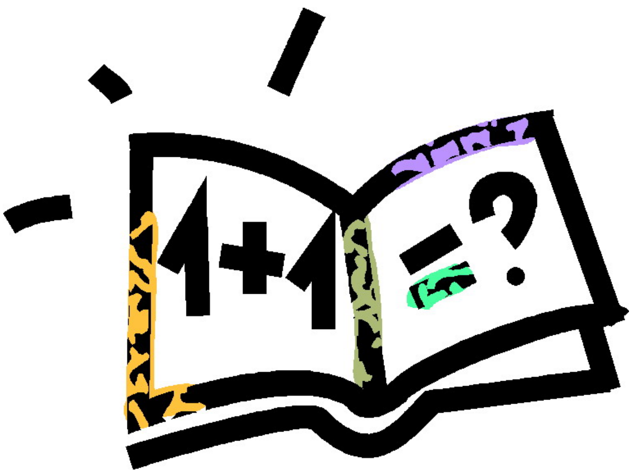
Решение иррациональных уравнений и неравенств

методические рекомендации для учащихся



Составитель

преподаватель математики

Мочалова Е.В.

Составители: Мочалова Е.В. – преподаватель математики

От авторов-составителей: Одной из нелегких и трудно усваиваемых тем на уроках математики являются иррациональные уравнения и неравенства. В работе рассмотрены основные понятия и формулы, которые нужно знать для успешного решения иррациональных уравнений и неравенств. Приведены подробные примеры решения некоторых уравнений и неравенств. Подобраны задания для самостоятельного решения и тест для проверки усвоения теоретических основ. Методические рекомендации призваны помочь при самостоятельном изучении и повторении данной темы.

Часть I. Иррациональные уравнения.

Иррациональными называются уравнения, в которых переменные или рациональные функции находятся под **знаком корня**.

Примерами таких уравнений могут служить:

$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}=7;\qquad \sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2-4}-10=$

Рис.1.

Понятие корня уравнения и его решения для иррациональных уравнений определяют так же, как и для рациональных.

Умение решать иррациональные неравенства может пригодиться на практике. Попробуйте определить глубину ущелья, замерив время падения камня (см. рис.1).

Все корни **четной** степени, входящие в уравнение, являются **арифметическими**.

Другими словами, *если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла, если подкоренное выражение равно нулю, то корень так же равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то и значение корня положительно.*

Все корни **нечетной** степени, входящие в уравнение, **определены при любых** действительных значениях подкоренного выражения.

Функции $y=\sqrt[2n]{x}$ и $y=\sqrt[2n+1]{x}$ являются возрастающими на своей области определения.

Используя эти свойства, в некоторых случаях можно установить, что уравнение не имеет решения, не прибегая к преобразованиям.

Пример 1. Докажите, что уравнение не имеет решения.

1) $\sqrt{x^2-3}+1=0 \leftrightarrow \sqrt{x^2-3}=-1$ Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому уравнение решений не имеет.

2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{x^2-4}=0$ не имеет решений, т.к. сумма двух неотрицательных выражений равна нулю только если каждое выражение равно нулю, а данные выражения одновременно в ноль не обращаются.

3) $\sqrt{x-7}+2=\sqrt{5-x}$ Выражение $\sqrt{x-7}$ определено при $x\geq 7$, а выражение $\sqrt{5-x}$ определено при $x\leq 5$. Следовательно, не существует х, при котором оба выражения имеют смысл, поэтому уравнение решений не имеет.

Одним из стандартных приемов решения иррациональных неравенств является освобождение от радикалов путем возведения обеих частей в соответствующую степень. Но следует помнить, что подобное преобразование не всегда является равносильным. т.е. необходима проверка корней.

При возведении правой и левой части уравнения в нечетную степень мы можем не опасаться получить посторонние корни.

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt[3]{3x^2-2x}=x$

Возведем обе части уравнения в третью степень. Получим равносильное уравнение:

$3x^2 - 2x = x^3$

Перенесем все слагаемые в одну сторону и вынесем за скобки х:

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

Приравняем каждый множитель к нулю, получим:

$x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$

Ответ: {0;1;2}

2.Причина появления посторонних корней.

Решение иррациональных уравнений основано на следующем утверждении:

Теорема.

Если n>0 - нечетное число (n=2k+1), то уравнения $f^n(x)=g^n(x)$ и $f(x)=g(x)$ равносильны.

Если n>0 - четное число (n=2k), то любой корень уравнения $f^n(x)=g^n(x)$ удовлетворяет хотя бы одному из уравнений: $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$.

Из теоремы следует, что если в ходе решения иррационального уравнения приходилось возводить обе части в степень с четным показателем, то могут появиться "посторонние" корни уравнения.

Итак, что же происходит, каковы **причины посторонних корней**:

а) за счет возможного расширения ОДЗ исходного уравнения (т.е. ОДЗ полученного уравнения шире ОДЗ исходного уравнения).

б) за счет возведения в четную степень его левой и правой частей, которые равны по абсолютной величине, но одна из них положительна, а другая отрицательна.

3.Решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием.

Решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием (с последующей проверкой корней) можно производить следующим образом:

1. Найти ОДЗ исходного уравнения.
2. Перейти от уравнения к его следствию.
3. Найти корни полученного уравнения.
4. Проверить, являются ли найденные корни корнями исходного уравнения.

4.Проверка корней.

Проверка корней подстановкой найденного значения в исходное уравнение сама по себе может оказать сложной задачей. Однако, чтобы отделить посторонние корни, не всегда необходимо подставлять найденные корни в данное уравнение. Иногда возможна проверка корней по ОДЗ уравнения.

При решении иррациональных уравнений удобно и полезно следующие утверждения:

<table>
<tr><th>Уравнение вида</th><th rowspan="5">Равносильно</th><th>Системе / совокупности систем уравнений</th></tr>
<tr><td>$\sqrt{f(x)} = g(x)$</td><td>$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$</td><td>$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) - \text{определена} \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$</td><td>Одной из равносильных систем:
$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
или
$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$
Выбирается та система, в которой проще неравенство.</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = 0$</td><td>$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$</td></tr>
</table>

Пример 3.

$a)\ \sqrt{2x+3} = 6 - x$ <=>

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ 2x + 3 = (6-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ 2x + 3 = 36 - 12x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2 - 14x + 33 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x \leq 6 \\ x = 3;\ x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ **Ответ: 3.**

b) $\sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{2x+2}$ <=> $\begin{cases} 2x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 2x + 2 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x \geq -1 \\ x = 2 \vee x = -3 \end{cases}$ <=> x=2. **Ответ: 2**

5.Формулы, применяемые при решении иррациональных уравнений.

Пусть f и g - некоторые функции, к- целое число, тогда:

1. $\sqrt[2k]{f} \cdot \sqrt[2k]{g} = \sqrt[2k]{f \cdot g}, \quad f \geq 0, \ g \geq 0$

2. $\frac{\sqrt[2k]{f}}{\sqrt[2k]{g}} = \sqrt[2k]{\frac{f}{g}}, \quad f \geq 0, \ g > 0$

3. $|f| \cdot \sqrt[2k]{g} = \sqrt[2k]{f^{2k} \cdot g}, \quad g \geq 0$

4. $\sqrt[2k]{\frac{f}{g}} = \frac{\sqrt[2k]{|f|}}{\sqrt[2k]{|g|}}, \quad f \cdot g \geq 0, \ \ g \neq 0$

5. $\sqrt[2k]{f \cdot g} = \sqrt[2k]{|f|} \cdot \sqrt[2k]{|g|}, \quad f \cdot g \geq 0$

Для каждой из формул 1-5 (без учета указанных ограничений) ОДЗ правой ее части может быть шире ОДЗ левой.

Отсюда следует, что преобразования уравнений с формальным использованием формул 1-5 "слева–направо", приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного.

В этом случае могут появиться посторонние корни исходного уравнения, поэтому обязательным этапом в решении исходного уравнения является проверка.

Преобразование уравнений с формальным использованием формул 1-5 "справа – налево" **недопустимо**, т.к. возможно сужение ОДЗ исходного уравнения, а следовательно и потеря корней.

Так, например, если заменить уравнение $\sqrt{(\mathrm{x}-3)(4\mathrm{x}+4)} = 3$ (ОДЗ: $\mathrm{x} \geq 3$, $\mathrm{x} \leq -1$) уравнением $\sqrt{\mathrm{x}-3} \cdot \sqrt{4\mathrm{x}+4} = 3$ (ОДЗ: $\mathrm{x} \geq 3$), то произойдет сужение ОДЗ исходного уравнения и потеря корня x=-1.

Пример 4.

a) $\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = \sqrt{x-1}$ <=> $\sqrt{5+x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ <=>

$$\begin{cases} 5+x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 5+x = x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{5-x}+5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 1+x = 2\sqrt{x-1}\sqrt{5-x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1+x \geq 0 \\ (1+x)^2 = 4(x-1)(5-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x \geq -1 \\ 1+2x+x^2 = -4x^2+24x-20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 5x^2 - 22x + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x = 3 \ \vee x = 1{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \ x = 3 \ \vee x = 1{,}4$$

Ответ: 3; 1,4 .

b) $\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-10x+25} = 10$ <=>

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 5 \\ x+2+x-5 = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \leq x < 5 \\ x+2-x+5 = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ -x-2-x+5 = 10 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 5 \\ x = 6{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \leq x < 5 \\ 7 = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ x = -3{,}5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6{,}5 \\ x \in \emptyset \\ x = -3{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \mathrm{x}=6{,}5 \vee \mathrm{x}=-3{,}5$$

Ответ: 6,5 ; -3,5.

6. Решение уравнений с использованием замены переменной.

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример 5.

а) $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x + 9} = 33,\ x \in R$

Пусть $y = \sqrt{x^2 + 3x + 9},\ y \geq 0$ тогда исходное уравнение примет вид: $y^2 + y - 42 = 0$ корни которого y=6 и $y = -7 \notin [0;\ +\infty)$. Решая уравнение $\sqrt{x^2 + 3x + 9} = 6$, получаем x=3 и x=-4,5.

Ответ: $\{-4{,}5; 3\}$

В следующих примерах используется более сложная замена переменной.

b) $2x^2 + (2x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} = 1,\ x \in R$

Перенесем в левую часть все члены уравнения и произведем дополнительные преобразования: $x^2 + 2x\sqrt{x^2 - x + 1} + x^2 - x + 1 + x + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 = 0$

$\left(x + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)^2 + x + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 = 0$

Замена $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ приводит уравнение к виду $y^2 + y - 2 = 0$ корнями которого являются y=1 и y=-2

Осталось решить совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 \\ x + \sqrt{x^2 - x + 1} = -2 \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - x + 1 = 1 - 2x + x^2 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x + 1 = x^2 + 4x + 4 \\ -x - 2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -0{,}6 \\ x \leq -2 \end{cases} \end{array}\right. <=>$$

x=0

Ответ: {0}

7. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.

Теорема. Уравнение $f(x) \cdot g(x) = 0$, определенное на всей числовой оси, равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$

Пример 6.

$(x+3)\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x^2-1}.$

При $x \geq 1$ уравнение принимает вид: $\sqrt{x-1}(x+3-3\sqrt{x+1}) = 0,$ которое равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0 \\ x+3-3\sqrt{x+1}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 1 \\ 9(x+1) = x^2+6x+9 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x^2-3x = 0 \\ x \geq 1 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0.x = 3 \\ x \geq 1 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1,3\}.$

Выделить общий множитель часто бывает очень трудно. Иногда это удается сделать после дополнительных преобразований. В приведенном ниже примере для этого рассматриваются попарные разности подкоренных выражений.

Пример 7.

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-x+2}=0$$

Если внимательно посмотреть на уравнение, то можно увидеть, что разности подкоренных выражений первого и третьего , а также второго и четвертого членов этого уравнения равны одной и той же величине $(-2x-4)$.

В таком случае далее следует воспользоваться тождеством:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},a\geq 0,b\geq 0,a+b>0$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{-2x-4}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}=0,$$ или

$$(2x+4)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}\right)=0$$

Корень уравнения 2x+4=0 т.е. число x=-2 при подстановке в исходное уравнение дает верное равенство.

Уравнение $\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}=0$ не имеет решений, так как его левая часть положительна в своей области определения.

Ответ: {-2}.

8. Метод выделения полных квадратов при решении иррациональных уравнений.

При решении некоторых иррациональных уравнений полезна формула $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 8.

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Преобразуем уравнение следующим образом**:**

$$\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=1,$$

или

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1.$$

Обозначим $y=\sqrt{x-1}, y\geq 0$ и решим полученное уравнение методом интервалов**.**

$$|y-2|+|y-3|=1.$$

Разбирая отдельно случаи $y<2; 2\leq y<3; y\geq 3$, находим, что решениями последнего уравнения являются $2\leq y\leq 3$.

Возвращаясь к переменной x, получаем неравенства

$$2\leq\sqrt{x-1}\leq 3$$

$$4\leq x-1\leq 9$$

$$5\leq x\leq 10.$$

Ответ: $5\leq x\leq 10.$

Часть II. Иррациональные неравенства и методы их решения.

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем. Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, т.е. найти ОДЗ этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ОДЗ или ее частях.

Рассмотрим решение неравенства вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$.

Чтобы его решить, нужно обе части неравенства возвести в квадрат и вовремя вспомнить об ОДЗ: подкоренное выражение меньшего из корней должно быть неотрицательным – тогда подкоренное выражение большего корня автоматически будет больше нуля. Таким образом, неравенство вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ равносильно системе неравенств: $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$.

Практически все сложные иррациональные неравенства, в конечном итоге сводятся к базовым иррациональным неравенствам двух типов.

Иррациональные неравенства **первого типа**: $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Заметим, что в левой части неравенства стоит квадратный корень, который принимает только неотрицательные значения, следовательно, чтобы неравенство имело решения, правая часть должна быть положительной.

Получаем первое условие: $g(x)>0$.

Чтобы решить неравенство, нам нужно обе части возвести в квадрат.

Получаем второе условие: $f(x)<(g(x))^2$.

Возведение в квадрат может привести к появлению посторонних корней, поэтому не забываем про ОДЗ: подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

Получили третье условие: $f(x) \geq 0$.

Итак, неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < \left(g(x)\right)^2 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Аналогично, нестрогое неравенство $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant \left(g(x)\right)^2 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Иррациональные неравенства **второго типа**: $\sqrt{f(x)}>g(x)$.

Не смотря на то, что это неравенство с виду похоже на неравенство первого типа, оно принципиально от него отличается.

Поскольку в левой части неравенства стоит квадратный корень, левая часть всегда неотрицательна, поэтому

если $g(x)<0$, то неравенство $\sqrt{f(x)}>g(x)$ выполняется при любом допустимом значении x, то есть при $f(x)\geqslant 0$.

если $g(x)\geqslant 0$, то мы можем обе части неравенства возвести в квадрат, получим $f(x)>(g(x))^2$, и условие на ОДЗ $f(x)>0$ будет автоматически следовать из этого неравенства.

Итак, неравенство вида $\sqrt{f(x)}>g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geqslant 0 \\ f(x)>(g(x))^2 \end{cases}\end{array}\right.$$

Нестрогое неравенство вида $\sqrt{f(x)}\geqslant g(x)$ равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geqslant 0 \\ f(x)\geqslant (g(x))^2 \end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим примеры решения иррациональных неравенств.

Пример 9.

а) Решить неравенство:

$\sqrt{x-2}>-x^2+x-2$

Это неравенство второго типа, оно равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} -x^2+x-2<0 \\ x-2\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x^2+x-2\geqslant 0 \\ x-2>(-x^2+x-2)^2 \end{cases}\end{array}\right.$$

Решим каждое неравенство:

1. $-x^2+x-2<0$ <=> $x^2-x+2>0$

D=1-8=-7, старший коэффициент больше нуля, следовательно это неравенство верно при любом значении x. Решением первой системы будет решение ее второго неравенства: x≥2.

2. $-x^2+x-2\geqslant 0$ Очевидно, что это неравенство не имеет решений. Следовательно, и вся вторая система не имеет решений.

Ответ: x≥2.

b) Решить неравенство:

$\sqrt{2x-x^2}<5-x$

Это иррациональное неравенство первого типа, и оно равносильно системе трех неравенств:

$$\begin{cases} 5-x\geqslant 0 \\ 2x-x^2\leqslant(5-x)^2 \\ 2x-x^2\geqslant 0 \end{cases}$$

Решим каждое неравенство:

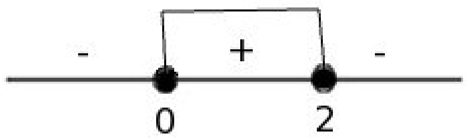
1. $5-x\geqslant 0$ <=> $x\leqslant 5$

2. $2x-x^2\leqslant(5-x)^2$ <=> $2x-x^2\leqslant 25-10x+25$ <=> $2x^2-12x+25\geqslant 0$

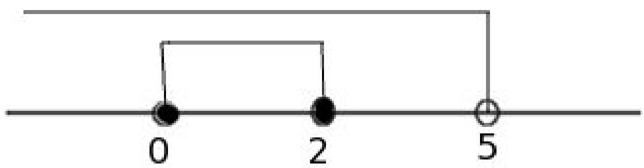
D=144-200<0, следовательно, это неравенство верно при любом значении x.

3. $2x-x^2\geqslant 0$

$x_1=0 \quad x_2=2$



Совместим решения первого и третьего неравенств системы на одной координатной прямой:



Ответ: 0≤ x ≤ 2.

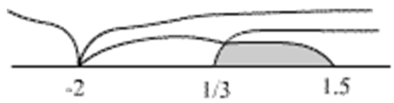
c) $\sqrt{3x^2+5x-2}\leq 2+x.$

Решение.

$$\begin{cases} 3x^2+5x-2\leq(2+x)^2 \\ 2+x\geq 0 \\ 3x^2+5x-2\geq 0. \end{cases}$$

Таким образом необходимо рассмотреть два квадратных и одно линейное неравенство. Их решение не представляет никаких сложностей.

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 6 \le 0 \\ x \ge -2 \\ 3x^2 + 5x - 2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 1.5 \\ x \ge -2 \\ x \le -2, x \ge 1/3. \end{cases}$$



Объединением этих неравенств будет {-2} ∪ [1/3, 1.5].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Укажите решение уравнения $\sqrt[3]{x-4}=2$
   а) 9
   б) 12
   в) 8
   г) 3

2. Иррациональным называется уравнение, где переменная находится:
   а) В знаменателе дроби
   б) В степени числа
   в) Под знаком модуля
   г) Под знаком корня

3. Укажите решение уравнения $\sqrt{x^2-7}=3$
   а) 4
   б) -4
   в) -4; 4
   г) 9

4. Корни какой степени не существуют, если выражение, стоящее под знаком корня положительно?
   а) Четной
   б) Нечетной
   в) Четной и нечетной
   г) Все существуют

5. Корни какой степени не существуют, если выражение, стоящее под знаком корня отрицательно?
   а) Четной
   б) Нечетной
   в) Четной и нечетной
   г) Все существуют

6. Укажите решение неравенства $\sqrt{1-x}>-2$.
   а) x$\in R$
   б) x<-3
   в) x≤ 1
   г) x>-3

7. Укажите решение неравенства $\sqrt{1-x}>\sqrt{x+2}$.
   а) x$\in R$
   б) $-2\leq$x<-1/2
   в) x$< -1/2$
   г) -2<x<-1/2

Задачи для самостоятельного решения.

1. Укажите, какому промежутку принадлежит сумма корней уравнения (или корень, если он один):

1. $\sqrt{x-3} = 2.$
1) $(9;12)$ 2) $[-3;6]$
3) $(0;8)$ 4) $[5;7)$
2. $\sqrt[4]{x-3} = 2.$
1) $(0;14]$ 2) $[-1;2)$
3) $(1;9)$ 4) $[11;21]$
3. $\sqrt[3]{x+2} = 3.$
1) $(23;25)$ 2) $[24;25]$
3) $[0;5)$ 4) $(7;20]$
4. $\sqrt{x} = 2-x.$
1) $(2;4]$ $2[-2;1)$
3) $[0;4)$ 4) $(5;8]$
5. $\sqrt{x^2-x+1} = x.$
1) $[2;7]$ 2) $(-3;1)$
3)$(0;1]$ 4) $(3;8)$

2. Укажите количество корней уравнения.

1. $\sqrt{2x+5} = x+1$
2. $\sqrt{x+9} = 2x-3$
3. $x-1 = \sqrt{7-2x-x^2}$
4. $x+2 = \sqrt{16+4x-x^2}$
5. $x+3 = 6-\sqrt{x+3}$
6. $\sqrt{x^2+7}+5 = x^2$
7. $3x+1+5\sqrt{3x+1} = 6$
8. $x^2 = 3+\sqrt{2x^2+18}$
9. $(x^2-4)\cdot\left(\sqrt{14+5x}-x\right) = 0$
10. $(x^2-9)\cdot\left(\sqrt{6-5x}-x\right) = 0$
11. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}-2\sqrt{x} = 0$

3. Решите неравенства:

$$a)\quad \frac{\sqrt{21-4x-x^2}}{x-2} < 1; \qquad б)\quad \frac{1-\sqrt{8-x^2}}{2x} < 1$$

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11кл. общеобразоват. учреждений / [А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницын и др.]: под ред. А.Н.Колмогорова.- М.: Просвещение, 2008
2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. - М.: Мнемозина, 2009
3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. - М.: Мнемозина, 2009

4. Алгебра и начала анализа: сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы / И.Р.Высоцкий, Л.И.Звавич, Б.П.Пигарев и др.;под ред. С.А. Шестакова. - М.: Внешсигма-М, 2007
5. ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические выражения, функции, уравнения и неравенства / Е.А.Семенко, М.В.Фоменко; под ред. Е.А.Семенко. - М.: Издательство "Экзамен", 2012
6. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2011: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. - Ростов-наДону: Легион, 2010.

Ключ к тесту

1	2	3	4	5	6	7
б	г	в	г	а	в	б