Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

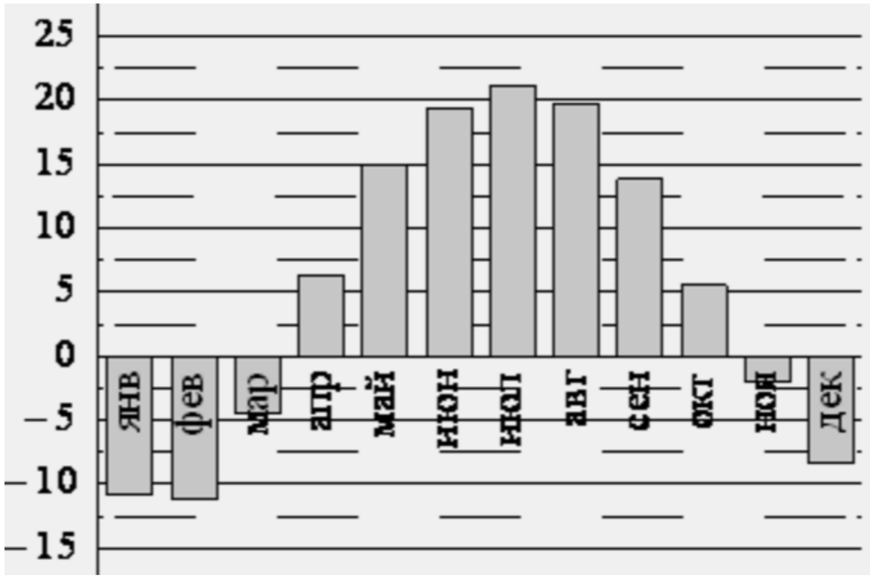
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180409

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Пачка сливочного масла стоит 55 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 10%. Сколько рублей заплатит пенсионер за две пачки масла?

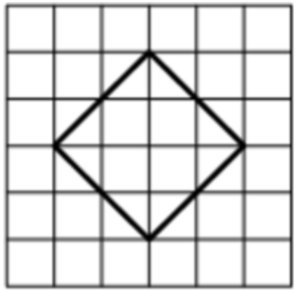
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Саратове по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев с начала апреля по конец ноября, когда среднемесячная температура в Саратове выше 5°C.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: ___________________________.

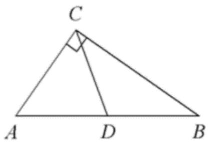
4 В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 16 из них встречается вопрос по логарифмам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по логарифмам.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$(x-10)^7 = 1.$

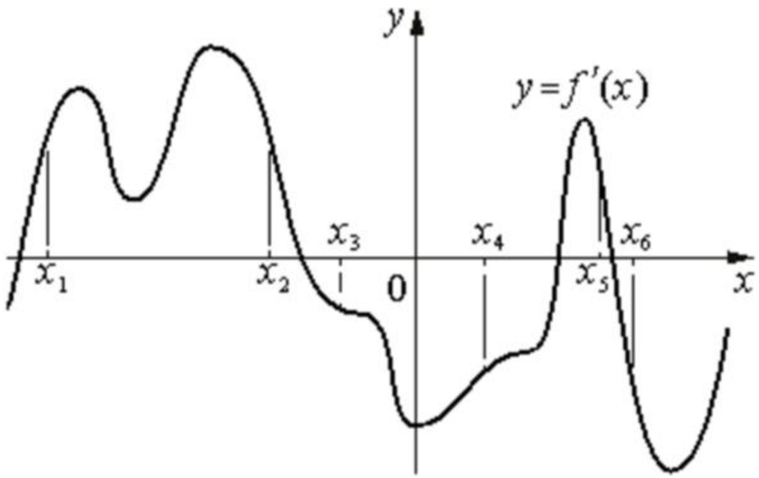
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC CD – медиана, угол C равен 90°, угол B равен 35°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.



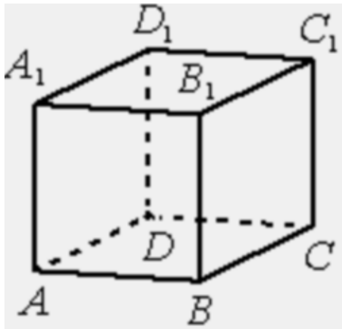
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y = f`(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ: ___________________________.

8 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и AD_1. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180409

9 Найдите значение выражения

$$\frac{38}{\sin^2 51^\circ + 3 + \sin^2 141^\circ}.$$

Ответ: ___________________________.

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 3$ м – начальный уровень воды, $a = \frac{1}{768}$ м/мин^2 и $b = -\frac{1}{8}$ м/мин – постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Ответ: ___________________________.

11 Заказ на 176 деталей первый рабочий выполняет на 5 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 5 деталей больше, чем второй?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции

$y = 13\operatorname{tg} x - 13x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 12, а высота пирамиды равна 1. На рёбрах AB, AC и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = AN = 3$ и $AK = \frac{7}{4}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1.$$

16 Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180409

17 Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a \le x, \\ 6x > x^2 + a^2, \\ x + a \le 6 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 85?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 84?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	99
2	7
3	2
4	0,8
5	11
6	55
7	3
8	60
9	9,5
10	48
11	16
12	4
13	а) $\pi n, \frac{2\pi}{3}+2\pi n, -\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $-\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$
14	$\frac{9\sqrt{39}}{26}$
15	$\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(64;+\infty)$
16	30
17	3 млн
18	$\left(-2\sqrt{2};2\right]$
19	а) да, например, для числа 510, б) Нет, в) 91

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\sin x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right].$

.

Решение:

а)

$\sin 2x+\sin x=0$

Синус двойного угла

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$2\sin x\cdot\cos x+\sin x=0$

$\sin x\cdot(2\cos x+1)=0$

$\sin x=0$ $x=\pi n; n\in Z$	$2\cos x+1=0$ $2\cos x=-1$

	$\cos x = -\frac{1}{2}$ $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = -2\pi \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = -\pi \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = 0 \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{10\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{8\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{2\pi}{3} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

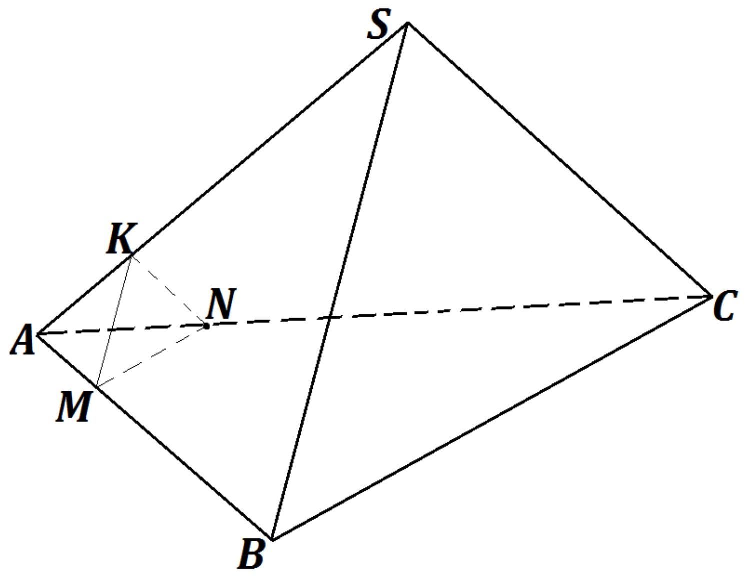
Ответ: а) $\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 12, а высота пирамиды равна 1. На рёбрах AB, AC и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём
$AM = AN = 3$ и $AK = \frac{7}{4}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

Решение:
а)



Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

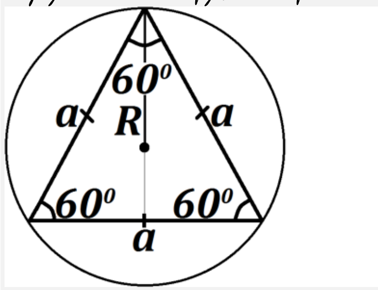
$\triangle AMN \sim \triangle ABC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \\ \angle MAN = \angle BAC\end{array}\right)$$

$\Rightarrow MN \parallel BC$

Осталось доказать, что $MK \parallel SB$

Радиус описанной окружности равностороннего треугольника



$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$$

или

$$R = \frac{2}{3} \cdot h$$

Пусть

SO – высота пирамиды

Тогда

$$AO = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 12 = 4\sqrt{3}$$

$$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$\triangle AKM \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

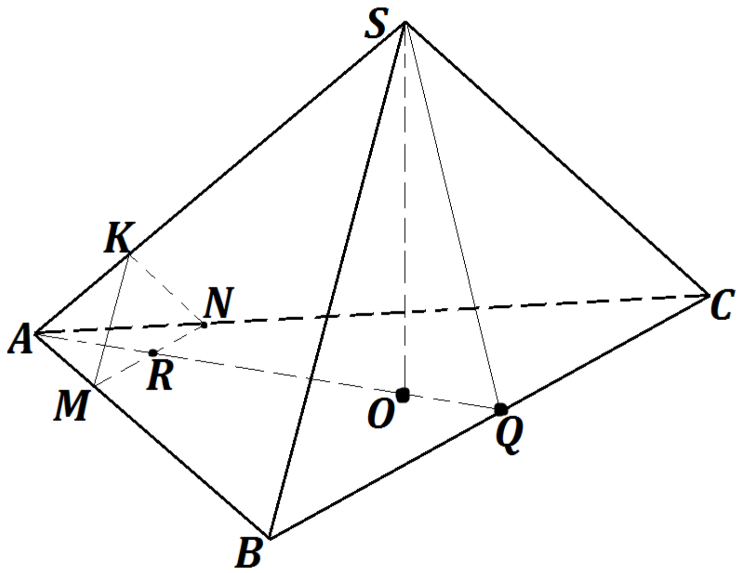
$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AK}{SA} \\ \angle MAK = \angle BAS\end{array}\right)$$

$\Rightarrow MK \parallel SB$

$\Rightarrow (MNK) \parallel (SBC)$

■

б)



Пусть

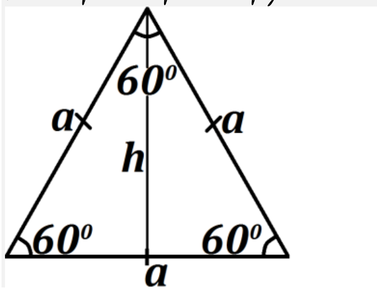
R – середина MN

Q – середина BC

Расстояние от точки M до плоскости SBC равно расстоянию от точки R до плоскости SBC, потому что M и R лежат на одной прямой

Итак, расстояние от точки R до прямой SQ – искомое

Высота равностороннего треугольника



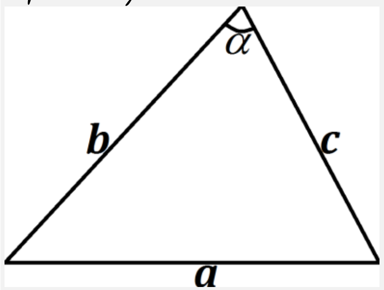
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Рассмотрим $\triangle ASQ$

$$AQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6\sqrt{3}$$

$SQ = \sqrt{SB^2 - BQ^2} = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{13}$ (по теореме Пифагора)

Теорема Косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

или

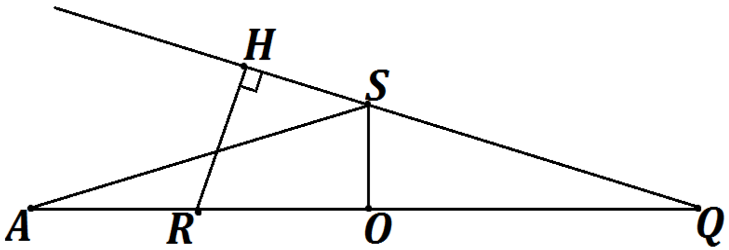
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Воспользуемся теоремой косинусов, чтобы узнать тупоугольным или остроугольным является $\triangle ASQ$:

$$\cos\angle ASQ = \frac{SA^2 + SQ^2 - AQ^2}{2 \cdot SA \cdot SQ} = \frac{7^2 + \sqrt{13}^2 - (6\sqrt{3})^2}{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{13}} < 0$$

=>

$\triangle ASQ$ – тупоугольный:



RH – искомое расстояние

$$QR = \frac{3}{4} \cdot AQ = \frac{3}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(это следует из подобия $\triangle AMN$ и $\triangle ABC$, доказанного в пункте а)

$$\sin\angle SQO = \frac{SO}{SQ} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\sin\angle HQR = \frac{HR}{QR} = \frac{HR}{\frac{9\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{HR}{\frac{9\sqrt{3}}{2}}$$

$$HR = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{39}}{26}$$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{39}}{26}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1.$$

Решение:

ОДЗ:

1.

$4x^2 > 0$
$x \neq 0$
2.
$x > 0$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями
$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$

Свойство логарифмов
$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

$$\frac{\log_2 4 + \log_2 x^2 + 35}{\log_2^2 x - 36} + 1 \geq 0$$

$$\frac{2 + 2\log_2 x + 35}{\log_2^2 x - 36} + 1 \geq 0$$

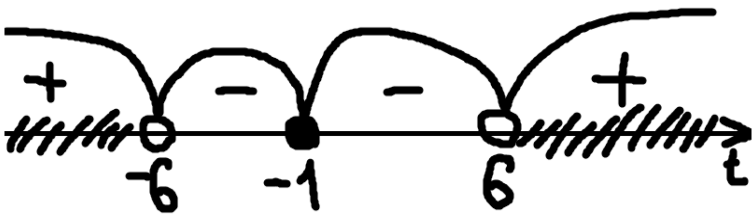
$$\frac{2\log_2 x + 37 + \log_2^2 x - 36}{\log_2^2 x - 36} \geq 0$$

Пусть $\log_2 x = t$

$$\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - 36} \geq 0$$

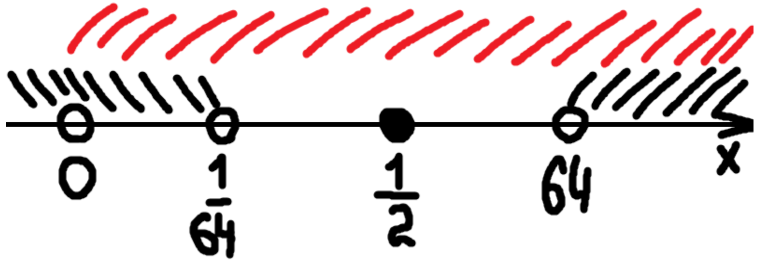
$$\frac{(t+1)^2}{t^2 - 36} \geq 0$$

$(t+1)^2 = 0$ $t = -1$	$t^2 - 36 \neq 0$ $t \neq \pm 6$



$t < -6$ $\log_2 x < \log_2 \frac{1}{64}$ $x < \frac{1}{64}$	$t = -1$ $\log_2 x = -1$ $\log_2 x = \log_2 \frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{2}$	$t > 6$ $\log_2 x > 6$ $\log_2 x > \log_2 64$ $x > 64$

Объединим корни и промежутки с ОДЗ:



Ответ: $\left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (64; +\infty)$

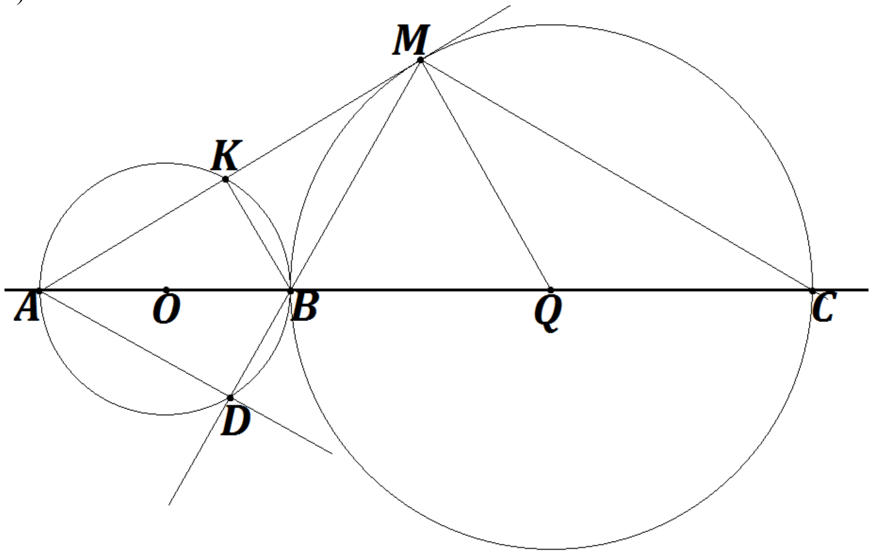
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

Решение:

а)



$\angle ADB = 90°$
$\angle BMC = 90°$
(т.к. это вписанные углы, опирающиеся на диаметр)

=>
$AD \perp DM$
$MC \perp DM$
=>
$AD \parallel MC$
■

б)
$AK = 3$
$MK = 12$
$AM = 15$

Найдём площадь треугольника DBC по формуле
$S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BC \cdot \sin \angle DBC$

Осталось найти все элементы уравнения:

Пусть

O — центр окружности с диаметром AB
Q — центр окружности с диаметром BC
$AO = r$
$BQ = R$

Построим BK и MQ
$\angle AKB = 90°$
$\angle AMQ = 90°$
(т.к. это вписанные углы, опирающиеся на диаметр)

$\triangle ABK \sim \triangle AMQ$ по двум углам
$\frac{AK}{AM} = \frac{AB}{AQ} = \frac{BK}{MQ}$

$\frac{AK}{AM} = \frac{AB}{AQ}$
$\frac{3}{15} = \frac{2r}{2r + R}$
$6r + 3R = 30r$
$3R = 24r$
$R = 8r$

$\frac{AK}{AM} = \frac{BK}{MQ}$
$\frac{3}{15} = \frac{BK}{R}$
$15BK = 3R$
$BK = \frac{R}{5}$
$BK = \frac{8r}{5}$

Рассмотрим $\triangle ABK$ — прямоугольный
$AB^2 = AK^2 + BK^2$
$(2r)^2 = 3^2 + \left(\frac{8r}{5}\right)^2$
$4r^2 = 9 + \frac{64r^2}{25}$
$\frac{36r^2}{25} = 9$

$r^2 = \frac{9 \cdot 25}{36}$
$r = \frac{3 \cdot 5}{6} = 2{,}5$

$R = 8r = 8 \cdot 2{,}5 = 20$
$BC = 2R = 2 \cdot 20 = 40$
$BK = \frac{8r}{5} = \frac{8 \cdot 2{,}5}{5} = 4$
$BM = \sqrt{BK^2 + MK^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}$ (по теореме Пифагора)

Чтобы найти $\sin \angle DBC$ найдём синус смежного угла MBQ

По теореме косинусов из $\triangle MBQ$
$MQ^2 = BM^2 + BQ^2 - 2 \cdot BM \cdot BQ \cdot \cos \angle MBQ$
$20^2 = \left(4\sqrt{10}\right)^2 + 20^2 - 2 \cdot 4\sqrt{10} \cdot 20 \cdot \cos \angle MBQ$
$0 = 160 - 160\sqrt{10} \cdot \cos \angle MBQ$
$160\sqrt{10} \cdot \cos \angle MBQ = 160$
$\cos \angle MBQ = \frac{160}{160\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$
$\sin \angle MBQ = \sqrt{1 - \cos^2 \angle MBQ} = \frac{3}{\sqrt{10}}$
$\sin \angle DBC = \frac{3}{\sqrt{10}}$
(т.к. синусы смежных углов равны)

$\triangle ABD \sim \triangle BCM$ по двум углам
$\left(\begin{array}{c}\angle ABD = \angle MBC - \text{вертикальные} \\ \angle ADB = \angle BMC = 90°\end{array}\right)$

$\frac{BD}{BM} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{BD}{4\sqrt{10}} = \frac{5}{40}$

$\frac{BD}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{8}$

$BD = 0{,}5\sqrt{10}$

$S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BC \cdot \sin \angle DBC$

$S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\sqrt{10} \cdot 40 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = 30$

Ответ: 30

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

.

Решение:

Пусть
S – сумма кредита
x – сумма выплаты в 4-ом и 5-ом годах
1 января 2010 – день открытия кредита
1 июня – день начисления процентов
1 декабря – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.01.2010	S
01.06.2010	$\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot S = 1{,}2\cdot S$
01.12.2010	
01.01.2011	S

=>

01.12.2010	$1{,}2\cdot S - S = 0{,}2\cdot S$

Второй год

01.01.2011	S
01.06.2011	$1{,}2\cdot S$
01.12.2011	
01.01.2012	S

=>

01.12.2011	$1{,}2\cdot S - S = 0{,}2\cdot S$

Третий год

01.01.2012	S
01.06.2012	$1{,}2\cdot S$
01.12.2012	
01.01.2013	S

=>

01.12.2012	$1{,}2\cdot S - S = 0{,}2\cdot S$

Четвёртый год

01.01.2013	S
01.06.2013	$1{,}2\cdot S$
01.12.2013	$1{,}2\cdot S - x$

Пятый год

01.01.2014	$1{,}2\cdot S - x$
01.06.2014	$1{,}2\cdot(1{,}2\cdot S - x) = 1{,}44\cdot S - 1{,}2x$
01.12.2014	$1{,}44\cdot S - 1{,}2x - x$

В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью
=>
$1{,}44\cdot S - 1{,}2x - x = 0$

Выразим x
$1{,}44\cdot S = 2{,}2x$
$x = \frac{1{,}44S}{2{,}2} = \frac{144S}{220} = \frac{36}{55}S$

Требуется найти наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей
=>
$0{,}2\cdot S + 0{,}2\cdot S + 0{,}2\cdot S + x + x < 7$
$0{,}6\cdot S + 2x < 7$
$0{,}6\cdot S + 2\cdot\frac{36}{55}S < 7$

$$\frac{6S}{10} + \frac{72S}{55} < 7$$
$$\frac{66S}{110} + \frac{144S}{110} < 7$$
$$\frac{210S}{110} < 7$$
$$S < \frac{7 \cdot 110}{210}$$
$$S < \frac{11}{3}$$
$$S < 3\frac{2}{3}$$

Требуется найти наибольшее подходящее целое S
=>
$S = 3$

Ответ: 3 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

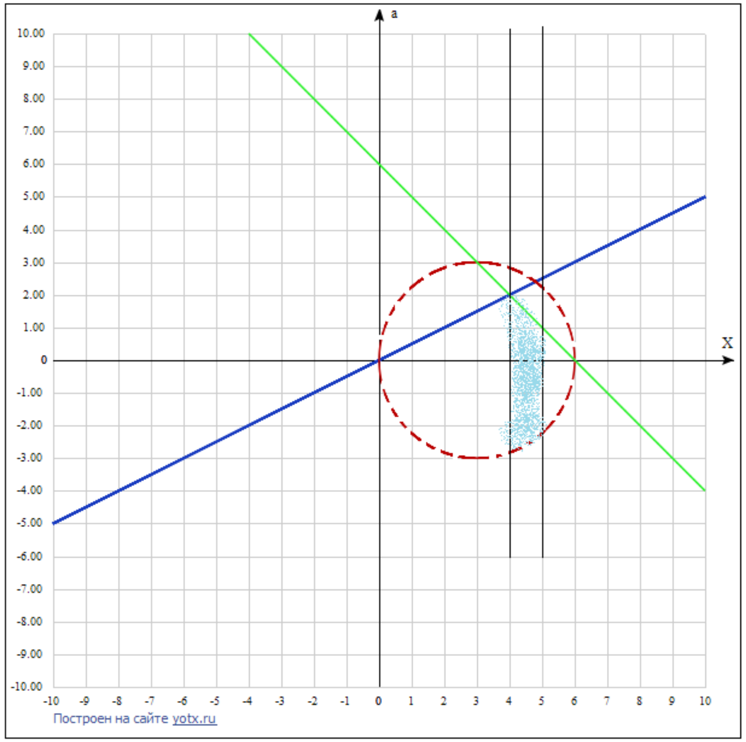
18 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} 2a \le x, \\ 6x > x^2 + a^2, \\ x + a \le 6 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

Решение:

$$\begin{cases} a \le \frac{x}{2}, \\ x^2 - 6x + 9 - 9 + a^2 < 0, \\ a \le -x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \le \frac{x}{2}, \\ (x-3)^2 + a^2 < 9, \\ a \le -x + 6 \end{cases}$$

Построим все неравенства в системе координат xOa:



Найдём нижнюю точку пересечения окружности и прямой $x = 4$
$$6x = x^2 + a^2$$
$$6 \cdot 4 = 4^2 + a^2$$
$$24 = 16 + a^2$$
$$a^2 = 8$$
$$a = -2\sqrt{2}$$

Итак,
Если $a < -2\sqrt{2}$, то решений на отрезке $[4; 5]$ нет
Если $a = -2\sqrt{2}$, то решений на отрезке $[4; 5]$ нет
Если $-2\sqrt{2} < a < 2$, то решения на отрезке $[4; 5]$ есть
Если $a = 2$, то решения на отрезке $[4; 5]$ есть
Если $a > 2$, то решений на отрезке $[4; 5]$ нет

Ответ: $a \in \left(-2\sqrt{2}; 2\right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 85?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 84?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?
.

Решение:
Пусть
a – число сотен $1 \le a \le 9$
b – число десятков $0 \le b \le 9$
c – число единиц $0 \le c \le 9$
Но b и c вместе не должны равняться нулю

Тогда
$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ – данное трёхзначное число

а)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 85$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 85 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 85a + 85b + 85c$
$15a = 75b + 84c$

c может быть только нулём

Тогда
$15a = 75b$

Нетрудно подобрать подходящую комбинацию:
$a = 5$
$b = 1$
$c = 0$
=>
Может, частное числа 510 и суммы его цифр равно 85

б)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 84$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 84 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 84a + 84b + 84c$
$16a = 74b + 83c$

Рассмотрим варианты комбинаций b и c, начиная с наименьших:
Вариант #1
$b = 0$
$c = 0$
Не подходит по условию
Вариант #2
$b = 0$
$c = 1$

Тогда
$16a = 83$
Не подходит, т.к. a должно быть целым

Вариант #3
$b = 1$
$c = 0$

Тогда
$16a = 74$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #4
$b = 1$
$c = 1$

Тогда
$16a = 74 + 83$
$16a = 157$
Не подходит, т.к.
$1 \leq a \leq 9$
$16 \leq 16a \leq 144$
=>
дальнейшее увеличение значений b и c не имеет смысла, т.к. правая часть уравнения будет всё больше и больше
=>
Не может

в)
Пусть
k – искомое наибольшее значение частного

$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = k$$

$$100a + 10b + c = ka + kb + kc$$

$$100a - ka = kb - 10b + kc - c$$

$$(100 - k)a = (k - 10)b + (k - 1)c$$

По условию:
$$a \leq 9 \quad \Big| \cdot (100 - k)$$

$$(100 - k)a \leq 9(100 - k)$$

$$(k - 10)b + (k - 1)c \leq 9(100 - k)$$

Сравним
$(k - 1)c$ и $(k - 10)c$
$kc - c$ и $kc - 10c$
=>
$$(k - 1)c \geq (k - 10)c \quad \Big| + (k - 10)b$$

$$(k - 10)b + (k - 1)c \geq (k - 10)b + (k - 10)c$$

Получаем двойное неравенство:
$$(k - 10)b + (k - 10)c \leq (k - 10)b + (k - 1)c \leq 9(100 - k)$$

Оставляем только крайние части двойного неравенства
=>
$$(k - 10)b + (k - 10)c \leq 9(100 - k)$$
$$(k - 10)(b + c) \leq 9(100 - k)$$

$(b + c)$ должно быть, как можно меньшим, т.к. правая часть неравенства будет тем больше, чем меньше будет левая

$(b + c) \neq 0$ (по условию)
=>
$(b + c) \geq 1$

Возьмём $(b + c) = 1$

$(k - 10) \cdot 1 \leq 9(100 - k)$
$k - 10 \leq 900 - 9k$
$10k \leq 910$
$k \leq 91$

Требуется найти наибольшее подходящее натуральное k
=>
$k = 91$

Приведём пример
910
$$\frac{9 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 0}{9 + 1 + 0} = 91$$

Ответ: а) да, например, для числа 510, б) Нет, в) 91

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4