7 класс

Задача 7.1. Карлсон летит к бабушке.
Как-то летом Карлсон полетел навестить свою бабушку. Первую половину своего пути он пролетел со скоростью 30 км/ч. Затем Карлсон устал и сел перекусить. Хорошенько подкрепившись, он полетел дальше и преодолел остаток пути со скоростью 750 м/мин. Какую долю от времени своего путешествия Карлсон перекусывал, если его средняя скорость на всём пути составила 7,5 м/с?

Ответ: 1/4.

Решение: Пусть s — весь путь, пройденный Карлсоном. Разобьём всё путешествие на три участка: на первом он пролетел путь $s/2$ со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, на втором он перекусывал в течение времени t_2, на третьем он пролетел ещё раз путь $s/2$ со скоростью $v_3 = 750$ м/мин $= 45$ км/ч. Полное время путешествия Карлсона равно $t = s/v_{\text{сред}}$, где $v_{\text{сред}} = 7{,}5$ м/с $= 27$ км/ч. Время, потраченное им на первый и третий участки — $t_1 = s/(2v_1)$ и $t_3 = s/(2v_3)$, соответственно. Отсюда находим, что

$$t_2 = t - t_1 - t_3 = t - \frac{s}{2v_1} - \frac{s}{2v_3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t_2}{t} = 1 - \frac{s}{2v_1 t} - \frac{s}{2v_3 t} = 1 - \frac{v_{\text{сред}}}{2v_1} - \frac{v_{\text{сред}}}{2v_3} = 1 - 0{,}45 - 0{,}3 = 0{,}25.$$

Критерии:

Правильное приведение всех скоростей к одним единицам измерения . . . 1 балл
Записано выражение для t_1, t_3 . . . 2 балла
Записано выражение для t . . . 2 балла
Записано выражение для t_2 . . . 2 балла
Найдено отношение t_2/t . . . 3 балла

Задача 7.2. О длине поезда.
Пассажирский поезд, движущийся с постоянной скоростью v, проезжает туннель длины L за то же самое время, что этот же поезд проезжает мимо движущегося навстречу ему со скоростью $3v$ товарного состава, имеющего длину $6L$. Чему равна длина пассажирского поезда?

Ответ: $2L/3$.

Решение: Пусть l — длина пассажирского поезда. Путь, который должен пройти этот поезд, чтобы полностью выехать из туннеля, равен $l + L$. Время, которое он на это потратит, равно $t_1 = (l + L)/v$. Аналогично получаем, что путь, который должен пройти пассажирский поезд, чтобы полностью разъехаться с товарным составом, равен $l + 6L$. Так как скорость их сближения равна $v + 3v = 4v$, время разъезда поездов — $t_2 = (l + 6L)/(4v)$. Приравнивая времена t_1 и t_2, находим, что

$$\frac{l + L}{v} = \frac{l + 6L}{4v} \quad \Rightarrow \quad 4l + 4L = l + 6L \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2L}{3}.$$

Критерии:

Найден путь, пройденный пассажирским поездом при проезде туннеля . . . 2 балла
Найден путь, пройденный пассажирским поездом при разъезде с товарным составом . . . 2 балла
Найдена скорость сближения поездов . . . 2 балла
Найдено время проезда туннеля и время проезда мимо товарного поезда . . . 2 балла
Найдена длина пассажирского поезда . . . 2 балла

Задача 7.3. Кубики в мерном сосуде.
В мерный сосуд с водой помещают два кубика, большой и маленький. Если большой кубик находится внизу, то маленький кубик, располагаясь на нём, погружается в воду наполовину (см. рис. 7.1а). Если же большой кубик находится сверху, то он оказывается погружен в воду на треть своего объёма (см. рис. 7.1б). Определите с помощью этих рисунков объёмы обоих кубиков. Стенки мерного сосуда вертикальны, количество воды в нём в обоих случаях одно и то же.

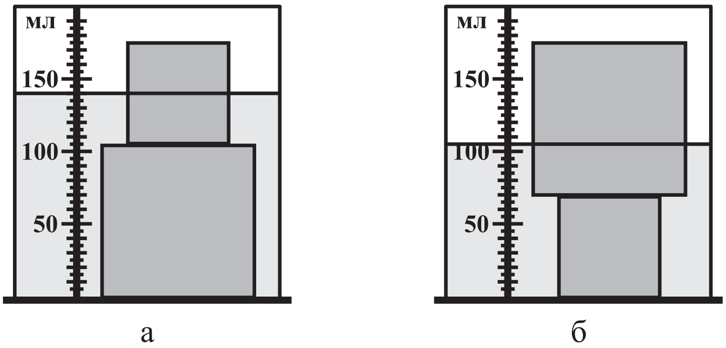

Рис. 7.1.

Ответ: Объём маленького кубика равен 20 см^3, объём большого — 67,5 см^3.

Решение: Сначала найдём отношение сторон большого и маленького кубиков. Для этого воспользуемся шкалой, нарисованной на сосуде. Высота маленького кубика соответствует 70 мл по мерной шкале, а высота большого кубика — 105 мл. Отсюда получаем, что длина стороны большого кубика в 1,5 раза больше длины стороны маленького.

Пусть a — длина ребра маленького кубика. Тогда его объём равен $V_1 = a^3$, а объём большого — $V_2 = (1{,}5a)^3 = 3{,}375a^3$. Суммарный объём, погруженный в воду на рис. 7.1а, составляет $V_2 + V_1/2 = 3{,}875a^3$. Во втором случае (рис. 7.1б) погруженный объём равен $V_1 + V_2/3 = 2{,}125a^3$. Так как разность между этими объёмами должна равняться 140 мл − 105 мл = 35 мл, получаем

$$3{,}875a^3 - 2{,}125a^3 = 35\text{ мл} \quad \Rightarrow \quad 1{,}75a^3 = 35\text{ мл} \quad \Rightarrow \quad a^3 = \frac{35\text{ мл}}{1{,}75} = 20\text{ мл} = 20\text{ см}^3.$$

Исходя из этого, находим объёмы кубиков: $V_1 = a^3 = 20$ см^3, $V_2 = 3{,}375a^3 = 67{,}5$ см^3.

Критерии:

Найдено отношение сторон кубиков . . . . 2 балла
Найдено отношение объёмов кубиков . . . . 1 балл
Записано уравнение для разности погруженных объёмов . . . . 3 балла
Найден объём маленького кубика . . . . 2 балла
Найден объём большого кубика . . . . 2 балла

Задача 7.4. Гонки!

Смешарики Крош и Бараш решили устроить велосипедные гонки. Для этого они нашли в лесу длинную тропинку, обозначили на ней место старта и финиша, а Лосяша попросили стать судьёй. Получив команду на старт, Бараш поехал к финишу с постоянной скоростью 21 км/ч. Крош же вначале решил дать фору Барашу и первую треть пути двигался со скоростью 18 км/ч, затем увеличил свою скорость до 27 км/ч, но в конце пути устал, снизил её до 20 км/ч и, как результат, проиграл Барашу.
1. Найдите длину гоночной дистанции, если, по данным Лосяша, Крош догнал Бараша через 21 мин после старта?
2. Через какое время после старта Бараш догнал Кроша, если на финише Бараш опередил соперника на 6 с?
Считать, что Крош и Бараш стартовали одновременно, двигались всё время в одном направлении, и никто из них с тропинки не съезжал.

Ответ: 1) 12,6 км. 2) 34 мин.

Решение: Пусть s — длина всей дистанции, $v_{\text{Б}}$ — скорость Бараша, $v_{\text{К1}}$, $v_{\text{К2}}$, $v_{\text{К3}}$ — скорости Кроша на первом, втором и третьем участке. Рассмотрим сначала первый вопрос задачи. Путь, пройденный гонщиками до момента первого обгона, равен $s_{\text{н}} = v_{\text{Б}}\cdot 21$ мин $= 7{,}35$ км. Из этих 7,35 км отрезок пути, равный $s/3$, Крош ехал со скоростью $v_{\text{К1}} = 18$ км/ч, а оставшийся участок — со скоростью $v_{\text{К2}} = 27$ км/ч. Поэтому

$$\frac{s/3}{v_{\text{К1}}} + \frac{7{,}35\text{ км} - s/3}{v_{\text{К2}}} = 21\text{ мин} \quad \Rightarrow \quad s = 12{,}6\text{ км}.$$

Для ответа на второй вопрос рассмотрим финишный отрезок пути (после обгона Кроша Барашем). Пусть он имеет длину $s_ф$. Бараш на нём ехал со скоростью $v_Б$, а Крош — со скоростью $v_{КЗ} = 20$ км/ч. Так как Бараш финишировал на 6 секунд раньше, можно записать, что

$$\frac{s_ф}{v_{КЗ}} - \frac{s_ф}{v_Б} = 6\ \text{с} \quad \Rightarrow \quad s_ф = 0{,}7\ \text{км}.$$

Всю дистанцию Бараш проехал за время $t = s/v_Б = 36$ мин, а финишный отрезок — за время $t_ф = s_ф/v_Б = 2$ мин. Отсюда находим, что Бараш догнал Кроша через 36 мин – 2 мин = 34 мин после старта.

Критерии:

Найден путь, пройденный до первого обгона . . . . . 1 балл
Составлено уравнение для нахождения длины дистанции . . . . . 2 балла
Найдена длина дистанции . . . . . 2 балла
Найдено время прохождения дистанции Барашем . . . . . 1 балл
Найден путь, пройденный от второго обгона до финиша . . . . . 2 балла
Найдено время второго обгона . . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Средняя скорость велосипедиста.
Автомобиль первую часть пути проехал со скоростью втрое большей, чем вторую, а третью, последнюю часть пути — со скоростью вдвое меньшей, чем первую. С какими скоростями перемещался автомобиль на первом, втором и третьем участках, если на преодоление первого и третьего участков он затратил одно и то же время, равное половине времени на втором участке, а его средняя скорость на всём пути составила 19,5 м/с?

Ответ: $\upsilon_1 = 36$ м/с, $\upsilon_2 = 12$ м/с, $\upsilon_3 = 18$ м/с.

Решение: Пусть υ_2 — скорость автомобиля на втором участке, тогда на первом участке его скорость равна $\upsilon_1 = 3\upsilon_2$, а на третьем — $\upsilon_3 = 3\upsilon_2/2$. Обозначим за t_1 время автомобиля на первом (и третьем) участке, тогда второй участок он проехал за время $2t_1$. Весь путь, пройденный автомобилем, составляет

$$s = \upsilon_1 t_1 + \upsilon_2 \cdot 2t_1 + \upsilon_3 t_1 = 3\upsilon_2 t_1 + 2\upsilon_2 t_1 + \frac{3}{2}\upsilon_2 t_1 = \frac{13}{2}\upsilon_2 t_1,$$

а общее время равно $t = t_1 + 2t_1 + t_1 = 4t_1$. С другой стороны, $s = \upsilon_{\text{сред}} t$. Отсюда получаем

$$\frac{13}{2}\upsilon_2 t_1 = \upsilon_{\text{сред}} \cdot 4t_1 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \frac{8\upsilon_{\text{сред}}}{13} = 12\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорости на первом и третьем участках, соответственно, равны

$$\upsilon_1 = 3\upsilon_2 = 36\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \upsilon_3 = 1{,}5\upsilon_2 = 18\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Критерии:

Скорости на всех участках выражены через одну из них . . . . 1 балл
Время на всех участках выражено через одно из них . . . . 1 балл
Записана связь между s, t и $\upsilon_{\text{сред}}$ . . . . 1 балл
Найден весь путь, пройденный автомобилем . . . . 2 балла
Записано уравнение для искомой скорости . . . . 3 балла
Найдены скорости на всех участках . . . . 2 балла

Задача 8.2. Кубики в сосуде.
В цилиндрический сосуд помещают два лежащих друг на друге кубика (маленький на большом), сделанных из одинакового материала. Маленький кубик является сплошным, в то время как большой кубик, имеющий ребро вдвое большей длины, имеет внутри полость. В сосуд медленно наливают масло. Когда уровень масла достигает середины маленького кубика (см. рис. 8.1а), нижний кубик отрывается от дна. Если же опыт повторить в случае, когда кубики переставлены местами, то, как только масло достигнет того же самого уровня (см. рис. 8.1б), верхний кубик оторвётся от нижнего.

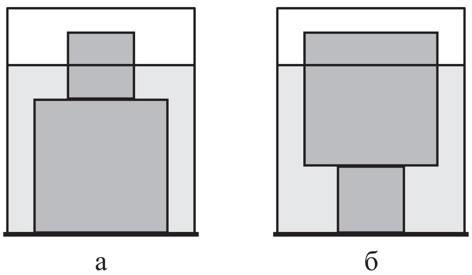

Рис. 8.1.

1. Какова плотность материала, из которого сделаны кубики, если плотность масла равна 900 кг/м^3?
2. Какую долю объёма большого кубика занимает полость?

Ответ: 1) 2250 кг/м^3. 2) 7/10.

Решение: Пусть m_1 и m_2 — массы маленького и большого кубиков, а ρ — плотность материала, из которого они сделаны. Обозначим a длину ребра маленького кубика, тогда длина ребра большого кубика равна $2a$. Объём маленького кубика равен $V_1 = a^3$, большого — $V_2 = 8a^3$. По условию задачи высота слоя масла в сосуде в обоих случаях одинаковая и равна $2{,}5a$. Из этого следует, что во втором случае (рис. 8.1б) большой кубик погружен в масло на глубину $1{,}5a$, то есть на 3/4 своего объёма. Запишем условие плавания для большого кубика в этом случае и определим из него m_2:

$$m_2 g = \rho_{\text{м}} g \cdot \frac{3}{4} V_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 6\rho_{\text{м}} a^3.$$

Запишем теперь условие плавания в первом случае и найдём отсюда ρ:

$$(m_1 + m_2)g = \rho_{\text{м}} g \left(V_2 + \frac{V_1}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \rho a^3 + 6\rho_{\text{м}} a^3 = \rho_{\text{м}} \left(8a^3 + \frac{a^3}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{5}{2}\rho_{\text{м}} = 2250\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Объём стенок большого кубика равен
$$V_{\text{стен}} = \frac{m_2}{\rho} = \frac{3}{10}V_2,$$
следовательно, объём полости составляет 7/10 объёма большого кубика.

Критерии:

Определён объём погруженной части большого кубика во втором случае . . . . 1 балл
Записано условие плавания во втором случае . . . . 2 балла
Найдено выражение для массы большого кубика . . . . 1 балл
Записано условие плавания в первом случае . . . . 2 балла
Найдена плотность материала кубиков . . . . 1 балл
Найдена доля объёма большого кубика, занятого полостью . . . . 3 балла

Задача 8.3. Чебурашка помогает Гене.

Как-то осенним днём Крокодил Гена купил в магазине два одинаковых по массе пакета апельсинов и понёс их домой. Чебурашка, в качестве моральной поддержки, шёл рядом с Крокодилом. Внезапно один из пакетов не выдержал и порвался, а апельсины упали в лужу. Чтобы помочь Гене донести последний оставшийся пакет, Чебурашка сел Крокодилу на плечи и взял покупку в свои руки. Чему равнялась масса одного пакета апельсинов, если масса Чебурашки равна M, а масса Гены — $47M$? Известно, что суммарное давление Гены и Чебурашки на землю (вместе с покупками) в конце путешествия стало в 1,2 раза меньше их суммарного давления при выходе из магазина. Общая площадь ступней Гены в 10 раз больше общей площади ступней Чебурашки.

Ответ: $3M/4$.

Решение: Пусть площадь ступней Гены равна S, тогда площадь ступней Чебурашки будет равна $S/10$. Обозначим m массу одного пакета апельсинов. Суммарное давление Гены и Чебурашки при выходе из магазина равно
$$p_1 = \frac{Mg}{S/10} + \frac{(47M + 2m)g}{S} = \frac{(57M + 2m)g}{S},$$
а в конце путешествия —
$$p_2 = \frac{(47M + M + m)g}{S} = \frac{(48M + m)g}{S}.$$
По условию задачи $p_1 = 1{,}2p_2$. Подставляя сюда выражения для давлений, получаем
$$\frac{(57M + 2m)g}{S} = \frac{1{,}2(48M + m)g}{S} \quad \Rightarrow \quad 57M + 2m = 57{,}6M + 1{,}2m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3M}{4}.$$

Критерии:

Записано выражение для давления в первом случае . . . . 3 балла
Записано выражение для давления во втором случае . . . . 3 балла
Найдена масса пакета апельсинов . . . . 4 балла

Задача 8.4. Эксперименты с линейкой.

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, мальчик Паша решил определить массу пустого медицинского шприца (без иглы) ёмкостью 20 мл. Для этого он взял линейку длиной 50 см и подвесил к её концу шприц, наполовину наполненный водой. Получившуюся систему Паша подвесил на нити. Оказалось, что система находится в равновесии, если точка подвеса линейки располагается на расстоянии 36 см от одного из её краёв. Выяснив это, Паша повторил опыт, но со шприцем, заполненным водой полностью. В этом случае система находится в равновесии, когда точка подвеса линейки расположена на расстоянии 38 см от того же края.
1. Определите массу пустого шприца.
2. Под конец Паша решил определить ещё и плотность неизвестной жидкости. Для этого он провёл третий опыт, но со шприцем, полностью заполненным этой жидкостью. Найдите плотность неизвестной жидкости, если в этом случае точка подвеса оказалась на расстоянии 38,5 см от края линейки.
Линейку считать однородной, массой нитей пренебречь. Плотность воды равна 1000 кг/м^3.

Ответ: 1) 16,4 г. 2) 1,15 г/см^3.

Решение: Обозначим M массу линейки, а m — массу пустого шприца. Тогда масса шприца, заполненного наполовину, равна $m + 10$ г, а заполненного полностью — $m + 20$ г. Так как линейка однородна, её центр тяжести находится в середине, то есть на расстоянии 25 см от краёв. Запишем правило моментов для первых двух случаев:

1. $Mg(36\text{ см} - 25\text{ см}) = (m + 10\text{ г})g(50\text{ см} - 36\text{ см}) \quad \Rightarrow \quad 11M = 14(m + 10\text{ г}),$

2. $Mg(38\text{ см} - 25\text{ см}) = (m + 20\text{ г})g(50\text{ см} - 38\text{ см}) \quad \Rightarrow \quad 13M = 12(m + 20\text{ г}).$

Исключив из полученных равенств массу линейки, получим

$$\frac{11}{13} = \frac{14(m + 10\text{ г})}{12(m + 20\text{ г})} \quad \Rightarrow \quad m = 16{,}4\text{ г}.$$

Масса линейки тогда равна

$$M = \frac{14(m + 10\text{ г})}{11} = 33{,}6\text{ г}.$$

Рассмотрим теперь третий случай. Пусть масса жидкости в шприце равна $m_ж$. Запишем правило моментов для третьего случая:

$$Mg(38{,}5\text{ см} - 25\text{ см}) = (m + m_ж)g(50\text{ см} - 38{,}5\text{ см}) \quad \Rightarrow \quad 13{,}5M = 11{,}5(m + m_ж).$$

Отсюда получим, что

$$m_ж = \frac{27M}{23} - m \approx 23\text{ г} \quad \Rightarrow \quad \rho_ж = \frac{m_ж}{20\text{ мл}} \approx 1{,}15\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Критерии:

Записано правило моментов для первого случая . . . 2 балла
Записано правило моментов для второго случая . . . 2 балла
Найдена масса шприца . . . 2 балла
Записано правило моментов для третьего случая . . . 2 балла
Найдена плотность неизвестной жидкости . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 8 классе . . . 40