МБОУ Покровская улусная многопрофильная гимназия
МР Хангаласский улус РС (Я)

Методы решения заданий с параметрами.

доклад учителя математики ПУМГ
Владимирова Михаила Даниловича

г. Покровск 2016 г.

Содержание

Введение……..3

Теоретические сведения

1.1. Полезные замечания о методах решения заданий с параметрами…4

1.2. Общие алгоритмы решения заданий с параметрами …….4

Способы решения заданий с параметрами

2.1. Графический метод…….……5

2.2. Применение области значений функции ……...9

2.3. Применение четности или нечетности функции ……10

2.4. Геометрический метод ……. ……..11

2.5. Применение периодичности функций……..13

2.6. Аналитический метод ……14

2.7. Метод областей на координатной плоскости ……15

Задачи для самостоятельного решения (с ответами) ……16

Заключение …….

Список использованной литературы ……17

Введение

На любых испытаниях и во время учебного процесса наибольшую сложность вызывают задачи с параметрами. Это объясняется двумя основными причинами. Во-первых, этой теме очень мало времени уделяется школьной программой. А вторая (основная) причина заключается в том, что это наиболее трудная тема как в логическом, так и техническом плане.

Основное содержание данного доклада составляют некоторые методы решения задач, содержащих параметры. Трудность в работе с задачами, содержащими параметр, заключается в большом разнообразии применяемых методов, необходимости особой аккуратности при решении и записи ответа. Трудности решения такого рода задач также вызваны тем, что в любом случае, даже при решении простейших уравнений или неравенств, содержащих параметры, приходится производить ветвление всех значений параметров на отдельные классы, при каждом из которых задача имеет решение. При этом следует четко и последовательно следить за сохранением равносильности решаемых уравнений или неравенств с учетом области определения выражений, входящих в уравнение или неравенство, а также учитывать выполнимость производимых операций.

Актуальность

Решение заданий с параметрами традиционно вызывает у учащихся непреодолимые трудности.

Из справки 2013 года:

К заданию С5 приступила только одна ученица, и только после систематических подготовок по решению таких заданий (0,1 % учащихся района). Для заданий с параметрами нужна большая систематизация методов решения таких заданий.

Объект исследования

Решение заданий с параметрами из ЕГЭ в блоке С (задание С5).

Предмет исследования

Решение заданий с параметрами разными методами. Систематизация этих методов.

В рамках данной работы рассмотрены типовые задачи ЕГЭ – С5, также их решение разными методами.

В своей работе я показал, как решаются задания с параметрами, систематизируя их по разным методам.

Итак, **цель** моей данной работы:

1. раскрыть содержание методов, рассказать основные формулы и свойства функций,
2. показать применение методов при решении конкретных задач,

3. решить сложные параметрические задачи с использованием разных методов.

Гипотеза

1. Через решение задач на нахождение параметров в разных условиях разными методами сделать систематизацию заданий с параметрами и научить школьников выбрать тот или иной способ решения задания этого блока.
2. Расширить представление о существовании разных методов при решении заданий с параметрами.
3. Применяя разные методы решения заданий с параметрами решить задания из ЕГЭ в блоке С (задание С5).

В задачах с параметром, кроме неизвестных величин, используются величины, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и удовлетворяющими каким-либо условиям. Например, значения параметра могут быть целыми, положительными и т.д. Будем рассматривать только действительные значения параметра и неизвестных.

Общее уравнение с одним неизвестным и одним параметром имеет вид $F(x; a) = 0$. При записи $F(x; a) = 0$ иногда смотрят на x как на параметр, а на a как на неизвестное. А можно рассматривать как уравнение с двумя равноправными переменными. На любое уравнение с несколькими переменными вида $F(x; y; z) = 0$ можно смотреть как на уравнение с параметрами. На самом деле, решая задачу с параметром, мы решаем много ≪похожих≫ задач. Если a заменить на конкретное a_0, то получим уравнение без параметра: $F(x; a_0) = 0$.

В течение многих лет в вариантах заданий ЕГЭ по математике предлагаются задания с параметрами. При решении задач с параметрами применяется много методов, из которых я остановлюсь на некоторых из них: нахождение области значений функции, использование свойств четности и нечетности функции, периодичности функции, геометрический и графический методы.

<u>Графический метод.</u>

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $8x - \left|6x - |x + a|\right| = 16|x - 3|$имеет хотя бы один корень.

Решение. Представим уравнение $8x - \left|6x - |x + a|\right| = 16|x - 3|$ в виде $8x - 16|x - 3| = \left|6x - |x + a|\right|$ и рассмотрим функции $f(x) = 8x - 16|x - 3|$ и $g(x) = \left|6x - |x + a|\right|$. Так как $g(x) \geq 0$, то $f(x) \geq 0$, т. е. $8x \geq 16|x - 3|$, $|x - 3| \leq \frac{x}{2}$, $2 \leq x \leq 6$, т. е. $x\epsilon[2; 6]$.

При $x\epsilon\ [2; 3)$ $f(x) = 24x - 48$ (возрастающая ф − я), а при $x\epsilon(3; 6]$ $f(x) = 48 - 8x$ (убывающая ф − я). Поэтому $max f(x) = f(3) = 24$.

При $x\epsilon(-a; +\infty)$ $g(x) = |5x - a|$, при $x \in (-\infty; -a)$ $g(x) = |7x + a|$, при $x = -a$ $g(-a) = |6a|$.

Построим схематические графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

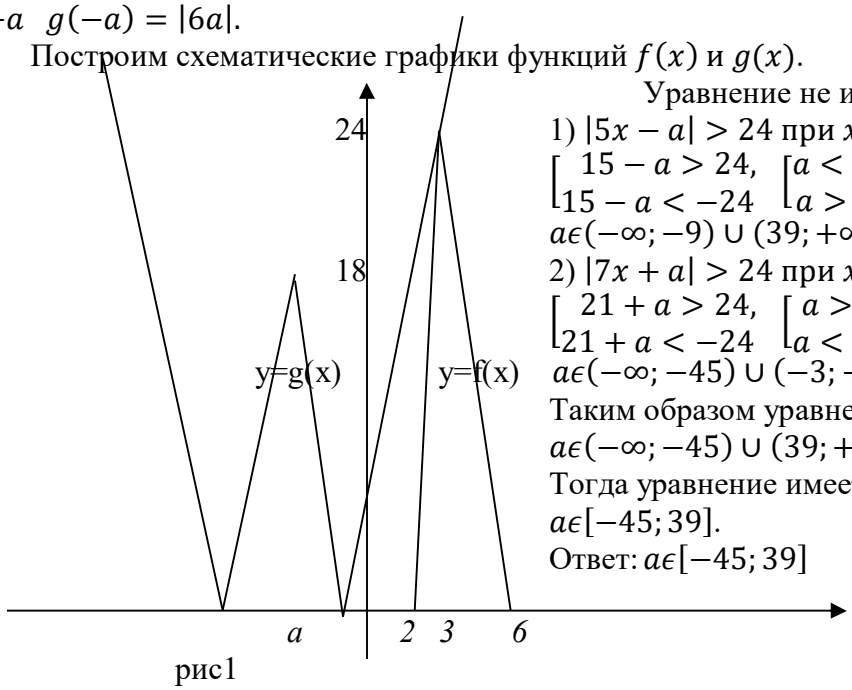


рис1

Уравнение не имеет решения, если

1) $|5x - a| > 24$ при $x = 3$, т. е. $|15 - a| > 24$

$\left[\begin{array}{l} 15 - a > 24, \\ 15 - a < -24 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a < -9 \\ a > 39 \end{array}\right.$

$a\epsilon(-\infty; -9) \cup (39; +\infty)$

2) $|7x + a| > 24$ при $x = 3$, т. е. $|21 + a| > 24$

$\left[\begin{array}{l} 21 + a > 24, \\ 21 + a < -24 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a > -3 \\ a < -45 \end{array}\right.$

$a\epsilon(-\infty; -45) \cup (-3; +\infty)$

Таким образом уравнение не имеет решения при $a\epsilon(-\infty; -45) \cup (39; +\infty)$.

Тогда уравнение имеет хотя бы один корень при $a\epsilon[-45; 39]$.

Ответ: $a\epsilon[-45; 39]$

Задача 2. Найдите все значения *a*, при которых уравнение $x^3 - 2ax^2 + a^2x - 3 = 0$ имеет ровно два корня.

Решение. При $x = 0$ - 3 =0 неверно, поэтому $x \neq 0$. Тогда уравнение делим на *x*. Получим $x^2 - 2ax + a^2 = \frac{3}{x}$, $(x-a)^2 = \frac{3}{x}$. Так как $(x-a)^2 \geq 0$ и $\frac{3}{x} \neq 0$, то $(x-a)^2 > 0$ и $\frac{3}{x} > 0 \to x > 0$.

Рассмотрим функции $f(x) = (x-a)^2$ и $g(x) = \frac{3}{x}$.

Построим схематические графики функций $f(x)$ и $g(x)$ (смотри рис 2).

При *a*=2 уравнение имеет одно решение, при *a*=3 уравнение имеет три решения. Тогда два решения при $a\epsilon(2;3)$. Ровно два решения если при $x < 2$ уравнение $(x-a)^2 = \frac{3}{x}$ имеет одно решение. Пусть x_0 – это решение. Производные в этой точке существуют и совпадают. $f'(x_0) = 2(x_0 - a)$, $g'(x_0) = -\frac{3}{x_0^2}$. Имеем систему $\begin{cases} 2(x_0 - a) = -\frac{3}{x_0^2} \\ (x_0 - a)^2 = \frac{3}{x_0} \end{cases}$

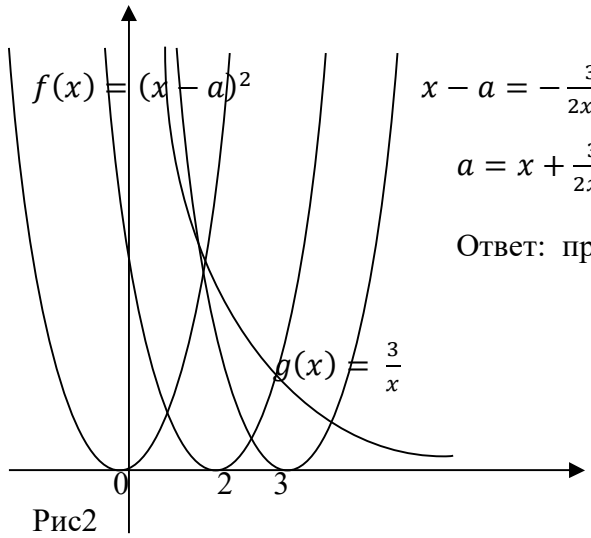


Рис2

$x - a = -\frac{3}{2x^2}, \frac{9}{4x^4} = \frac{3}{x}$, $12x^3 = 9$, $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

$a = x + \frac{3}{2x^2} = \frac{\frac{3}{2}+3}{2\sqrt[3]{\frac{9}{16}}} = \sqrt[3]{\frac{81}{4}} = 1{,}5\sqrt[3]{6}$.

Ответ: при $a = 1{,}5\sqrt[3]{6}$ ровно два корня.

Задача 3. Найдите значения параметра *a*, при которых уравнение $|x+3| - a|x-1| = 4$ имеет два корня, и укажите значения корней.

Решение. Представим уравнение в виде $|x+3| - 4 = a|x-1|$. Рассмотрим функции $f(x) = |x+3| - 4$ и $g(x) = a|x-1|$. Построим схематические графики этих функций.

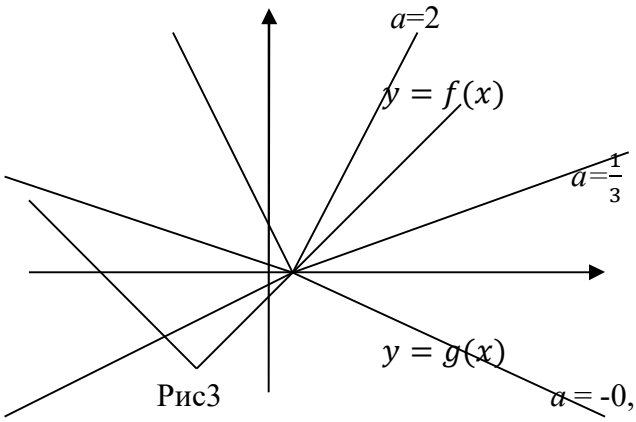


Рис3

при $a = 1, a = -1$
бесконечно много решений.

при $a > 1, a < -1$
одно решение *x* = 1.

при $a\epsilon(-1;1)$ два решения:
$x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$

Действительно, при $x < -3$ $f(x) = -x - 7$
$g(x) = a - ax = -x - 7$, $a + 7 = x(a-1)$
$x = \frac{a+7}{a-1}$.

Ответ: при $a\epsilon(-1;1)$ имеет два корня $x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$.

Задача 4. Найдите все значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение $|x^2 + 8x + 12| - |x^2 + 8x + 7| = p$ имеет более двух решений.

Решение. Представим уравнение в виде $|x^2+8x+12| = |x^2+8x+7| + p$ и рассмотрим функции $f(x) = |x^2+8x+12|, g(x) = |x^2+8x+7| + p$. Построим схематические графики этих функций. $x^2+8x+12=0$ при $x=-6, x=-2$;

$x^2+8x+7=0$ при $x=-7, x=-1$; $x=-4$ – ось симметрии графиков функций.

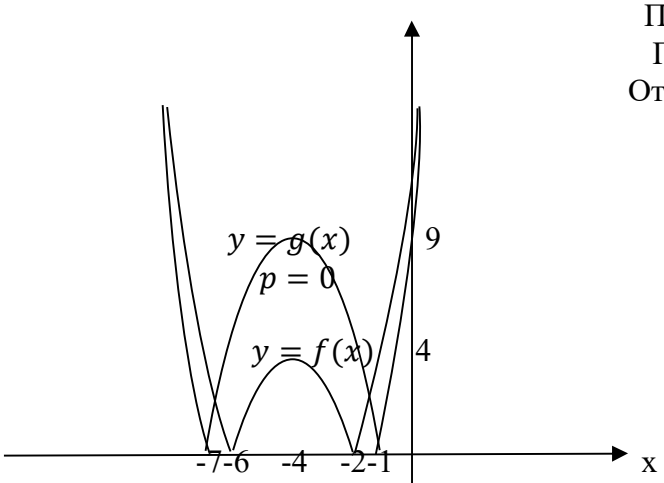
$f(-4)=4$, $g(-4)=9+p$. (смотри рис4).

При $p=\pm 5$ бесконечно много корней

При $p \in (-\infty;-5) \cup (5;+\infty)$ нет корней

При $p \in (-5;5)$ четыре корня.

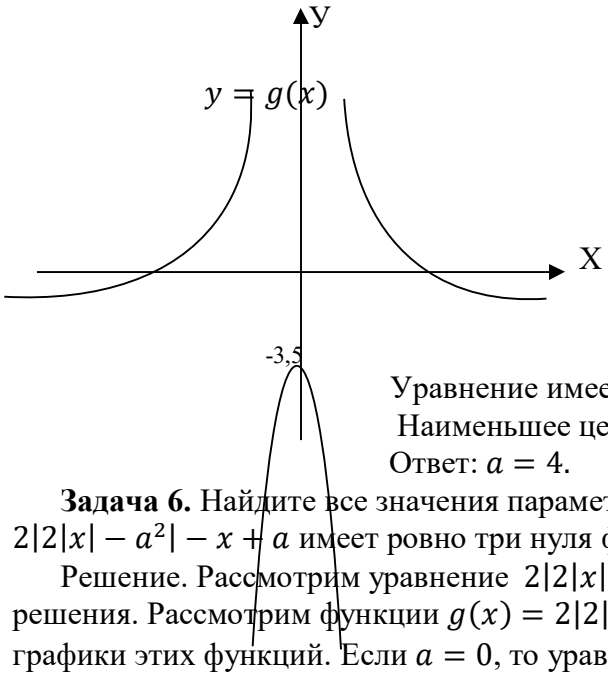
Ответ: при $p \in [-5;5]$ более двух решений

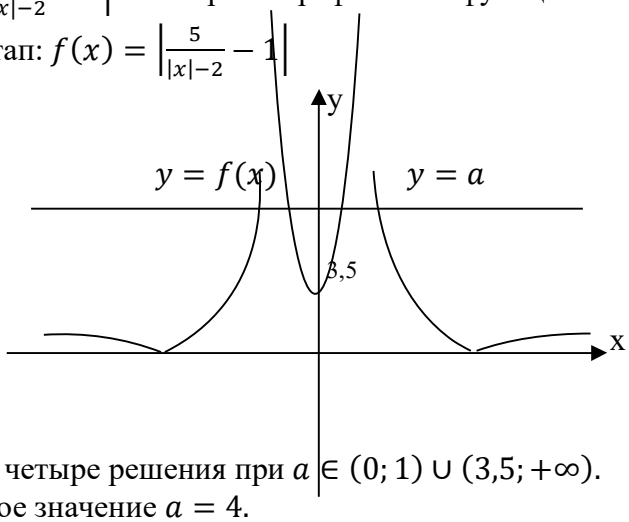


Задача 5. Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\left|\frac{5}{|x|-2} - 1\right| = a$ имеет ровно четыре решения.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \left|\frac{5}{|x|-2} - 1\right|$ и построим график этой функции.

Первый этап: $g(x) = \frac{5}{|x|-2} - 1$; Второй этап: $f(x) = \left|\frac{5}{|x|-2} - 1\right|$





Уравнение имеет четыре решения при $a \in (0;1) \cup (3{,}5;+\infty)$.

Наименьшее целое значение $a=4$.

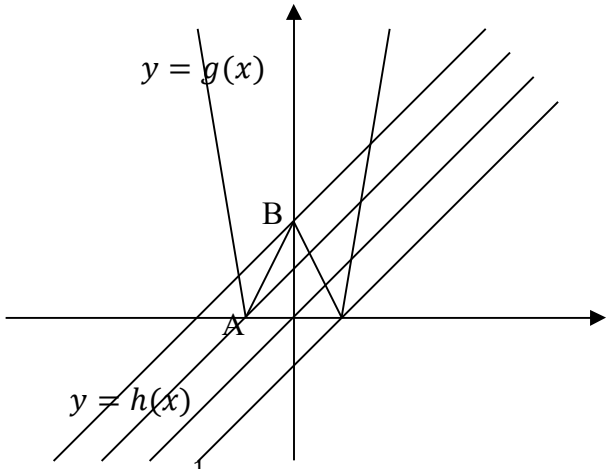
Ответ: $a=4$.

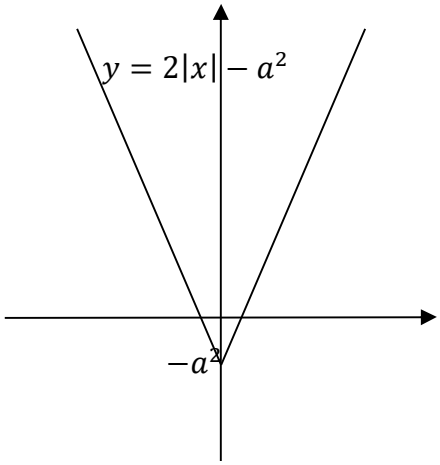
Задача 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = 2|2|x| - a^2| - x + a$ имеет ровно три нуля функции.

Решение. Рассмотрим уравнение $2|2|x| - a^2| = x - a$, которое должно иметь три решения. Рассмотрим функции $g(x) = 2|2|x| - a^2|, h(x) = x - a$ и построим схематические графики этих функций. Если $a=0$, то уравнение $2\big|2|x|\big| = x$ имеет одно решение, что не подходит условию задачи. Поэтому $a \neq 0$. Графики функций смотрите на рис.6. Три решения получается, если графики данных функций при одном и том же a проходят через точки A(x;0) и B(0;y). В остальных случаях либо четыре решения, либо два решения, либо одно решение, либо нет решения. В случае точки A получаем: $\begin{cases} 2|2|x| - a^2| = 0 \\ x - a = 0 \end{cases}$,

$2|a| - a^2 = 0$. При $a > 0$ график функции $h(x) = x - a$ не пересекает график функции $y = g(x)$. Поэтому $a < 0$. Тогда $-2a - a^2 = 0 \Rightarrow a = -2$.

В случае точки B получаем: $2|a^2| = -a$, $2a^2 + a = 0$, $a = -\frac{1}{2}$.

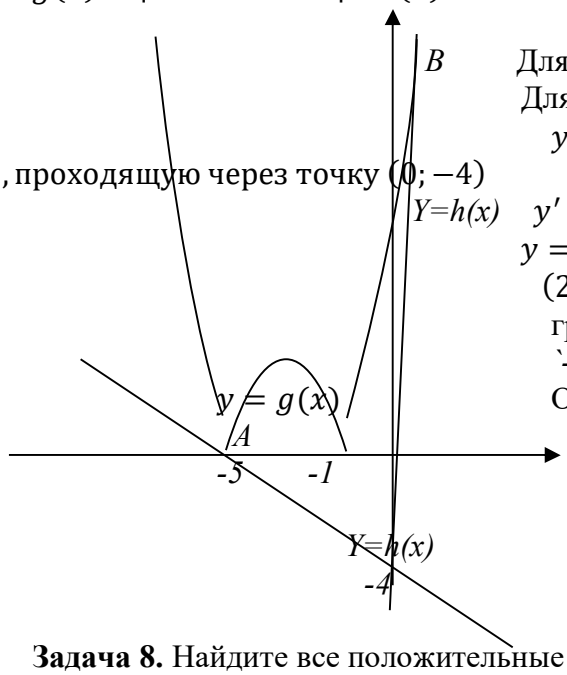




Ответ: $a = -\frac{1}{2}, a = -2$.

Задача 7. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = ax + 6 + |-x^2 - 6x - 5|$ больше 2.

Решение. Наименьшее значение функции $f(x) = ax + 6 + |-x^2 - 6x - 5| > 2$. Представим неравенство в виде $|-x^2 - 6x - 5| > -4 - ax$. Построим графики функций $g(x) = |-x^2 - 6x - 5|$ и $h(x) = -4 - ax$, $m = -3, n = 4, (-3; 4)$ – вершина параболы



Для точки А имеем $-4 + 5a < 0,\ 5a < 4,\ a < 0{,}8$.

Для точки В имеем касательную к графику функции $y = x^2 + 6x + 5$, проходящую через точку $(0; -4)$

$y' = 2x + 6$. Уравнение касательной в точке x_0 $y = x_0^2 + 6x_0 + 5 + (2x_0 + 6)(x - x_0) = 5 - x_0^2 + (2x_0 + 6)x = -4 - ax,\ 5 - x_0^2 = -4$. С учетом графика $x_0 = 3,\ \ -a = 2x_0 + 6 = 12, a = -12$

`-a<12, a> - 12.

Ответ: $a \in (-12; 0{,}8)$.

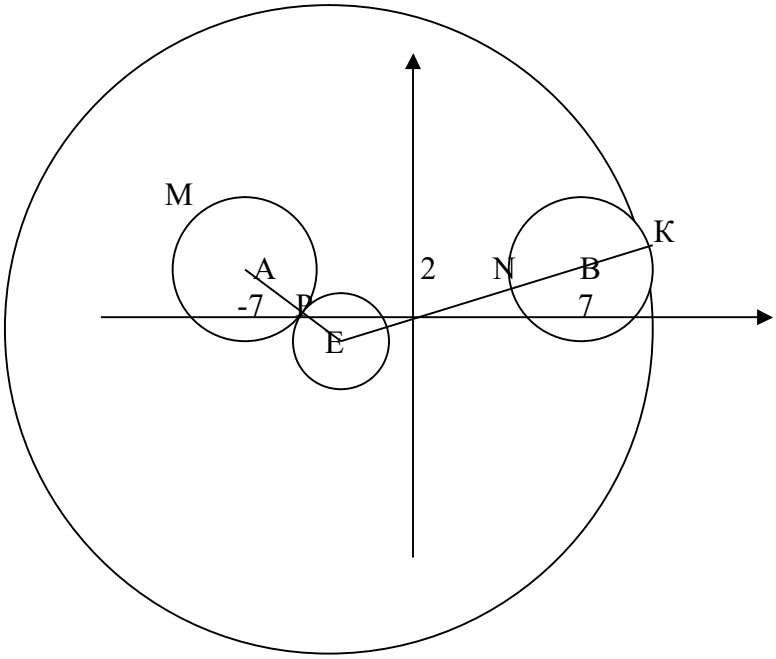
Задача 8. Найдите все положительные значения *a*, при которых система $\begin{cases} (|x| - 7)^2 + (y - 2)^2 = 9, \\ (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Графиком уравнения $(|x| - 7)^2 + (y - 2)^2 = 9$ является окружность с центром в точке (7; 2), радиуса 3 и такая же окружность симметричная ей относительно оси Оу.

Графиком уравнения $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = a^2$ является множество окружностей с центром в точке (-3; -1), радиуса *a*, где *a* > 0 по условию задачи.

Если система имеет единственное решение, то *a* = EP = AE - AP или *a* = EK = EB + BK. В остальных случаях система либо не имеет решения, либо имеет три решения. Тогда AE $= \sqrt{(-7 + 3)^2 + (2 + 1)^2} = 5$, EB $= \sqrt{(7 + 3)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{109}$, а $a = 5 - 3 = 2$ или $a = 3 + \sqrt{109}$. EM = 8 < EK, EN = $\sqrt{109} - 3 < 8$.

Ответ: $a = 3 + \sqrt{109}$ или $a = 2$



<u>Метод решения задания с параметром с помощью нахождения области значений функции.</u>

Задача 9. Найдите все значения p, при которых уравнение $4sin^3x = p + 7cos2x$ не имеет корней.

Решение. Представим уравнение в виде $4sin^3x - 7cos2x = p$ и преобразуем ее левую часть. $4sin^3x - 7(1 - 2sin^2x) = 4sin^3x + 14sin^2x - 7 = p$. Рассмотрим функцию $f(x) = 4sin^3x + 14sin^2x - 7$. Найдем область значений этой функции. Обозначим $sinx = t$, где $t \in [-1; 1]$. $g(t) = 4t^3 + 14t^2 - 7$, $g'(t) = 12t^2 + 28t = 0$, $t = 0$, $t = -2\frac{1}{3} \notin [-1; 1]$. $t = 0$ – критическая точка на промежутке $[-1; 1]$. $g(0) = -7$, $g(-1) = 3, g(1) = 11$. Отсюда, т. к. $f(x)$ – непрерывная функция, то $E(f) = [-7; 11]$. У уравнения $4sin^3x + 14sin^2x - 7 = p$ нет корней, если $p \notin [-7; 11]$, т. е. $p \in (-\infty; -7) \cup (11; +\infty)$.

Ответ: $p \in (-\infty; -7) \cup (11; +\infty)$.

Задача 10. Укажите наименьшее значение b, при котором уравнение $cos2x - (3 + 2b)cosx + 6b = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Преобразуем данное уравнение в виде:

$$2cos^2x - 1 - 3cosx = 2b(cosx - 3), \qquad \frac{2cos^2x - 3cosx - 1}{cosx - 3} = 2b$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{2cos^2x - 3cosx - 1}{cosx - 3}$.

Найдем область значений этой функции. Обозначим $cosx = t$, где $t \in [-1; 1]$.

$$g(t) = \frac{2t^2 - 3t - 1}{t - 3}, \qquad g'(t) = \frac{2t^2 - 12t + 10}{(t - 3)^2} = 0, \qquad t^2 - 6t + 5 = 0, t = 1,$$

$t = 5 \notin [-1; 1]$. $g(-1) = -1, g(1) = 1$.

Отсюда, т. к. $f(x)$ – непрерывная функция на промежутке $[-1; 1]$, то $E(f) = [-1; 1]$

$2b \in [-1; 1]$, $b \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Ответ: $b = -\frac{1}{2}$.

Задача 11. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(sin^2x - 5sinx - 2a(sinx - 3) + 6)\left(a\sqrt{2} + 8x\sqrt{2x - 2x^2}\right) = 0$ имеет корни и все корни неотрицательны.

Решение. 1) $(sin^2x - 5sinx - 2a(sinx - 3) + 6)\left(a\sqrt{2} + 8x\sqrt{2x - 2x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} sin^2x - 5sinx - 2a(sinx - 3) + 6 = 0 \\ \qquad a\sqrt{2} + 8x\sqrt{2x - 2x^2} = 0 \end{array}\right.$$

2)Из второго уравнения получим $8x\sqrt{2x-2x^2}=-a\sqrt{2}$. Т.к. $x\geq 0$ и $2x-2x^2\geq 0$, то $x\in[0;1]$. Рассмотрим функцию $f(x)=8x\sqrt{2x-2x^2}$. $f'(x)=8\sqrt{2x-2x^2}+8x\cdot\frac{2-4x}{2\sqrt{2x-2x^2}}=0$, $8\sqrt{2x-2x^2}\left(1+\frac{x(1-2x)}{2x-2x^2}\right)=0, 3x-4x^2=0, x=\frac{3}{4}-$ критическая точка. $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f\left(\frac{3}{4}\right)=8\cdot\frac{3}{4}\sqrt{2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

$E(f)=\left[0;\frac{3\sqrt{6}}{2}\right]$. $0\leq -a\sqrt{2}\leq\frac{3\sqrt{6}}{2}$, $a\in\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2};0\right]$

3) $sin^2x-5sinx-2a(sinx-3)+6=0$ $sin^2x-5sinx+6=2a(sinx-3)$

$$\frac{sin^2x-5sinx+6}{sinx-3}=sinx-2=2a,\qquad sinx=2a+2,\qquad -1\leq 2a+2\leq 1$$

$a\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$. Т.к. $a\in\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2};0\right]$ и $a\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$, то $a\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $a\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$.

<u>Метод использования свойств четности и нечетности функции.</u>

Задача 12. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $2^{-x^2}\cdot 4^x+sin\frac{\pi x}{4}+cos\frac{\pi x}{4}-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}$ имеет единственное решение.

Решение. Имеем $2^{-x^2+2x-1+1}\sqrt{2}cos\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=a^3-3a^2+a+2+\sqrt{2}$. $2^{-(x-1)^2+1}+\sqrt{2}cos\frac{\pi}{4}(x-1)=a^3-3a^2+a+2+\sqrt{2}$. Обозначим *x* – 1=*t*. Получим $2\cdot 2^{-t^2}+\sqrt{2}cos\frac{\pi}{4}t=a^3-3a^2+a+2+\sqrt{2}$. Функция $2\cdot 2^{-t^2}+\sqrt{2}cos\frac{\pi}{4}t-$ четная функция, поэтому для единственности решения $t=0-$ необходимое условие. Тогда $2+\sqrt{2}=a^3-3a^2+a+2+\sqrt{2}$. $a(a^2-3a+1)=0\leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}a=0\\a^2-3a+1=0\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\\a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ Достаточность для всех *a*: $2\cdot 2^{-t^2}+\sqrt{2}cos\frac{\pi}{4}t=2+\sqrt{2}$; $2\left(2^{-t^2}-1\right)=\sqrt{2}\left(1-cos\frac{\pi}{4}t\right); 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-t^2}-1\right)=\sqrt{2}\left(1-cos\frac{\pi}{4}t\right)$; $-2<2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-t^2}-1\right)\leq 0$; $0\leq\sqrt{2}\left(1-cos\frac{\pi}{4}t\right)\leq 2\sqrt{2}$. Следует единственное решение $t=0$. Тогда ответ: $\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\\a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Задача 13.Найдите все значения параметра *a*, при которых неравенство $cosx-2\sqrt{x^2+9}\leq\frac{x^2+9}{a+cosx}-a$ имеет единственное решение.

Решение. $\cos x-2\sqrt{x^2+9}<0$; $\frac{(a+cosx)^2-2\sqrt{x^2+9}(a+cosx)+\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}{(a+cosx)}\leq 0$; $\frac{\left(a+cosx-\sqrt{x^2+9}\right)^2}{(a+cosx)}\leq 0$; $f(a,x)=\frac{\left(a+cosx-\sqrt{x^2+9}\right)^2}{(a+cosx)}-$ четная функция: 1) если x_0- решение, то $(-x_0)-$ тоже решение; 2) для единственности решения необходимо, чтобы $x_0=0$. Тогда $\frac{(a+1-3)^2}{a+1}\leq 0$; $\frac{(a-2)^2}{a+1}\leq 0; a\in(-\infty;-1)\cup\{2\}$ 3) докажем достаточность единственности решения. Если $a=2$, то $\frac{\left(2+cosx-\sqrt{x^2+9}\right)^2}{(2+cosx)}\leq 0; 2+cosx>0$ при любом $x\to 2+cosx=\sqrt{x^2+9}$; $1\leq 2+cosx\leq 3$, а $\sqrt{x^2+9}\geq 3\to\begin{cases}2+cosx=3\\\sqrt{x^2+9}=3\end{cases}\to x=0$ при $a=2$.

При $a < -1 \to a + cosx < 0$; $\left(a + cosx - \sqrt{x^2+9}\right)^2 \geq 0$ для любых x верно, т. е. $\frac{\left(a+cosx-\sqrt{x^2+9}\right)^2}{(a+cosx)} \leq 0$ имеет не единственное решение. Ответ: 2.

Задача 14. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} zcos(x-y) + (2+xy)sin(x+y) - z = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x \\ (x + y + asin^2z)\big((1-a)\ln(1-xy) + 1\big)) = 0 \end{cases}$$ имеет единственное решение.

Решение. $\begin{cases} zcos(x-y) + (2+xy)sin(x+y) - z = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 1 \\ (x + y + asin^2z)\big((1-a)\ln(1-xy) + 1\big)) = 0 \end{cases}$

Если поменять местами x и y то ничего не меняется. Поэтому, если $(x_0; y_0) -$ решение, то $(y_0; x_0) -$
тоже решение этой системы. Для единственности решения необходимо $x = y$.

$$\begin{cases} z + (2+x^2)sin2x - z = 0 \\ 2(x-1)^2 + z^2 = a + 1 \\ (2x + asin^2z)\big((1-a)\ln(1-x^2) + 1\big)) = 0 \end{cases}$$

Относительно z – наше выражение четное. Для единственности решения z=0.

$$\begin{cases} (2+x^2)sin2x = 0 \\ 2(x-1)^2 = a + 1 \\ 2x\big((1-a)\ln(1-x^2) + 1\big) = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $1 - x^2 > 0 \to x \in (-1; 1)$ Тогда из первого уравнения $x = 0$. Следует 2 = a + 1, a = 1. Проверим достаточность. $x + y + sin^2z = 0$ Ответ: a = 1

Задача 15. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - |a - 5 + x| = |5 - a + x| - (a-5)^2$ имеет единственный корень.

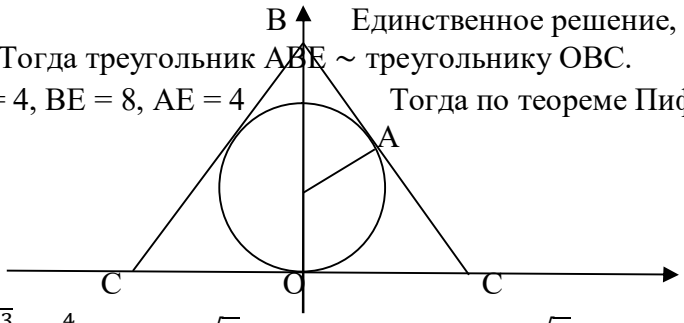
Решение. Данное уравнение относительно x четное, поэтому для единственности решения необходимо, чтобы x=0. Тогда $|a-5| = |5-a| - (a-5)^2$. Обозначим $|a-5| = t, t^2 - 2t = 0, t = 0$ или $t = 2$. Тогда $a = 5, a = 7, a = 3$. Проверим достаточность. При $a = 5$; $x^2 - 2|x| = 0$ имеет три корня: $x = 0, x = 2, x = -2$. Поэтому $a = 5$ не подходит.

При $a = 7, a = 3$; $x^2 - |x+2| - |x-2| + 4 = 0$ имеет один корень $x = 0$ при $x \in (-2; 2)$; при $x \leq -2$ и $x \geq 2$ нет решения. Ответ: a =3; a =7.

<u>Геометрический метод.</u> Использование формулы расстояния между точками.

Задача 16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 16 \\ \sqrt{x^2 + (y-12)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 144} \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Первое уравнение – это уравнение окружности с центром (0 ; 4) и радиуса 4. Второе уравнение – это формула вида AB + AC = BC, где A(x ; y), B(0 ; 12), C(a ; 0). Тогда A ∈ BC.



Единственное решение, когда BC касается окружности. Тогда треугольник ABE ~ треугольнику OBC.

OB = 12, OE = 4, BE = 8, AE = 4 Тогда по теореме Пифагора AB = $4\sqrt{3}$

$\frac{AB}{OB} = \frac{AE}{OC}$; $\frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{4}{OC}$; $OC = 4\sqrt{3}$. Получается $a = \pm 4\sqrt{3}$. Ответ: $a = \pm 4\sqrt{3}$.

Задача 17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x+a-6)^2+(y-a)^2=18 \\ \sqrt{x^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-6)^2+y^2}=6\sqrt{2} \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение. Первое уравнение – это уравнение окружности с центром E(6 – a ; a) и радиуса $3\sqrt{2}$. $\sqrt{x^2+(y-6)^2}$ - расстояние между точками A (x; y) и B(0 ; 6); $\sqrt{(x-6)^2+y^2}$ - расстояние между точками A (x; y) и C(6 ; 0); BC = $6\sqrt{2}$. AB + AC = BC

Докажем, что точка E∈ BC. $y=kx+b; 0=6k+6; k=-1; y=-x+6-$ это уравнение BC. $a=-(6-a)+6$ верно.

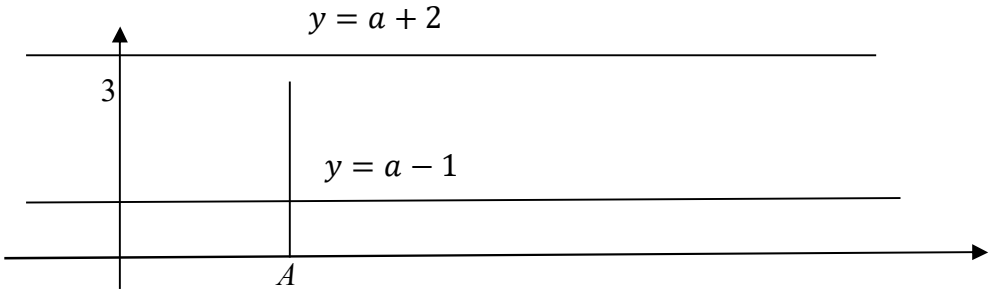
Следует точка E принадлежит BC. Если E – середина BC, то два решения. Точка E(3 ; 3). Следует a = 3. Ответ: a = 3.

Задача 18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=ax+a^2-4 \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-2a)^2}=|a|\sqrt{5} \end{cases}$ имеет более одного решения.

Решение. Рассмотрим графики этих уравнений. График первого уравнения – это прямая. $\sqrt{x^2+y^2}$ - расстояние между точками O(0 ; 0) и A(x ; y); $\sqrt{(x-a)^2+(y-2a)^2}$ - расстояние между точками B(a ; $2a$) и A(x ; y); $|a|\sqrt{5}$ – расстояние между точками B(a ; $2a$) и O(0 ; 0); Имеем OA + AB = OB. Тогда точки O, A и B лежат на одной прямой, т.е. $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-2a)^2}=|a|\sqrt{5}$ - уравнение прямой. Если эти две прямые имеют более одной общей точки, то они совпадают. Т.к. $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-2a)^2}=|a|\sqrt{5}$ проходит через начало координат, то $a^2-4=0; a=\pm 2$. Ответ: $a=\pm 2$.

Задача 19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=0 \\ \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2}=3 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Рассмотрим графики уравнений: $y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=(y-a-2)(y-a+1)=0, \text{т.к.} D=(2a+1)^2-4(a^2+a-2)=9,\ y_1=a+2,\ y_2=a-1$. Тогда $y=a+2; y=a-1$ прямые, параллельные оси Ox, причем $a+2>a-1$; $\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ – р/асстояние между точками A(x;y) и B(a;0); $\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2}$ - расстояние между точками A(x;y) и C(a;3); Т .к. расстояние от точки (a ; 0) до (a ; 3) равно 3, то точка A принадлежит отрезку BC.



Единственное решение получится, если

$\begin{cases} 0\le a-1\le 3 \\ a+2>3 \end{cases}$; $\begin{cases} 1\le a\le 4 \\ a>1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0\le a+2\le 3 \\ a-1<0 \end{cases}$; $\begin{cases} -2\le a\le 1 \\ a<1 \end{cases}$ $a\in(1;4]$ или $a\in[-2;1)$.

Ответ: $a\in[-2;1)\cup(1;4]$.

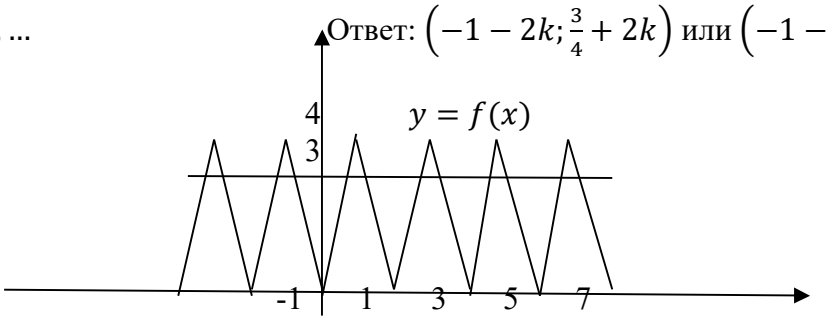
Периодические функции.

Задача 20. Найдите все пары (x;y), $x \le 0, y \ge 0$, удовлетворяющие системе

$\begin{cases} \frac{2}{f(x)-3} + \frac{10}{f(y)-2} = 12 \\ (f(y)-2)(f(x)-3) = f(y)-2 \end{cases}$, где f – периодическая функция с периодом T=2, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x) = 4|x|$ при $-1 \le x \le 1$.

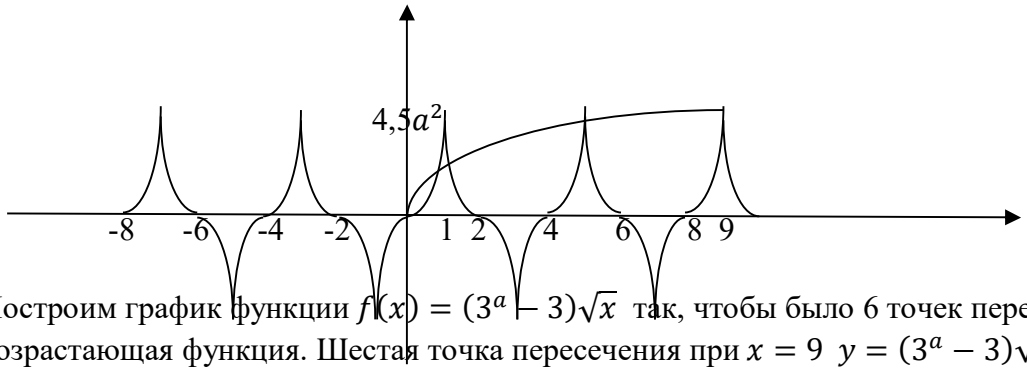
Решение. Введем обозначения $a = f(x) - 3, b = f(y) - 2$. Тогда $\begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{10}{b} = 12 \\ ab = b \end{cases}$; Т.к. $b \ne 0$, то $a = \frac{b}{b} = 1$; $\frac{2}{1} + \frac{10}{b} = 12, b = 1$. Получим $f(x) = 4, f(y) = 3$. Построим график функции $f(x)$ – периодическая.

$4|y| = 3; y = \pm\frac{3}{4}$ $\quad f(x) = 4$ при $x = 1 + 2k, k \in Z, f(y) = 3$ при $y = \pm\frac{3}{4} + 2k, k \in Z$. Т.к. $x \le 0$, то $x = -1 - 2k, k = 0,1,2, \dots$ $y \ge 0$, то $y = \frac{3}{4} + 2k$ или $y = \frac{5}{4} + 2k, k = 0,1,2, \dots$ Ответ: $\left(-1 - 2k; \frac{3}{4} + 2k\right)$ или $\left(-1 - 2k; \frac{5}{4} + 2k\right), k = 0,1,2, \dots$



Задача 21. Найдите все значения параметра *a*, большие 1, при каждом из которых уравнение $f(x) = (3^a - 3)\sqrt{x}$ имеет 6 решений, где f – периодическая функция с периодом T=4, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x) = 4{,}5a^2(|x-1|-1)^2$ если $0 \le x \le 2$.

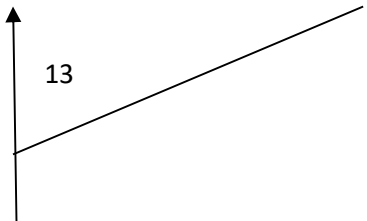
Решение. Построим график функции $f(x) = 4{,}5a^2(|x-1|-1)^2$ $f(x) = \begin{cases} 4{,}5a^2(x-2)^2, \text{при } x \ge 1 \\ 4{,}5a^2x^2, \text{ при } x < 1 \end{cases}$ и т.к. $4{,}5a^2 > 0$, по условии $a \ne 0$, то ветви направлены вверх.

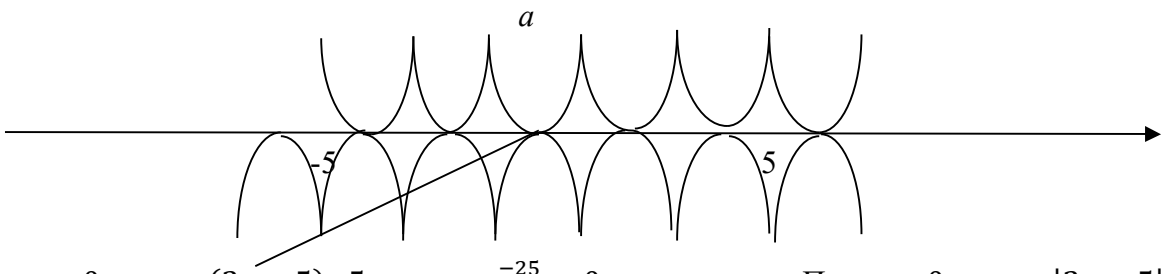


Построим график функции $f(x) = (3^a - 3)\sqrt{x}$ так, чтобы было 6 точек пересечения. Т.к. - возрастающая функция. Шестая точка пересечения при $x = 9$ $y = (3^a - 3)\sqrt{9} = (3^a - 3) \cdot 3 = 4{,}5a^2$; $3^a - 3 = 1{,}5a^2, a = 2; f(a) = 3^a - 1{,}5(a^2 + 2)$ – непрерывная и возрастающая функция при $a > 1$. Поэтому, при $a = 1{,}5$; $f(1{,}5) = 3\sqrt{3} - \frac{51}{8} < 0$, при $a = 3; f(3) = 10{,}5 > 0$. Тогда уравнение $f(a) = 0$ имеет единственное решение при $a = 2$. Ответ: $a = 2$.

Задача 22. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $f(x) = |2a + 5|x$ имеет 6 решений, где f –четная периодическая функция с периодом T=2, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x) = ax^2$, если $0 \le x \le 1$.

Решение. При $a = -2{,}5$ периодическая функция $ax^2 = 0$. Бесконечно много решений $x = 0; \pm 2; \pm 4; \pm 6; \dots$ При $a = 0$ $5x = 0$, одно решение.





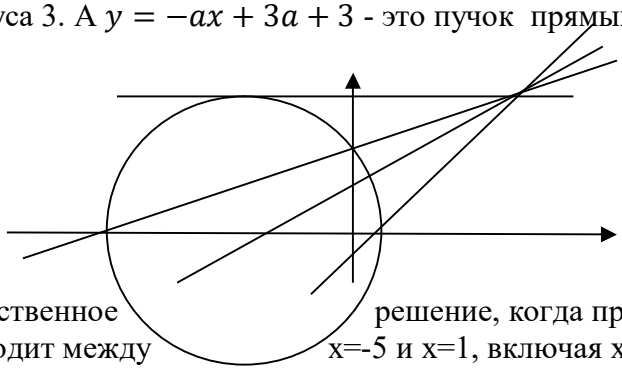
При $a > 0$ имеем $(2a+5)\cdot 5 = a, a = \frac{-25}{9} < 0$ не подходит. При $a < 0$ имеем $|2a+5|\cdot(-5) = a, 2a+5 = -\frac{a}{5}$ или $-2a-5 = -\frac{a}{5}, a = -\frac{25}{9}$ или $a = -\frac{25}{11}$.

Ответ: $a = \ -\frac{25}{9}$ или $a = -\frac{25}{11}$.

<u>Еще раз графический метод.</u>

Задача 23. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{5-4x-x^2} = 3a+3$ имеет единственный корень.

Решение. ОДЗ: $5-4x-x^2 \geq 0$ $x \in [-5;1]$. Представим уравнение в виде: $\sqrt{5-4x-x^2} = -ax+3a+3$. Рассмотрим график функции $y = \sqrt{5-4x-x^2}$. Тогда $y^2 = 5-4x-x^2$; $(x+2)^2+y^2 = 9$. Т.к. $y \geq 0$, то это уравнение полуокружности с центром (-2;0) и радиуса 3. А $y = -ax+3a+3$ - это пучок прямых, проходящих через точку (3;3).



Единственное решение, когда прямая касается полуокружности и проходит между x=-5 и x=1, включая x=1. Касается – это проходит через точку (-2;3). $2a+3a+3 = 3, a = 0$. Проходит через точку (1;0), $-a+3a+3 = 0, a = -1{,}5$. Не проходит через точку (-5;0), $5a+3a+3 = 0, a = -\frac{3}{8}$. Ответ: $a \in [-\frac{3}{2}; -\frac{3}{8}) \cup \{0\}$.

<u>Еще раз четность функции.</u>

Задача 24. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\frac{1-2a\sqrt{1+x^2}+a(1+x^2)}{(1+x^2)-2\sqrt{1+x^2}} = 3$ имеет единственное решение.

Решение. $f(x) = \frac{1-2a\sqrt{1+x^2}+a(1+x^2)}{(1+x^2)-2\sqrt{1+x^2}} - 3$ – четная функция. Поэтому для единственности решения необходимо $x = 0$ $\frac{1-2a+a}{1-2} = 3,\ a = 4$. Проверим достаточность: $\frac{1-8\sqrt{1+x^2}+4(1+x^2)}{(1+x^2)-2\sqrt{1+x^2}} - 3 = 0$; $\frac{1-2\sqrt{1+x^2}+1+x^2}{1+x^2-2\sqrt{1+x^2}} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^2 = 0 \\ 1+x^2-2\sqrt{1+x^2} \neq 0 \end{cases}$ $\sqrt{1+x^2} = 1, x^2 = 0, x = 0$ – единственное решение . Ответ: $a = 4$

Аналитический метод

Задача 25. При каких значениях параметров a и b система $\begin{cases} 8x + (a^2+ab+b^2)y = 4 \\ (a-b)x + 26y = 2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решение.

На координатной плоскости xOy множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих любому из уравнений системы — прямые. А тогда решением системы будут точки пересечения этих прямых. Поэтому исходная система будет иметь бесконечное множество решений в том и только в том случае, когда эти прямые совпадают. В общем случае две прямые, заданные

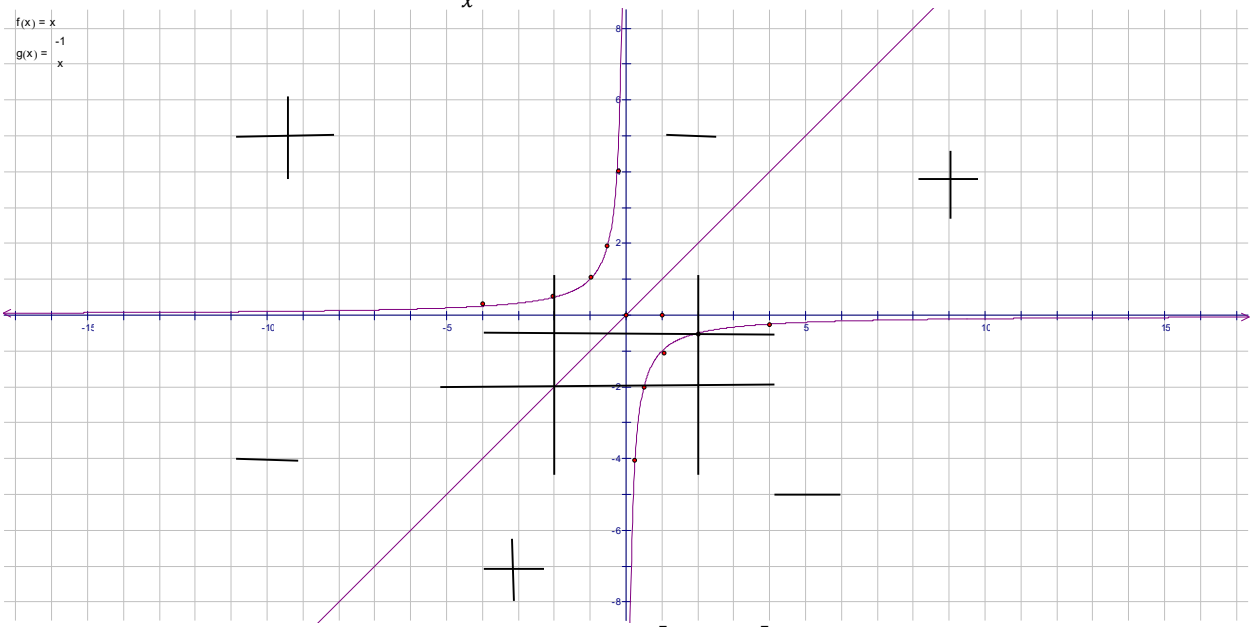
уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают, если, $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$ (при $k_1 \neq k_2$ они имеют одну точку пересечения, при $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$ точек пересечения у них нет). Следовательно, система будет иметь бесконечно много решений в том случае, когда совместна система $\frac{(a-b)}{8} = \frac{26}{a^2+ab+b^2} = \frac{1}{2}$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$.
Решая систему, получаем $(-2; -6)$, $(6; 2)$.
Ответ: $(-2; -6)$, $(6; 2)$.

Метод областей на координатной плоскости

Задача 26. Найдите все значения параметра *a,* при которых любое решение неравенства $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$ по модулю не превосходит двух.

Решение. Будем пользоваться таким свойством функции, что при переходе через непрерывную линию знак функции меняется.

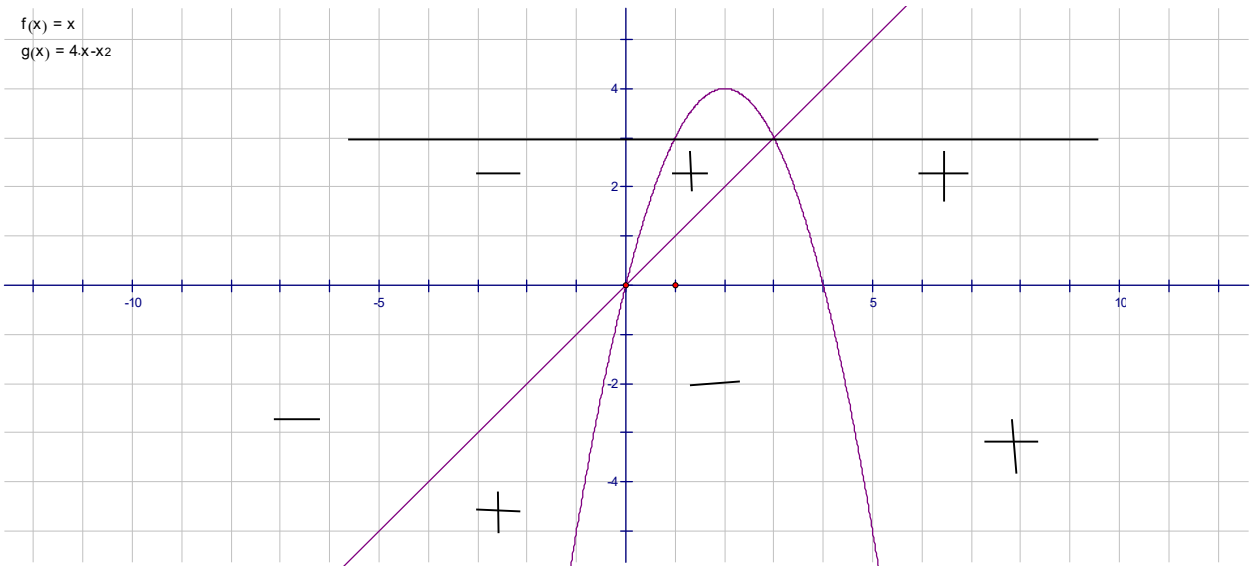
Решим неравенство методом областей. $D = (1 + a^2)^2$; $x_1 = a, x_2 = -\frac{1}{a}$. Получим $(x - a)(ax + 1) > 0$; $a = x, a = -\frac{1}{x}$;

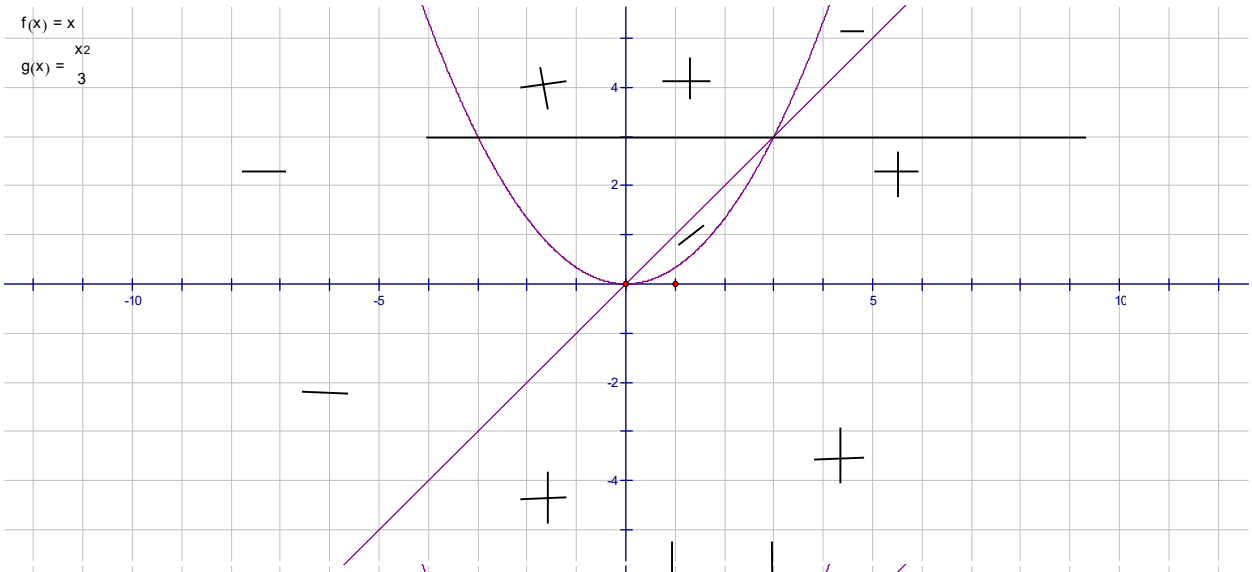


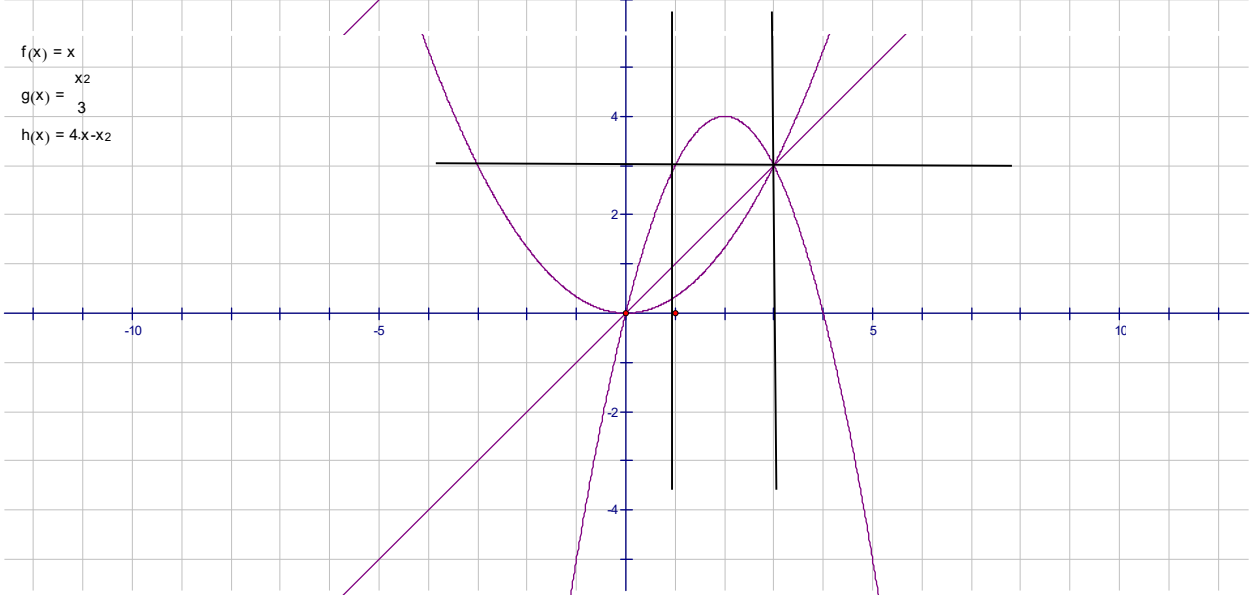
$|x| \leq 2$; $x = -2, a = -2, x = 2, a = -\frac{1}{2}$. Ответ: $a\epsilon \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$

Задача 27. При каком значении параметра *a* неравенство $\left|\frac{x^2-x-2a}{x-a} - 1\right| \leq 2$ имеет единственное решение на $[1; 3]$?

Решение. Решим неравенство методом областей. Представим данное неравенство в виде $\begin{cases} \frac{x^2-x-2a}{x-a} - 1 \leq 2 \\ \frac{x^2-x-2a}{x-a} - 1 \geq -2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-4x+a}{x-a} \leq 0 \\ \frac{x^2-3a}{x-a} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = x, a = 4x - x^2 \\ a = x, a = \frac{x^2}{3} \end{cases}$







Ответ: $a = 3$

Задача 28. При каком значении параметра a уравнение $x^2 + (a+4)^2 = |x + a + 4| + |x - a - 4|$ имеет единственное решение?

Решение. $x + a + 4 = 0, x = -a - 4, x - a - 4 = 0, x = a + 4$

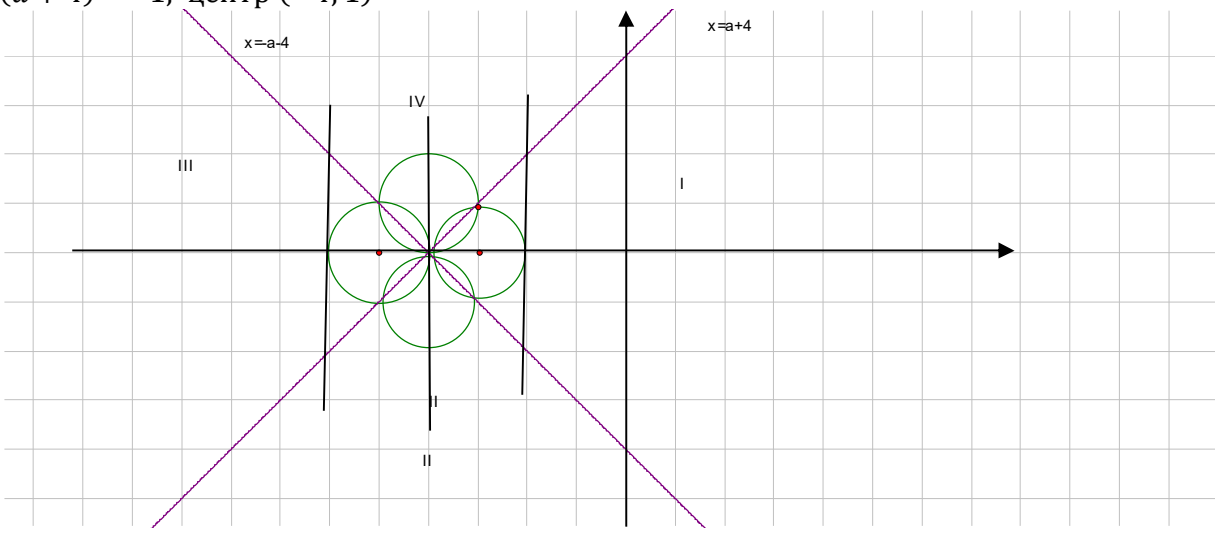
Области	*x+a+4*	*x-a-4*
I	+	-
II	-	-
III	-	+
IV	+	+

I. $x^2+(a+4)^2=x+a+4-x+a+4,\ x^2+a^2+6a+8=0,\ x^2+(a+3)^2=1,$ центр $(-3;0)$

II. $x^2+(a+4)^2=-x-a-4-x+a+4,\ x^2+2x+a^2+8a+16=0,\ (x+1)^2+(a+4)^2=1,$ центр $(-4;-1)$

III. $x^2+(a+4)^2=-x-a-4+x-a-4,\ x^2+a^2+10a+24=0,\ x^2+(a+5)^2=1,$ центр $(-5;0)$

IV. $x^2+(a+4)^2=x+a+4+x-a-4,\ x^2-2x+a^2+8a+16=0,\ (x-1)^2+(a+4)^2=1,$ центр $(-4;1)$



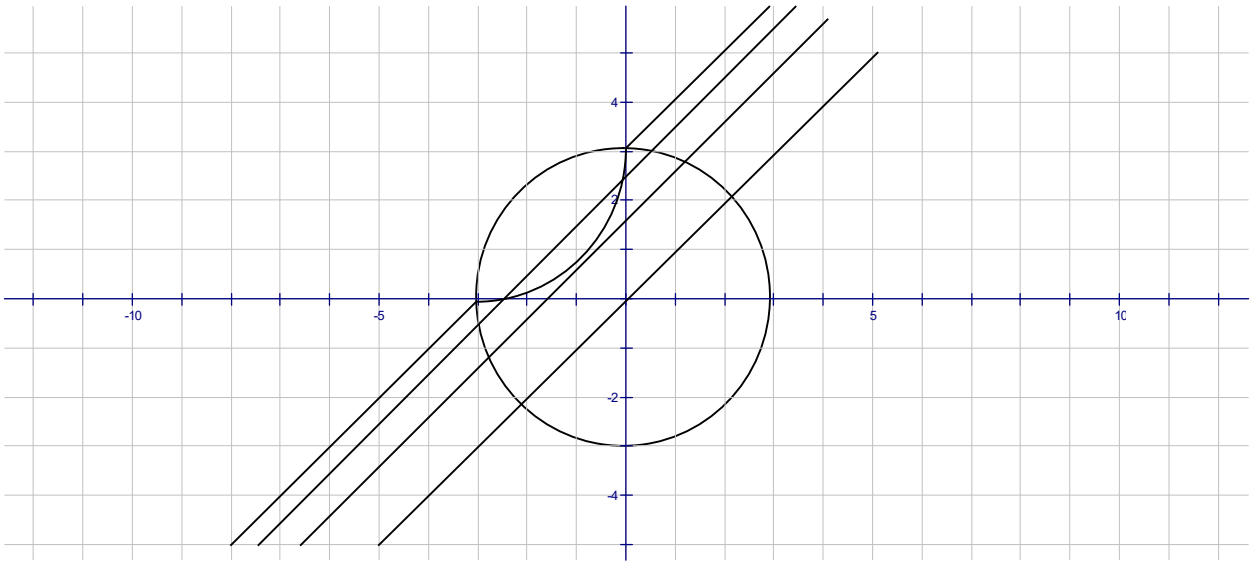
Ответ: a = - 6 и a = - 2

<u>Еще раз графический метод.</u>

Задача 29. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+12x+36=|x^2+y^2-9|-y^2+12y+9 \\ x-y=a \end{cases}$ имеет более одного решения.

Решение. 1) $x^2+y^2-9\geq 0 \Leftrightarrow x^2+12x+36=x^2+y^2-9-y^2+12y+9$

$$\begin{cases} (x-y)=-3 \\ x-y=a \end{cases}$$



2) $x^2+y^2-9<0 \Leftrightarrow x^2+12x+36=-x^2-y^2+9-y^2+12y+9 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-3)^2=9$ $\begin{cases}(x+3)^2+(y-3)^2=9\\ x-y=a\end{cases}$

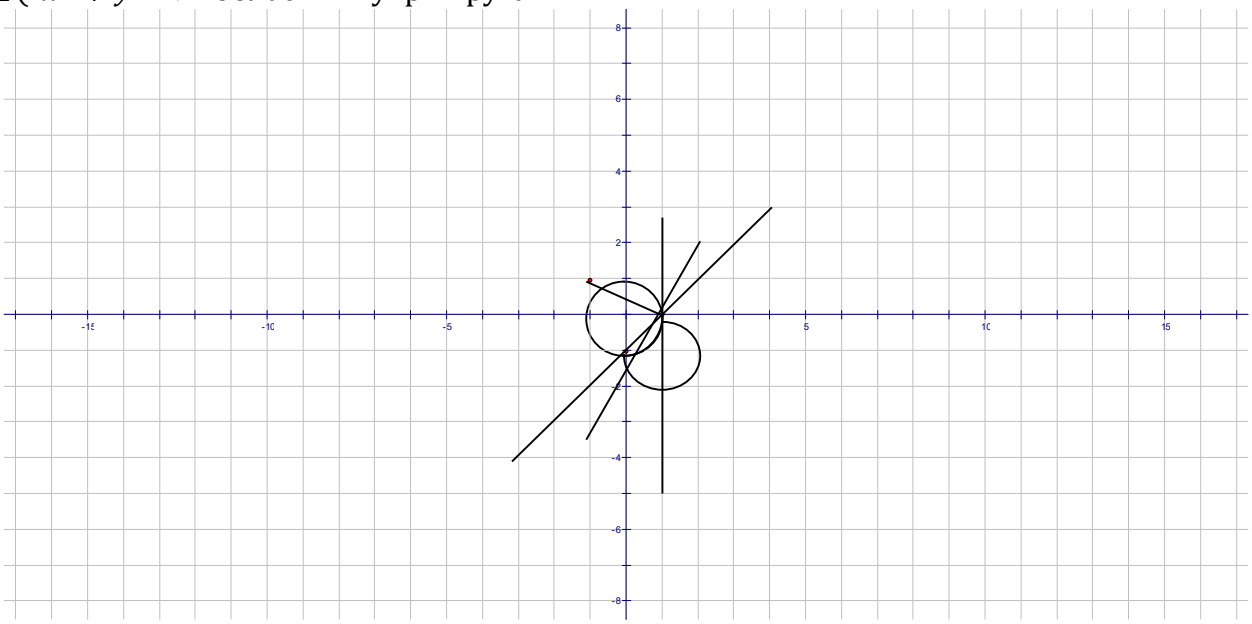
Рассмотрим уравнение $(x+3)^2+(x-a-3)^2=9;\ 2x^2-2ax+(a+3)^2=0;\ D=a^2-2(a+3)^2=-a^2-12a-18=0;\ a_1=-6+3\sqrt{2}\ ,\ a_2=-6-3\sqrt{2}$. При $a_1=-6+3\sqrt{2}$ прямая $x-y=a$ касается дуги с нижней стороны. Ответ: $a\epsilon[-3;\ -6+3\sqrt{2}\ )$.

Задача 30. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}2x-2y-2=|x^2+y^2-1|\\ y=a(x-1)\end{cases}$ имеет более двух решений.

Решение. Система равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2y-2=x^2+y^2-1\\ y=a(x-1)\ \text{пучок прямых, проходящих через точку}\ (1;0)\\ x^2+y^2-1\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2x-2y-2=1-x^2-y^2\\ y=a(x-1)\\ x^2+y^2-1<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=1,\text{окружность}\\ y=a(x-1)\\ x^2+y^2\geq 1\ \text{область вне круга}\end{cases}\\ \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=5,\text{окружность}\\ y=a(x-1)\\ x^2+y^2<1\ \text{область внутри круга}\end{cases}\end{array}\right.$$



Q(-1; 1), M(1; 0), QM⊥ $y=a(x-1)$ – касательная к окружности $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ $k_1\cdot k_2=-1$ - условие перпендикулярности прямых. $y=kx+b, -1=-k+b, 0=k+b,$ $2k=-1, k_1=-\frac{1}{2}, k_2=2$. Ответ: при $a\in(1;2)$ три решения

Задача 31. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}y^2-x-2=|x^2-x-2|\\ x-y=a\end{cases}$ имеет более двух решений.

Задача 32. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}8x-8y-40=|x^2+y^2-25|\\ y=ax-5\end{cases}$ имеет более двух решений.

Таким образом, при определенной систематизации можно приобрести некоторые навыки решения заданий с параметрами, что поможет выпускникам при сдаче ЕГЭ.

Литература

1. Шарыгин И.Ф. Математика. Решение задач (10 – 11). М. «Просвещение», 2007
2. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. М. «Просвещение», 1986
3. Моденов В.П. Задачи с параметрами. Координатный метод. М. «Экзамен», 2007
4. Сергеев И.Н. Математика. Задания типа С. М. «Экзамен», 2011
5. Локоть В.В. Задачи с параметрами и их решения. Тригонометрия: уравнения, неравенства, системы. М. «АРКТИ», 2008
6. Иванов С.О и др. Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5. Ростов –на - Дону: Легион – М, 2011
7. Панферов В.С. и др. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач. ФИПИ – М.: Интеллект – Центр, 2010
8. И.В.Ященко и другие. Подготовка к ЕГЭ по математике 2015года. МЦНМО 2014.