$

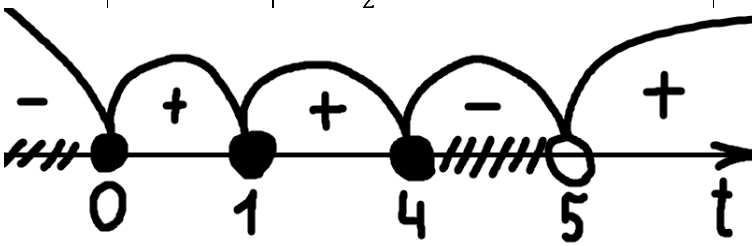
Заметим, что при подстановке $t = 1$ выражение $t^3 - 6t^2 + 9t - 4$ обращается в ноль, поэтому разложим его на множители с помощью деления «в столбик»:

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180423

$$\begin{array}{r|l} t^3-6t^2+9t-4 & t-1 \\ \cline{2-2} -\;t^3-t^2 \qquad\qquad & t^2-5t+4 \\ \hline -5t^2+9t \qquad & \\ -\;-5t^2+5t \qquad & \\ \hline 4t-4 & \\ -\;4t-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{t(t-1)(t^2-5t+4)}{t-5} \le 0$$

$t=0$	$t-1=0$ $t=1$	$t^2-5t+4=0$ $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot4=9$ $t_1=\dfrac{5+3}{2}=4$ $t_2=\dfrac{5-3}{2}=1$	$t-5\ne0$ $t\ne5$



$t\le0$ $5^x\le0$ (нет решений)	$t=1$ $5^x=5^0$ $x=0$	$4\le t<5$ $4\le5^x<5$ $5^{\log_5 4}\le5^x<5^1$ $\log_5 4\le x<1$

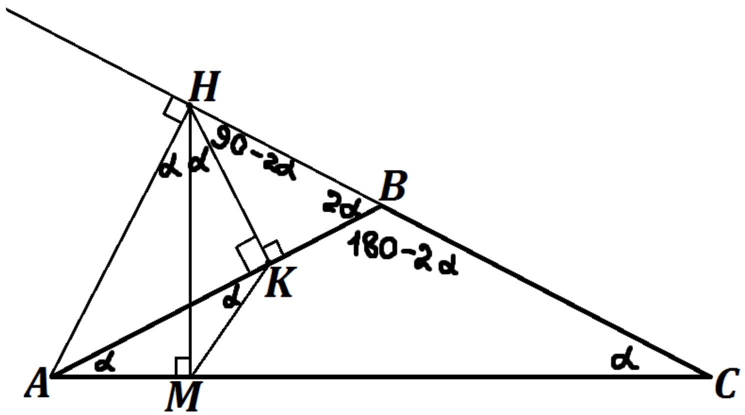
Ответ: $\{0\}\cup[\log_5 4\,;1)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.
б) Найдите MK, если $AB=5$, $AC=8$.

Решение:
а)



Проведём MK
$\angle AMH=\angle AKH=90°$
Углы AMH и AKH опираются на отрезок AH
=>

Можно провести окружность с диаметром AH, которая будет проходить через точки A, H, K и M
Мысленно проводим окружность через эти точки

Требуется доказать, что $\triangle AKM -$ равнобедренный, а он будет равнобедренным если углы AKM и KAM будут равны, попробуем это доказать:

Пусть
$\angle KAM = \alpha$

Тогда
$\angle ACB = \alpha$ (т.к. в равнобедренном треугольнике ABC углы при основании равны)
$\angle ABC = 180 - \angle BAC - \angle ACB = 180 - 2\alpha$ (по теореме о сумме углов треугольника)
$\angle KBH = 180 - \angle ABC = 180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$ (т.к. это смежные углы)
$\angle BHK = 180 - \angle HKB - \angle KBH = 180 - 90 - 2\alpha = 90 - 2\alpha$ (по теореме о сумме углов треугольника)
$\angle MHK = 180 - \angle HMC - \angle HCM - \angle BHK$ (по теореме о сумме углов треугольника)
$\angle MHK = 180 - 90 - \alpha - (90 - 2\alpha) = \alpha$
$\angle AHM = \angle AHC - \angle MHK - \angle BHK = 90 - \alpha - (90 - 2\alpha) = \alpha$
$\smile AM = 2\alpha$ (по теореме о вписанном угле)
$\angle AKM = \frac{1}{2} \cdot \smile AM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$
=>
$\angle KAM = \angle AKM$
=>
$\triangle AKM -$ равнобедренный
=>
$AM = MK$
■

б)
Проще найти AM

Рассмотрим $\triangle ABC -$ равнобедренный
$AB = BC = 5$
$AC = 8$
Найдём синус угла C

Пусть $BP -$ высота $\triangle ABC$
$CP = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$
$BP = \sqrt{BC^2 - CP^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ (по теореме Пифагора)
$\sin\alpha = \frac{BP}{BC} = \frac{3}{5}$
$\sin\alpha = \frac{3}{5} = \frac{AH}{AC}$
$\frac{3}{5} = \frac{AH}{8}$
$AH = \frac{24}{5}$

Рассмотрим $\triangle AHM -$ прямоугольный
$\sin\alpha = \frac{3}{5} = \frac{AM}{AH}$

$\frac{3}{5} = \frac{AM}{\frac{24}{5}}$

$AM = \frac{24 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{72}{25} = 2{,}88$
=>
$MK = 2{,}88$

Ответ: 2,88

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с	1

использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

Решение:
Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1+\frac{30}{100}\right)\cdot S = 1{,}3\cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}6\cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}3\cdot S - 0{,}6\cdot S = 0{,}7\cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}3\cdot 0{,}6\cdot S = 0{,}78\cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}25\cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}78\cdot S - 0{,}25\cdot S = 0{,}53\cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}3\cdot 0{,}25\cdot S = 0{,}325\cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	0

=>

01.04.2019	$0{,}325\cdot S - 0 = 0{,}325\cdot S$

По условию, каждая из выплат должна быть меньше 5 млн рублей, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}7\cdot S < 5 \\ 0{,}53\cdot S < 5 \\ 0{,}325\cdot S < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S < \frac{50}{7} \\ S < \frac{500}{53} \\ S < \frac{5000}{325} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S < \dfrac{50}{7} \\ S < \dfrac{500}{53} \\ S < \dfrac{200}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S < 7\dfrac{1}{7} \\ S < 9\dfrac{23}{53} \\ S < 15\dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Требуется найти наибольшее подходящее целое S
=>
$S = 7$

Ответ: 7 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$(4\cos x - 3 - a)\cdot\cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$
имеет хотя бы один корень.

Решение:

Косинус двойного угла
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

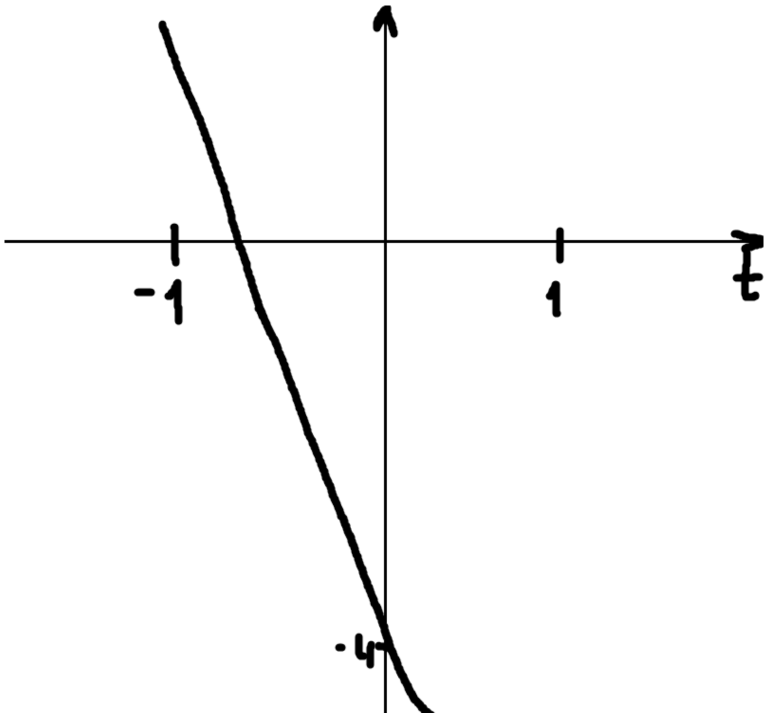
$4\cos^2 x - (3+a)\cdot\cos x - 5\cos^2 x + 2{,}5 + 1{,}5 = 0$
$-\cos^2 x - (3+a)\cdot\cos x + 4 = 0 \quad \Big|\cdot(-1)$
$\cos^2 x + (3+a)\cdot\cos x - 4 = 0$

Пусть $\cos x = t$
$-1 \le \cos x \le 1$
=>
$-1 \le t \le 1$

Перефразируем вопрос:
Найдём все значения a, при каждом из которых уравнение
$t^2 + (3+a)\cdot t - 4 = 0$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $-1 \le t \le 1$

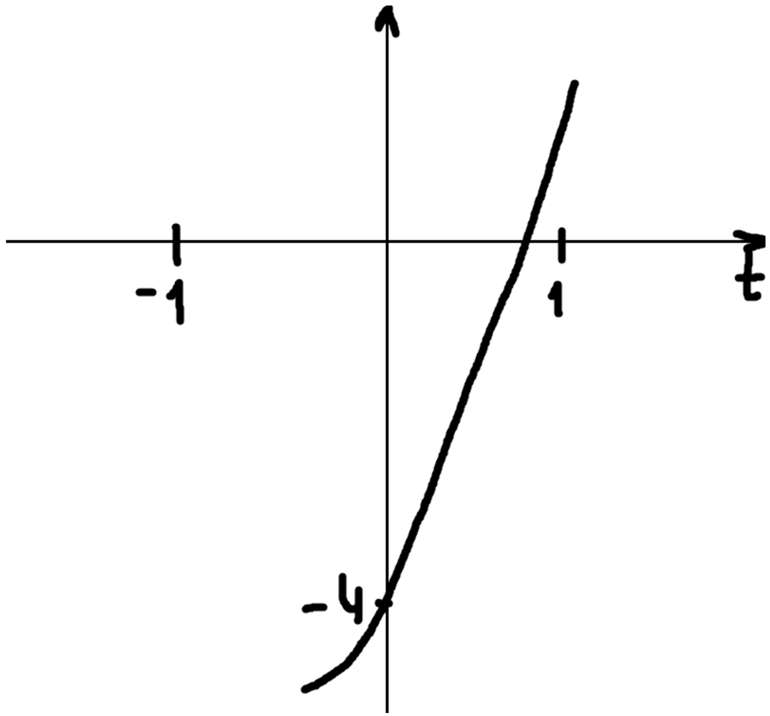
Рассмотрим квадратичную функцию:
$f(t) = t^2 + (3+a)\cdot t - 4$ – парабола (ветви вверх)
Проходит через точку $(0; -4)$

1 случай, при котором будет хотя бы одно решение, попадающее в отрезок $[-1; 1]$
(когда левая ветка параболы проходит через $t = -1$ или выше этой точки)



$f(-1) \geq 0$
$1 - 3 - a - 4 \geq 0$
$a \leq -6$

2 случай, при котором будет хотя бы одно решение, попадающее в отрезок $[-1; 1]$
(когда правая ветка параболы проходит через $t = 1$ или выше этой точки)



$f(1) \geq 0$
$1 + 3 + a - 4 \geq 0$
$a \geq 0$

3 случай (когда парабола стартует из точки $(0; -4)$)
Не подходит, т.к. наша парабола имеет коэффициент $a = 1$
=>
такая парабола пересечёт ось Ox в точках $x = \pm 2$, т.е. решений на нужном нам отрезке не будет

Ответ: $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3

С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение:
а)
Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Среди данных чисел нет противоположных
=>
Ни одна сумма не будет равна нулю
=>
Произведение не будет равно нулю
=>
Не может

б)
Среди 8 данных чисел 5 нечётных и 3 чётных
=>
Как минимум 2 суммы будут являться суммами нечётных чисел
=>
Эти 2 суммы будут чётными и в результате умножения сумм не получится нечётной единицы, потому что если один из множителей чётный, то всё произведение чётное

Пример:

1	−2	−3	4	−5	7	−8	9
−2	1	4	−3	9	−8	7	−5
н	н	н	н	ч	н	н	ч

$-1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 4\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 4=16$ (чётное число)
=>
Не может

в)
Как мы отметили в предыдущем пункте, как минимум 2 суммы будут являться чётными, т.к. они являются суммами пары нечётных чисел
=>
Искомое целое неотрицательное число – это как минимум 4. Приведём пример такой ситуации:

1	−2	−3	4	−5	7	−8	9
−2	1	4	−3	7	−5	9	−8
н	н	н	н	ч	ч	н	н

$-1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1=4$

Ответ: а) Не может, б) Не может, в) 4

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4