

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8															
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

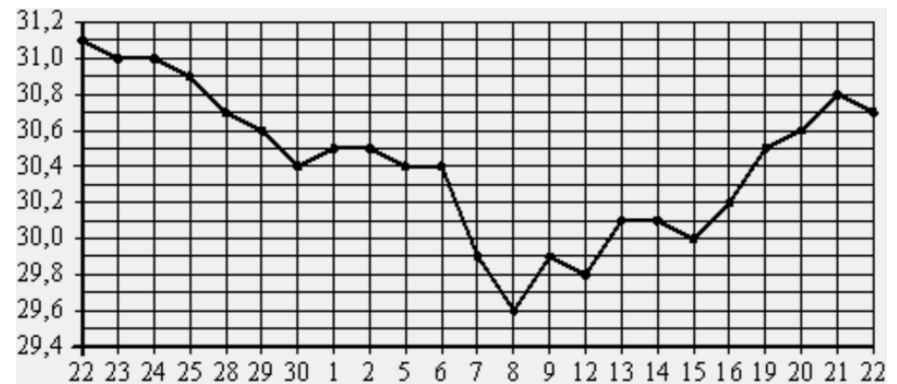
$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** Диагональ экрана телевизора равна 55 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

Ответ: _____.

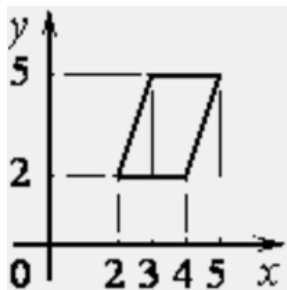
- 2** На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – курс доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольший курс доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.



Ответ: _____.



3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

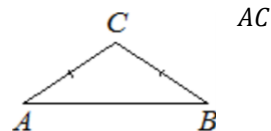
4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что разность выпавших очков равна 1 или 2.

Ответ: _____.

5 Найдите корень уравнения $5^{6+x} = 5$.

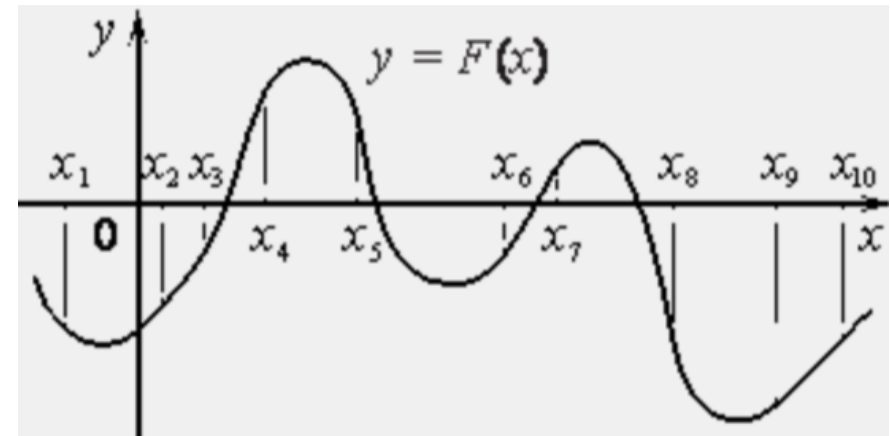
Ответ: _____.

6 В треугольнике ABC угол C равен 102° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.



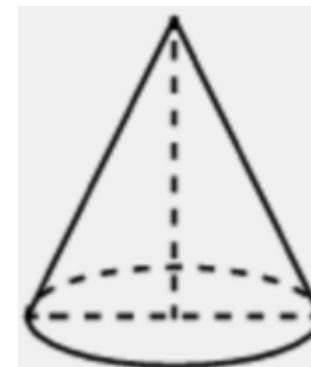
Ответ: _____.

7 На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



Ответ: _____.

8 Диаметр основания конуса равен 40, а длина образующей – 25. Найдите высоту конуса.



Ответ: _____.



9 Найдите $4 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,5$.

Ответ: _____.

10 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 494 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}, \text{ где } c = 1500 \text{ м/с} - \text{ скорость звука в воде, } f_0 - \text{ частота}$$

испускаемых импульсов, f – частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 18 м/с.

Ответ: _____.

11 Первый сплав содержит 5% меди, второй – 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6x + 1$ на отрезке $[2; 25]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

15 Решите неравенство $\frac{10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50}{5x - x^2 - 4} \geq 0$.

16 В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 4\sqrt{3}$.



17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

19 Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата.

- а) Могло ли N равняться 2?
- б) Могло ли N равняться 10?
- в) Каково наибольшее возможное значение N ?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
 Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
 (также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора



**Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19**

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	109
2	31,1
3	6
4	0,5
5	-5
6	39
7	7
8	15
9	2
10	506
11	18
12	-31
13	а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$. б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$
14	$5\sqrt{3}$
15	$[2; 4)$
16	6
17	5
18	$(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$
19	а) да, б) нет, в) 9

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0,75.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

Решение:

а)

Косинус двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0,75$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$$



$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{19\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{17\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$. б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

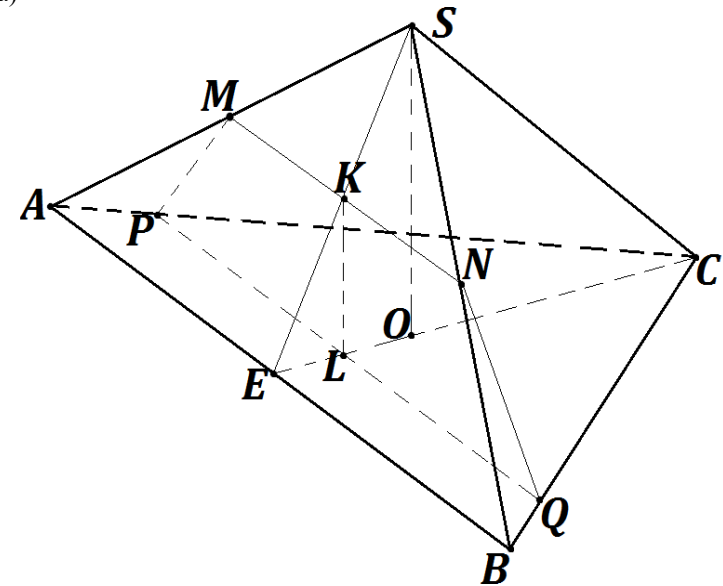
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

Решение:

а)



Пусть O – центр основания пирамиды
 Рассмотрим $\triangle ABS$ – равнобедренный:
 Проведём медиану SE , являющуюся ещё и биссектрисой и высотой
 Пусть $(SEC) \cap MN = K$
 Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$
 Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$
 Построим прямую NQ , т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости
 Построим прямую PM , т.к. точки P и M лежат в одной плоскости
 $MNQP$ – сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ – прямоугольный:
 Т.к. K – середина SE и $KL \parallel SO$, то KL – средняя линия $\triangle SOE$
 $\Rightarrow L$ – середина OE
 Пусть $EL = OL = x$
 Т.к. CE – медиана в $\triangle ABC$, то:
 $\frac{OC}{OE} = 2:1$
 $\Rightarrow OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$



$$\Rightarrow \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$

б)
 Расстояние от точки A до плоскости α равно расстоянию от точки E до плоскости α , потому что A и E лежат на одной прямой
 Итак, EL – искомое расстояние

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 60 = 30\sqrt{3}$$

$$EL = \frac{1}{6} \cdot CE = \frac{1}{6} \cdot 30\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: б) $5\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт a . ИЛИ Верно решён пункт b при отсутствии обоснований в пункте a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

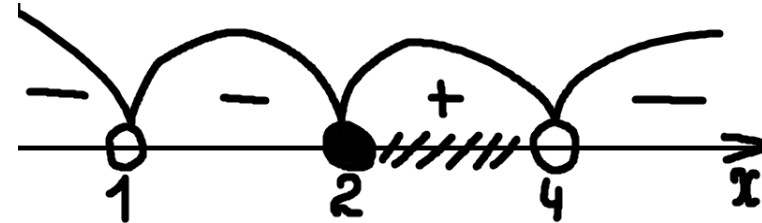
15 Решите неравенство

$$\frac{10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50}{5x - x^2 - 4} \geq 0.$$

Решение:

$10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50 = 0$	$5x - x^2 - 4 \neq 0$
$(10^x - 25 \cdot 2^x) + (-2 \cdot 5^x + 50) = 0$	$-x^2 + 5x - 4 \neq 0$
$2^x \cdot (5^x - 25) - 2 \cdot (5^x - 25) = 0$	$D = 25 - 16 = 9$
$(5^x - 25)(2^x - 2) = 0$	$x_1 = \frac{-5 + 3}{-2} = 1$
$5^x - 25 = 0$	$2^x - 2 = 0$

$5^x = 25$	$2^x = 2$	$x_2 = \frac{-5 - 3}{-2} = 4$
$5^x = 5^2$	$2^x = 2^1$	
$x = 2$	$x = 1$	



Ответ: [2; 4)

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

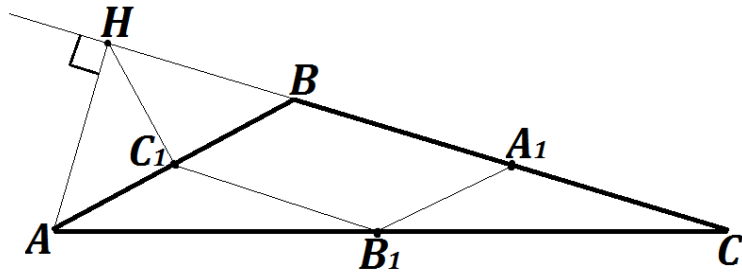
16 В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

- Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.
- Найдите A_1H , если $BC = 4\sqrt{3}$.

Решение:

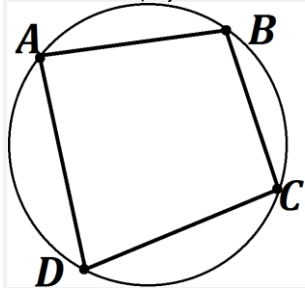
а)





Соединим точками четырёхугольник $A_1B_1C_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность



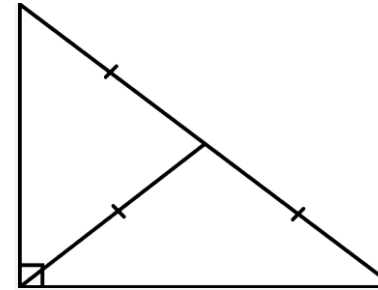
$$\begin{aligned} \angle A + \angle C &= 180^\circ \\ \angle B + \angle D &= 180^\circ \end{aligned}$$

Наша задача – доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:

$$\begin{aligned} \angle BCA &= 45^\circ \\ \angle ABC &= 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 45 - 30 = 105^\circ \\ \angle ABH &= 180 - \angle ABC = 180 - 105 = 75^\circ \\ \angle BAH &= 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 75 = 15^\circ \\ \angle CAH &= \angle BAC + \angle BAH = 30 + 15 = 45^\circ \end{aligned}$$

Свойства медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный
 C_1H – медиана

\Rightarrow

$C_1H = AC_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)

\Rightarrow

$\triangle AC_1H$ – равнобедренный

\Rightarrow

$$\angle AHC_1 = \angle BAH = 15^\circ$$

Признаки параллелограмма

Четырёхугольник является параллелограммом:

- 1) Если две стороны равны и параллельны
- 2) Если противоположные углы попарно равны
- 3) Если противоположные стороны попарно равны
- 4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
- 5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
- 6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
- 7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
- 8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $A_1B_1C_1B_1$

$A_1B_1 \parallel BC_1$
 $A_1B_1 = BC_1$ (т.к. A_1B_1 – средняя линия)

\Rightarrow

$A_1B_1C_1B_1$ – параллелограмм

\Rightarrow

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 105^\circ$$

$$\angle A_1HC_1 = \angle AHA_1 - \angle AHC_1 = 90 - 15 = 75^\circ$$



$$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1HC_1 = 105 + 75 = 180^\circ$$

=>

Четырёхугольник $A_1B_1C_1H$ можно вписать в окружность

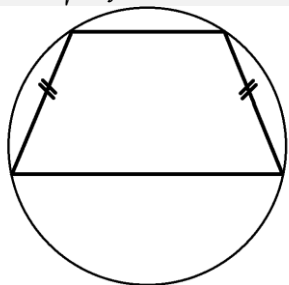
=>

Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности

■

б)

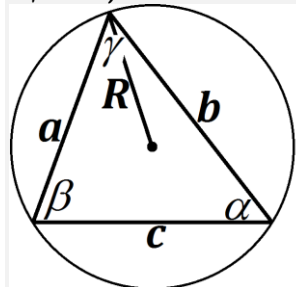
Свойства трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1B_1C_1H$ – равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

или

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$$

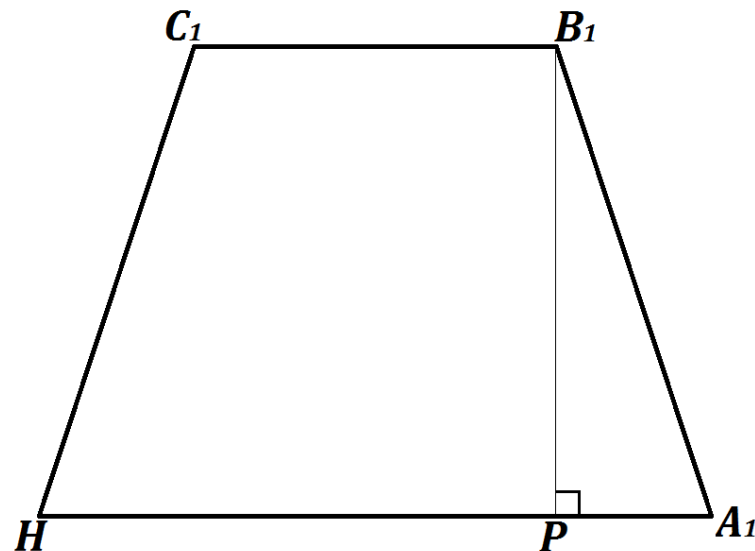
$$AB = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{6}$$

=>

$$A_1B_1 = \frac{AB}{2} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$$

$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1B_1C_1H$:



Пусть

B_1P – высота трапеции

$$\angle B_1A_1P = \angle BHC_1 = 75^\circ$$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$



$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

$$\cos \angle B_1 A_1 P = \frac{A_1 P}{A_1 B_1}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{A_1 P}{2\sqrt{6}}$$

$$\cos(45 + 30)^\circ = \frac{A_1 P}{2\sqrt{6}}$$

$$\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{A_1 P}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{A_1 P}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{A_1 P}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{A_1 P}{2\sqrt{6}} \quad | \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{A_1 P}{\sqrt{3}}$$

$$3\sqrt{2} - \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot A_1 P$$

$$A_1 P = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{3}$$

$$A_1 H = 2 \cdot A_1 P + B_1 C_1 = 2 \cdot (3 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} = 6$$

Ответ: б) 6

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Решение:



Переведём миллионы в тысячи:

1 млн это 1000 тыс.

1,2 млн это 1200 тыс.

Пусть клиент вносил платежи 7 числа каждого месяца

Кредит на 6 месяцев, поэтому будет 6 платежей:

x_1 – первый платёж

x_2 – второй платёж

...

x_6 – шестой платёж

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
15.01	1000
01.02	$1000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 1000 + 10r$
07.02	$1000 + 10r - x_1$
15.02	900
01.03	$900 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 900 + 9r$
07.03	$900 + 9r - x_2$
15.03	800
01.04	$800 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 800 + 8r$
07.04	$800 + 8r - x_3$
15.04	700
01.05	$700 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 700 + 7r$

07.05	$700 + 7r - x_4$
15.05	600
01.06	$600 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 600 + 6r$
07.06	$600 + 6r - x_5$
15.06	500
01.07	$500 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 500 + 5r$
07.07	$500 + 5r - x_6$
15.07	0

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1000 + 10r - x_1 = 900 \\ 900 + 9r - x_2 = 800 \\ 800 + 8r - x_3 = 700 \\ 700 + 7r - x_4 = 600 \\ 600 + 6r - x_5 = 500 \\ 500 + 5r - x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1000 + 10r - 900 = x_1 \\ 900 + 9r - 800 = x_2 \\ 800 + 8r - 700 = x_3 \\ 700 + 7r - 600 = x_4 \\ 600 + 6r - 500 = x_5 \\ 500 + 5r = x_6 \end{cases}$$

Сложим левые и правые части уравнений:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000 + 45r$$

Общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн рублей

(по условию)

\Rightarrow

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1200 \text{ тыс.}$$



$$1000 + 45r > 1200$$

$$45r > 200$$

$$r > \frac{200}{45}$$

$$r > \frac{40}{9}$$

$$r > 4\frac{4}{9}$$

Требуется найти наименьшее подходящее целое r

\Rightarrow

$$r = 5$$

Ответ: 5

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

Решение:

Правая часть уравнения равна корню

\Rightarrow

Правая часть уравнения неотрицательна

Получаем систему:

$$\begin{cases} x^2 + x - a \geq 0 \\ \sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = (x^2 + x - a)^2 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + (x - a))^2$$

$$x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + 2x^2(x - a) + (x - a)^2$$

$$x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + 2x^3 - 2ax^2 + x^2 - 2ax + a^2$$

$$-x^2 = 2x^3 - 2ax^2 + x^2 - 2ax$$

$$2x^3 + 2x^2 - 2ax^2 - 2ax = 0$$

$$2x^2(x + 1) - 2ax(x + 1) = 0$$

$$x^2(x + 1) - ax(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x^2 - ax) = 0$$

$$x(x + 1)(x - a) = 0$$

Это уравнение имеет 3 решения

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = a$$

Мы ищем все значения a , при каждом из которых уравнение имеет ровно три различных корня

\Rightarrow

$$a \neq 0$$

$$a \neq -1$$

При этом каждый из трёх «иксов» должен удовлетворять неравенству $x^2 + x - a \geq 0$ из системы:

Если $x_1 = 0$, то

$$0^2 + 0 - a \geq 0$$

$$a \leq 0$$

Если $x_2 = -1$, то

$$(-1)^2 - 1 - a \geq 0$$



$$a \leq 0$$

Если $x_3 = a$, то

$$a^2 + a - a \geq 0$$

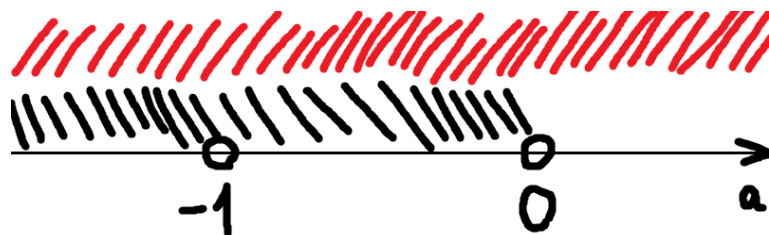
$$a^2 \geq 0$$

\Rightarrow

a – любое

Запишем систему всех условий для a :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \leq 0 \\ a - \text{любое} \end{cases}$$



Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата.

а) Могло ли N равняться 2?

б) Могло ли N равняться 10?

в) Каково наибольшее возможное значение N ?

Решение:

Пусть

x – двузначное число

y – трёхзначное число

Тогда

$1000x + y$ – число, полученное после приписывания трёхзначного справа к двузначному

(Пример: 12 и 345, получится 12345, т.е. 12 стало количеством тысяч)

$$\frac{1000x + y}{xy} = N$$

а)

$$\frac{1000x + y}{xy} = 2$$

$$1000x + y = 2xy$$

Попробуем решить в целых числах

Заметим, что y – чётное число, т.к. правая часть уравнения чётная, значит и оба слагаемых левой части уравнения – чётные

$$1000x - 2xy = -y$$

$$2x(500 - y) = -y$$

$$x = \frac{y}{2(y - 500)}$$

Заметим, что $(y - 500)$ – чётное число, т.к. если из чётного y вычтём чётные 500, то получится чётный результат

\Rightarrow



y делится как минимум на 4

Возьмём y большее 500, и которое при этом делится на 4

$y = 504$ – самое первое такое число

Получаем

$$x = \frac{504}{2(504 - 500)} = 63$$

Проверяем:

$$\frac{63504}{63 \cdot 504} = 2$$

\Rightarrow

Могло

б)

$$\frac{1000x + y}{xy} = 10$$

$$1000x + y = 10xy$$

$$1000x = 10xy - y$$

$$1000x = y(10x - 1)$$

$$x = \frac{y(10x - 1)}{1000}$$

Числа 1000 и $(10x - 1)$ не имеют общих делителей, т.к.

$$1000 = 2^3 \cdot 5^3$$

$(10x - 1)$ состоит из двух слагаемых

$10x$ делится на 2 и 5

-1 не делится на 2 и 5

\Rightarrow

$(10x - 1)$ не делится на 2 и 5

\Rightarrow

y обязан делиться на 1000 без остатка, но y – трёхзначное число

\Rightarrow

y не может делиться на 1000 без остатка

\Rightarrow

Не могло

в)

$$\frac{1000x + y}{xy} = N$$

$$N = \frac{1000x}{xy} + \frac{y}{xy}$$

$$N = \frac{1000}{y} + \frac{1}{x}$$

N будет максимальным, если x и y будут как можно меньшими

Минимально возможный y – это 100

Минимально возможный x – это 10

\Rightarrow

N не может быть больше, чем

$$\frac{1000}{100} + \frac{1}{10} = 10,1$$

$$N \leq 10,1$$

$N = 10$ не подходит (доказано в пункте б)

\Rightarrow

$$N \leq 9$$

Проверим могло ли N равняться 9?

$$\frac{1000x + y}{xy} = 9$$

$$1000x + y = 9xy$$

$$1000x - 9xy = -y$$

$$x(1000 - 9y) = -y$$

$$x = \frac{y}{9y - 1000}$$

Чтобы x и y получились положительными знаменатель дроби должен быть положительным

$$9y - 1000 > 0$$

$$9y > 1000$$

$$y > 111\frac{1}{9}$$



=>

$$y \geq 112$$

Если $y = 112$, то

$$x = \frac{112}{9 \cdot 112 - 1000} = \frac{112}{8} = 14$$

Проверяем:

$$\frac{14112}{14 \cdot 112} = 9$$

=>

 $N = 9$ подходит

Ответ: а) да, б) нет, в) 9

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

