Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

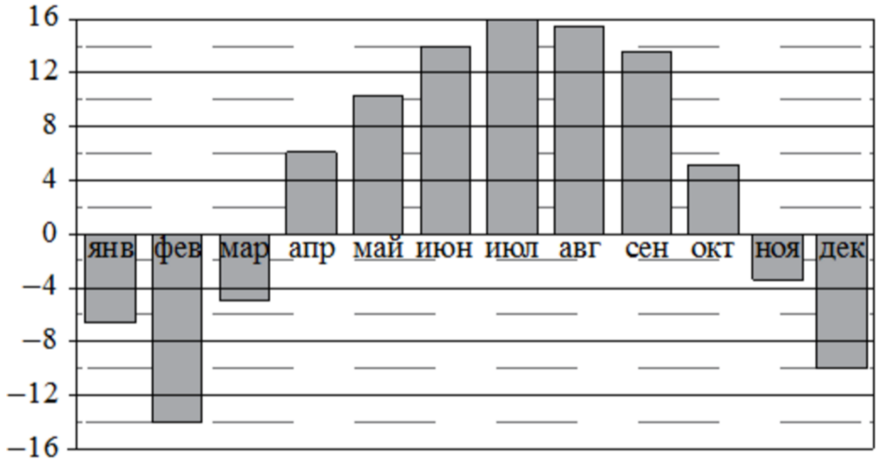
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 37 руб. за литр. Клиент получил 75 рублей сдачи. Сколько литров бензина было залито в бак?

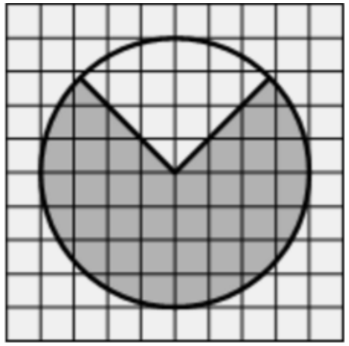
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в период с января по июнь 1994 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 Площадь круга, изображённого на клетчатой бумаге, равна 12. Найдите площадь заштрихованного кругового сектора.



Ответ: ___________________________.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Дании, 6 из Швеции, 4 из Норвегии и 7 из Финляндии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Норвегии.

Ответ: ___________________________.

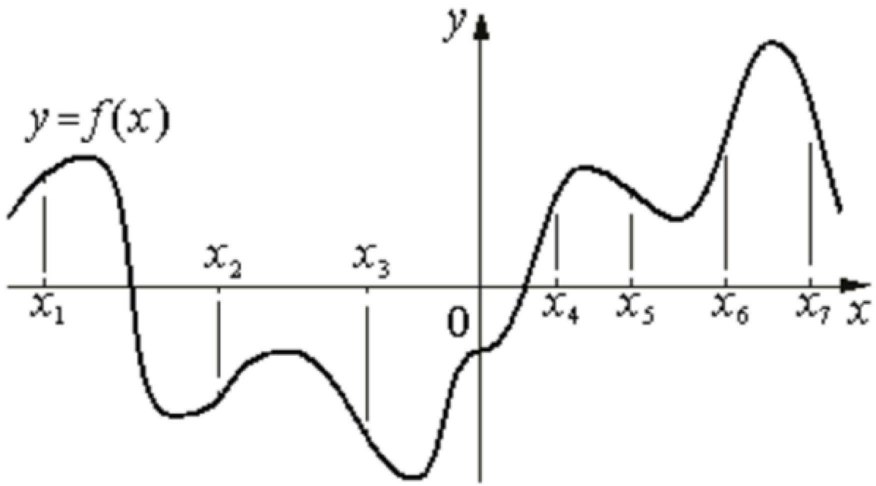
5 Найдите корень уравнения
$3^{\log_{27}(2x-9)} = 3.$

Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 20$, высота CH равна 16. Найдите синус угла ACB.

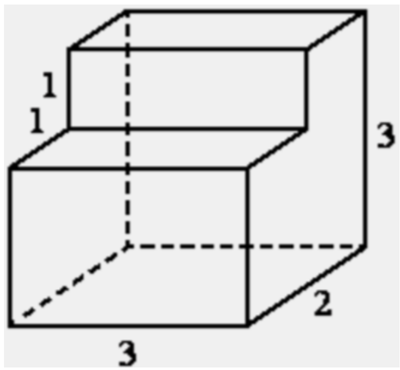
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

9 Найдите

$\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

10 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 170$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 12$ м/с и $v = 6$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 180 Гц?

Ответ: ___________________________.

11 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 187 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 6 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 6 часов. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции

$y = 10\sin x - \frac{36x}{\pi} + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD = 2:1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
б) Найдите площадь сечения.

15 Решите неравенство

$\log_2^2(8 + 2x - x^2) + 9\log_{0,5}(8 + 2x - x^2) + 18 > 0$.

16 Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 23$.

17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 20 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 9y + 5x + 20)\sqrt{x+5}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	25
2	14
3	9
4	0,2
5	18
6	0,8
7	4
8	15
9	0,4
10	312
11	17
12	32
13	а) $\pi n, \frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n \in Z.$ б) $2\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$
14	$\frac{20}{3}$
15	$(-2; 0) \cup (2; 4)$
16	4,375
17	9 млн
18	$(-\infty; -6] \cup \{6\} \cup [10; +\infty)$
19	а) нет, б) $(2; 3; 4; 5; 6; 7)$, в) 12

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

.

Решение:

а)

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$\sin 2x = \sin x$$

Синус двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$$2\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0$$

$\sin x = 0$	$2\cos x - 1 = 0$

$x = \pi n; n \in Z$	$2\cos x = 1$ $\cos x = \frac{1}{2}$ $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = \pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = 2\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = 3\pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $2\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев,	0

перечисленных выше	
Максимальный балл	2

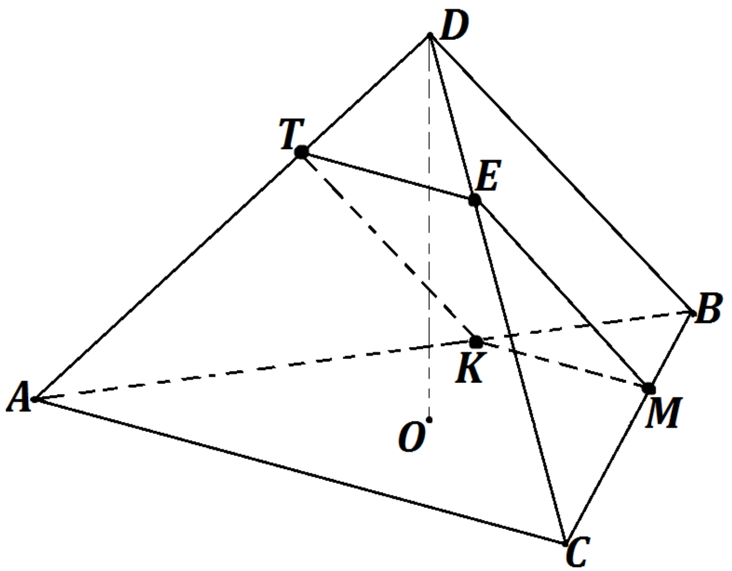
14 В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD = 2:1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

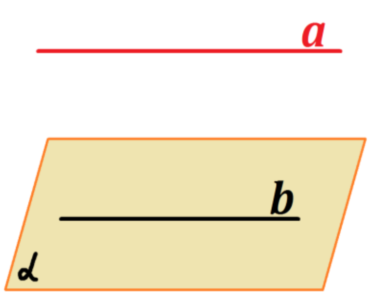
Решение:

а)



ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180326

Признак параллельности прямой и плоскости



Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости

Построим прямую TE такую, что $TE \parallel AC$
Построим прямую TK такую, что $TK \parallel BD$
Построим прямую KM такую, что $KM \parallel AC$
Построим прямую ME, т.к. точки M и E лежат в одной плоскости

$TE \parallel AC$ и $KM \parallel AC$
=>
$TE \parallel KM$

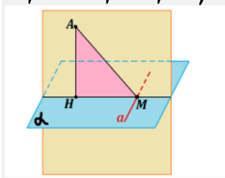
$ME \parallel BD$ и $TK \parallel BD$ (по признаку параллельности прямой и плоскости)
=>
$ME \parallel TK$

=> $TEMK$ – параллелограмм
Осталось доказать наличие угла 90° в параллелограмме $TEMK$, тогда мы докажем, что это прямоугольник

Угол между TE и TK равен углу между AC и BD, т.к. $TE \parallel AC$ и $TK \parallel BD$

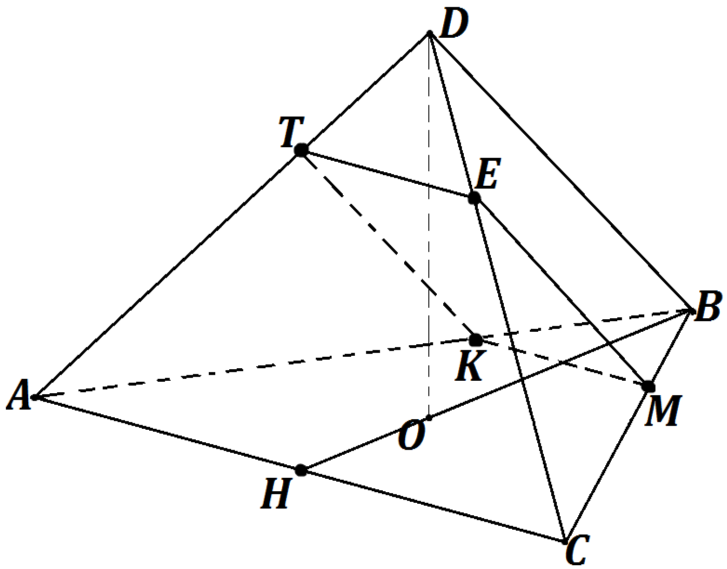
Найдём угол между AC и BD:

Теорема о трёх перпендикулярах



Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной
a – прямая
AM – наклонная
HM – проекция
AH – перпендикуляр

Пусть BH – высота в треугольнике ABC



$BH \perp AC$
BO – проекция BD на плоскость «пола», т.е. на плоскость ABC

$AC \perp BO$

=>
$AC \perp BD$ (по теореме о трёх перпендикулярах)
=>
$TE \perp TK$
=>
$\angle ETK = 90°$
=>
$TEMK$ – прямоугольник
■

б)
$S_{TEMK} = KT \cdot TE$

Найдём KT и TE:

$AD = 5$ и $AT:TD = 2:1$
=>
$AT = \frac{2}{3} \cdot AD = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$
$DT = \frac{1}{3} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$

$AC = 6$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках DTE и ACD (подобны по двум углам)
$\frac{DT}{AD} = \frac{TE}{AC}$
$\frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{TE}{6}$
=> $TE = 2$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках ATK и ABD (подобны по двум углам)
$\frac{AT}{AD} = \frac{KT}{BD}$
$\frac{\frac{10}{3}}{5} = \frac{KT}{5}$
=> $KT = \frac{10}{3}$

$S_{TEMK} = KT \cdot TE = \frac{10}{3} \cdot 2 = \frac{20}{3}$

Ответ: $\frac{20}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство
$\log_2^2(8 + 2x - x^2) + 9\log_{0,5}(8 + 2x - x^2) + 18 > 0.$

.

Решение:

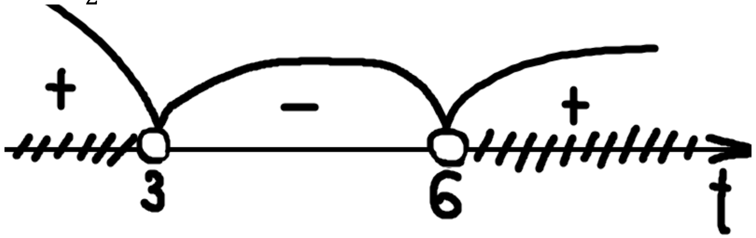
ОДЗ:
$8 + 2x - x^2 > 0$
$-x^2 + 2x + 8 = 0$
$D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 36$
$t_1 = \frac{-2 + 6}{-2} = -2$
$t_2 = \frac{-2 - 6}{-2} = 4$

$\log_2^2(8 + 2x - x^2) + 9\log_{2^{-1}}(8 + 2x - x^2) + 18 > 0$

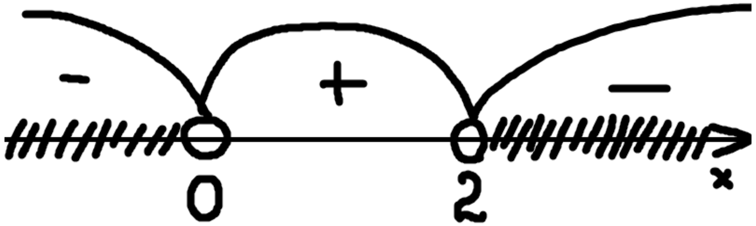
$\log_2^2(8+2x-x^2)-9\log_2(8+2x-x^2)+18>0$

Пусть $\log_2(8+2x-x^2)=t$

$t^2-9t+18>0$
$t^2-9t+18=0$
$D=(-9)^2-4\cdot1\cdot18=9$
$t_1=\dfrac{9+3}{2}=6$
$t_2=\dfrac{9-3}{2}=3$

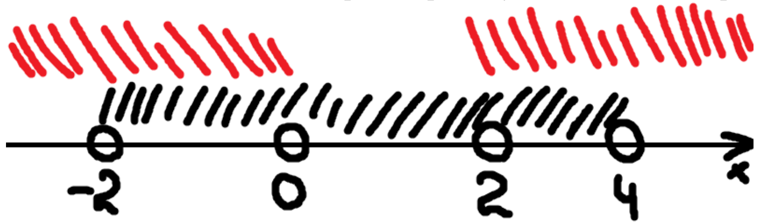


1.
$t<3$
$\log_2(8+2x-x^2)<3$
$\log_2(8+2x-x^2)<\log_2 8$
$8+2x-x^2<8$
$-x^2+2x<0$
$-x(x-2)<0$
$-x(x-2)=0$
$x=0$
$x=2$



2.
$t>6$
$\log_2(8+2x-x^2)>6$
$\log_2(8+2x-x^2)>\log_2 64$
$8+2x-x^2>64$
$-x^2+2x-56>0$
$-x^2+2x-56=0$
$D=3^2-4\cdot(-1)\cdot(-56)<0$
Нет корней
3.
ОДЗ:
$x\in(-2;4)$

Объединим все найденные корни и промежутки на числовой прямой



Ответ: $(-2;0)\cup(2;4)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

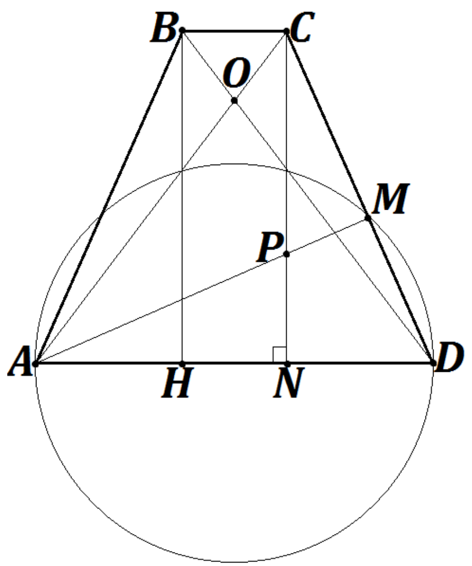
16 Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 23$.

Решение:

а)



Чтобы доказать то, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность нужно получить равенство:

$AP + BC = AB + CP$

$\angle AMD = 90°$

(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

$\angle CND = 90°$

(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

=>

CN – высота трапеции

Пусть

$BD \cap AC = O$

BH – высота трапеции

$\angle BCO = 45°$

(т.к. $\triangle BCO$ – прямоугольный и равнобедренный)

=>

$\angle CAN = 45°$

(т.к. это накрест лежащие углы)

$\angle ACN = \angle BCN - \angle BCO = 90 - 45 = 45°$

=>

$\triangle ACN$ – прямоугольный и равнобедренный

=>

$AN = CN$

Пусть

$AH = x$

$BC = y$

Тогда

$AN = x + y = CN$

$DN = x$

$CD = \sqrt{CN^2 + DN^2} = \sqrt{(x+y)^2 + x^2}$ (по теореме Пифагора)

$AB = CD = \sqrt{(x+y)^2 + x^2}$

Пусть

$\angle MAD = \alpha$

Тогда

$\angle ADM = 180 - \angle AMD - \angle MAD = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$

$\angle DCN = 180 - \angle CND - \angle CDN = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$

$\triangle APN = \triangle CDN$ по стороне и двум прилежащим к ней углам

$$\begin{pmatrix} AN = CN \\ \angle ANP = \angle CND = 90° \\ \angle PAN = \angle NCD = \alpha \end{pmatrix}$$

=>

$AP = CD = \sqrt{(x+y)^2 + x^2}$

$PN = DN = x$

=>

$CP = CN - PN = x + y - x = y$

=>

$AP + BC = AB + CP$

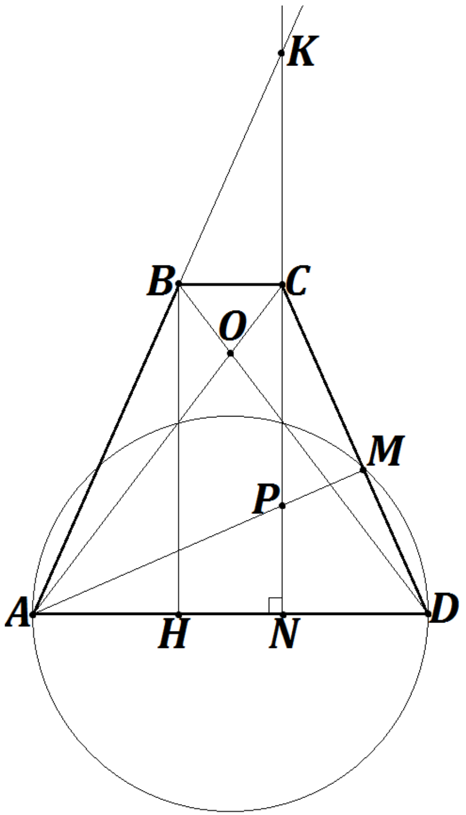
$\sqrt{(x+y)^2 + x^2} + y = \sqrt{(x+y)^2 + x^2} + y$

=>

В четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность

■

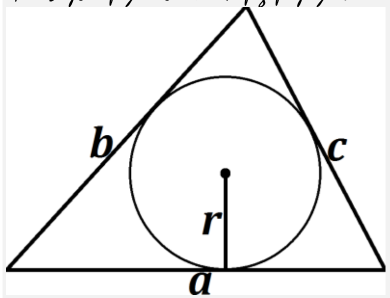
б)



Пусть
$CN \cap AB = K$

Идея поиска радиуса, вписанного в четырёхугольник, заключается в том, что можно найти радиус, вписанный в $\triangle AKP$ через формулу площади треугольника

Площадь треугольника (через радиус вписанной окружности)



$S = pr$
где p — полупериметр

$BC = y = 7 = CP$
$AD = 2x + y = 23$
=>
$x = 8$
$AN = x + y = 8 + 7 = 15 = CN$
$AB = \sqrt{(x+y)^2 + x^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 = AP$

$\triangle AKN \sim \triangle BCK$ по двум углам

$$\frac{AN}{BC} = \frac{AK}{BK}$$

$$\frac{15}{7} = \frac{17 + BK}{BK}$$

$15BK = 119 + 7BK$
$8BK = 119$

$$BK = \frac{119}{8} = 14{,}875$$

$$\frac{AN}{BC} = \frac{KN}{CK}$$

$$\frac{15}{7} = \frac{15 + CK}{CK}$$

$15CK = 105 + 7CK$
$8CK = 105$

$$CK = \frac{105}{8} = 13{,}125$$

$$S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot (CK + CP) \cdot AN$$

$$S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{105}{8} + 7\right) \cdot 15 = \frac{1}{2} \cdot \frac{161}{8} \cdot 15 = \frac{2415}{16}$$

$$p = \frac{AP + PK + AK}{2} = \frac{17 + \frac{161}{8} + 17 + \frac{119}{8}}{2} = \frac{69}{2}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{2415}{16}}{\frac{69}{2}} = 4{,}375$$

Ответ: 4,375

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 20 млн рублей.

.

Решение:

Пусть
x – размер первоначального вклада
31 декабря – день начисления процентов
10 января – день пополнения вклада
1 января 2010 года – день открытия вклада

Составим таблицу как изменялась сумма на счёте:

Число	Сумма на счёте
01.01.2010	x
10.01.2010	
31.12.2010	$\left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot x = 1{,}1x$
10.01.2011	
31.12.2011	$1{,}1 \cdot 1{,}1x = 1{,}21x$
10.01.2012	$1{,}21x + 3$
31.12.2012	$1{,}1 \cdot (1{,}21x + 3) = 1{,}331x + 3{,}3$
10.01.2013	$1{,}331x + 3{,}3 + 3 = 1{,}331x + 6{,}3$
31.12.2013	$1{,}1 \cdot (1{,}331x + 6{,}3) = 1{,}4641x + 6{,}93$

Итоговая сумма на счёте должна быть больше 20 млн рублей (по условию)
=>
$1{,}4641x + 6{,}93 > 20$ млн.

$1{,}4641x > 13{,}07$
$x > 8{,}9269 \ldots$

Требуется найти наименьшее подходящее целое x
=>
$x = 9$

Ответ: 9 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 9y + 5x + 20)\sqrt{x+5}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:
Найдём корни уравнения $y^2 - xy - 9y + 5x + 20 = 0$

$$y^2 - (x+9)y + 5x + 20 = 0$$

$$D = x^2 + 18x + 81 - 20x - 80 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$y = \frac{x + 9 + \sqrt{(x-1)^2}}{2} = \frac{x + 9 + |x-1|}{2}$$

$$y = \frac{x + 9 - \sqrt{(x-1)^2}}{2} = \frac{x + 9 - |x-1|}{2}$$

=>

$$y_1 = \frac{x + 9 + x - 1}{2} = x + 4$$

$$y_2 = \frac{x + 9 - x + 1}{2} = 5$$

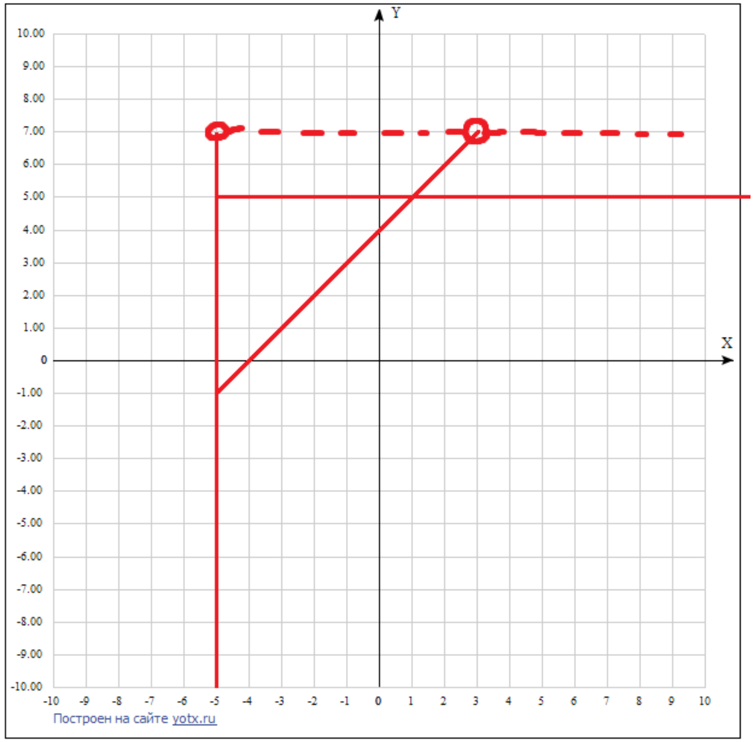
Получаем новую систему:

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ 7 - y > 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = x + 4 \\ y = 5 \\ \sqrt{x+5} = 0 \end{array}\right. \\ a = x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ y < 7 \\ \left[\begin{array}{l} y = x + 4 \\ y = 5 \\ x = -5 \end{array}\right. \\ y = -x + a \end{cases}$$

Решим графически:
Сначала построим график системы:

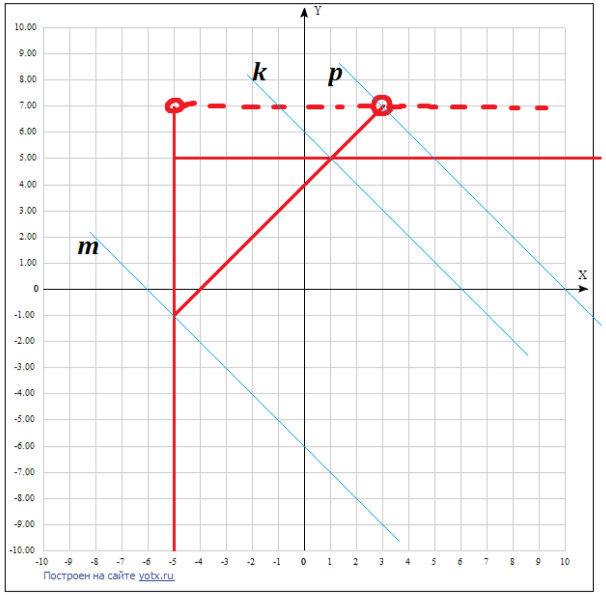
$$\begin{cases} x \geq -5 \\ y < 7 \\ \left[\begin{array}{l} y = x + 4 \\ y = 5 \\ x = -5 \end{array}\right. \end{cases}$$



$y = -x + a -$ семейство прямых с коэффициентов угла наклона касательной $k = -1$

Пусть
$m -$ прямая, проходящая через точку $(-5; -1)$ из семейства прямых $y = -x + a$
$k -$ прямая, проходящая через точку $(1; 5)$ из семейства прямых $y = -x + a$
$p -$ прямая, проходящая через точку $(3; 7)$ из семейства прямых $y = -x + a$

Проведём прямые m, k и p



Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = -x + a$ проходит через т. $(-5; -1)$
$-1 = 5 + a$
$a = -6$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой k
$y = -x + a$ проходит через т. $(1; 5)$
$5 = -1 + a$
$a = 6$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой p
$y = -x + a$ проходит через т. $(3; 7)$
$7 = -3 + a$
$a = 10$

Итак,
Если $a < -6$, то 1 пересечение
Если $a = -6$, то 1 пересечение
Если $-6 < a < 6$, то 2 или 3 пересечения
Если $a = 6$, то 1 пересечение
Если $6 < a < 10$, то 2 пересечения
Если $a = 10$, то 1 пересечение

Если $a > 10$, то 1 пересечение

Ответ: $a \in (-\infty; -6] \cup \{6\} \cup [10; +\infty)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?
б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.
в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?
.

Решение:

а)
$n = 5$
$a_1 + a_5 = 99$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$$

$$S_5 = \frac{99}{2} \cdot 5 = 247{,}5$$
=>
Не может, т.к. сумма, состоящая из натуральных чисел не может равняться ненатуральному числу

б)
$n = 6$
$a_1 + a_6 = 9$

n-й член арифметической прогрессии
$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$a_1 + a_1 + d(6-1) = 9$
$2a_1 + 5d = 9$
$d = 1$
(т.к. при других d решений не будет)
Тогда
$2a_1 = 4$
$a_1 = 2$

Получаем прогрессию:
2 3 4 5 6 7

в)
$$\text{Среднее арифметическое} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 6{,}5$$
=>
$S_n = 6{,}5n$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 6{,}5n$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = 6{,}5$$

$a_1 + a_n = 13$

$a_1 + a_1 + d(n-1) = 13$

$2a_1 + d(n-1) = 13$

Значение n будет тем больше – чем меньше будут a_1 и d
=>
Пусть
$a_1 = 1$
$d = 1$

$2 + n - 1 = 13$
$n = 12$

Получаем прогрессию:
$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12$

Ответ: а) нет, б) (2; 3; 4; 5; 6; 7), в) 12

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180326