Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

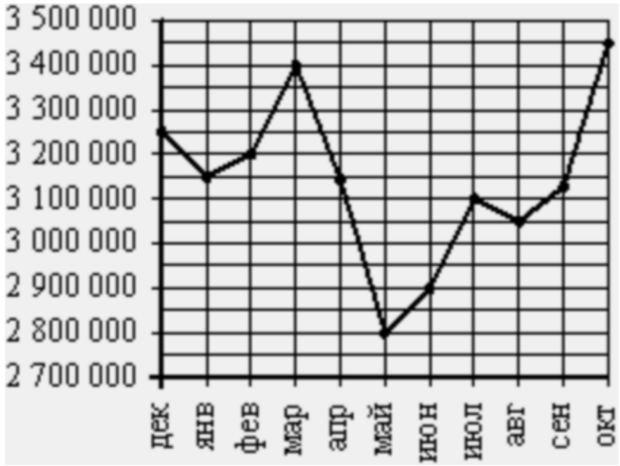
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 110 рублей за штуку и продаёт с наценкой 20%. Какое наибольшее количество таких горшков можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

Ответ: ___________________________.

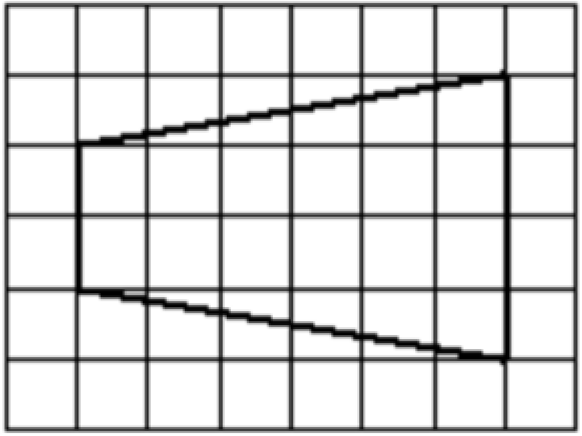
2 На рисунке жирными точками показана месячная аудитория поискового сайта во все месяцы с декабря 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – количество человек, посетивших сайт хотя бы раз за данный месяц. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую месячную аудиторию сайта в указанный период.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180312

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: ____________________________.

4 Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже 36,8°C, равна 0,94. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется 36,8°C или выше.

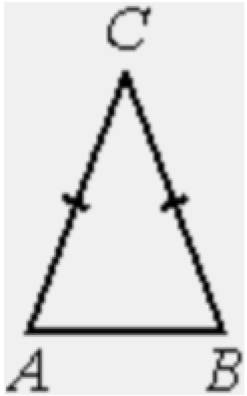
Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 8^x.$$

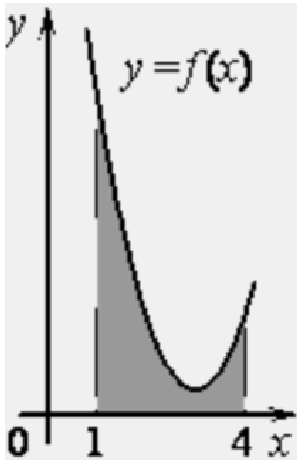
Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC $AC = BC = 20$, $AB = 28$. Найдите $\cos A$.



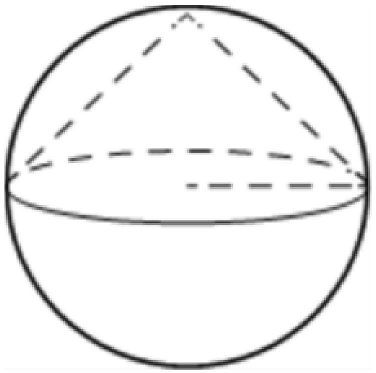
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x - 10 -$ одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: ____________________________.

8 Конус вписан в шар (см. рисунок). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 47. Найдите объём шара.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\sqrt{108}\cos^2\frac{\pi}{12}-\sqrt{27}.$$

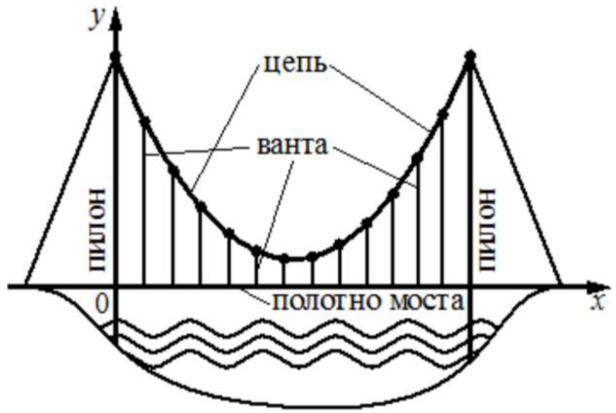
Ответ: ___________________________.

10 На рисунке изображена схема моста. Вертикальные *пилоны* связаны провисающей *цепью*. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают *полотно* моста, называются *вантами*.

Введём систему координат:
ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаётся формулой

$$y = 0{,}0043x^2 - 0{,}74x + 35,$$

где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Ответ: ___________________________.

11 Смешав 43-процентный и 89-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 69-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 73-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 43-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции
$y = (x-1)^2(x+4) + 10.$

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right].$

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

15 Решите неравенство
$$\frac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \frac{25^x - 7\cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \le 2\cdot 5^x - 24.$$

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6{,}5$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение
$$6a + \sqrt{5 + 4x - x^2} = ax + 3$$
имеет единственный корень.

19 На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180312

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	8
2	3450000
3	18
4	0,06
5	1,5
6	0,7
7	6
8	188
9	4,5
10	4,27
11	35
12	1
13	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n, -\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $-\frac{13\pi}{6}$
14	$20\sqrt{3}$
15	$(-\infty;0)\cup[1;\log_5 7)$
16	5
17	80,5 млн
18	$\{0\}\cup\left(\frac{3}{7};3\right]$
19	а) да (например, 8, 9, 10, 11, 12), б) нет, в) 38

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right].$

.

Решение:

а)

Основное тригонометрическое тождество

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$6\cdot(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 2 = 0$

$6 - 6\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

$-6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0$

Пусть $\sin x = t$

$-6t^2 + 5t + 4 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 25 + 96 = 121 = 11^2$

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5+11}{-12} = -\frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5-11}{-12} = \frac{4}{3}$ (не подходит)

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

$x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{25\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{17\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

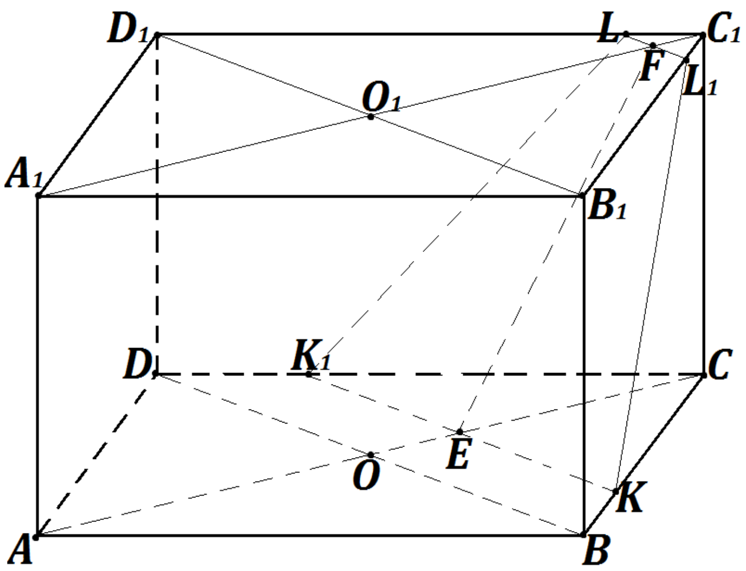
Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{13\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Решение:
а)



Построим плоскость γ:
Построим прямую BD
Построим прямую KK_1 такую, что $KK_1 \parallel BD$
Построим прямую LL_1 такую, что $LL_1 \parallel BD$
Построим прямую LK_1, т.к. точки L и K_1 лежат в одной плоскости
Построим прямую KL_1, т.к. точки K и L_1 лежат в одной плоскости
Трапеция KK_1LL_1 – сечение плоскостью γ

$BK = 2$
=>
$CK = BC - BK = 6 - 2 = 4$

$C_1L = 2$
=>
$D_1L = C_1D_1 - C_1L = 6 - 2 = 4$

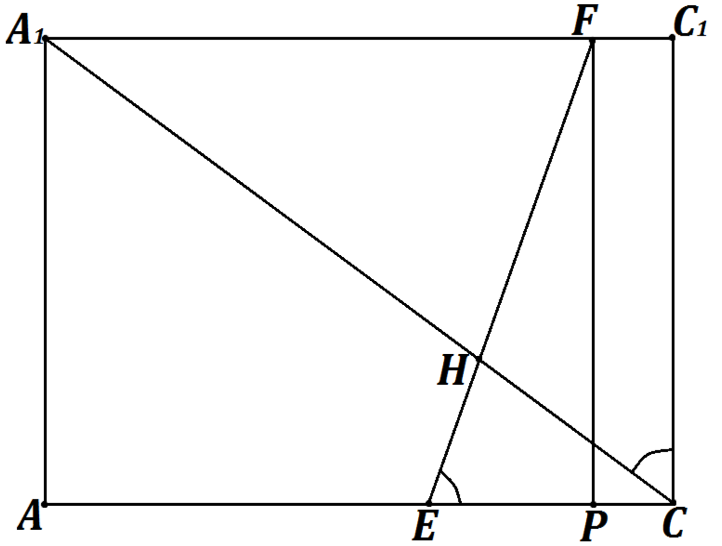
Рассмотрим прямоугольник ACC_1A_1:
Пусть $AC \cap KK_1 = E$
Пусть $A_1C_1 \cap LL_1 = F$
Пусть $AC \cap BD = O$
Пусть $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$
$AA_1 = 2\sqrt{3}$
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)

Распишем отношение высот и сходственных сторон в подобных треугольниках CKK_1 и CBD

$$\frac{CE}{OC} = \frac{CK}{BC}$$
$$\frac{CE}{OC} = \frac{4}{6}$$
$$\frac{CE}{OC} = \frac{2}{3}$$
=>
$$CE = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Распишем отношение высот и сходственных сторон в подобных треугольниках C_1LL_1 и $B_1C_1D_1$

$$\frac{C_1F}{C_1O_1} = \frac{C_1L}{C_1D_1}$$
$$\frac{C_1F}{C_1O_1} = \frac{2}{6}$$
$$\frac{C_1F}{C_1O_1} = \frac{1}{3}$$
=>
$$C_1F = \frac{1}{6} \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot 6\sqrt{2} = \sqrt{2}$$



Пусть $A_1C \cap EF = H$
Требуется доказать, что $\angle EHC = 90°$

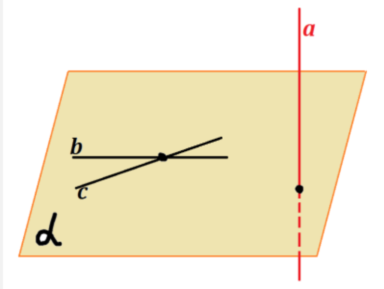
Пусть P — основание перпендикуляра из точки F на прямую AC
$EP = CE - CP = CE - C_1F = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$$\operatorname{tg}\angle FEP = \frac{FP}{EP} = \frac{AA_1}{EP} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

$$\operatorname{tg}\angle A_1CC_1 = \frac{A_1C_1}{CC_1} = \frac{AC}{AA_1} = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

$=> \angle FEP = \angle A_1CC_1$
Пусть
$\angle FEP = \angle A_1CC_1 = \alpha$
Тогда
$\angle A_1CA = 90 - \alpha$
$\angle EHC = 180 - \alpha - (90 - \alpha) = 90°$

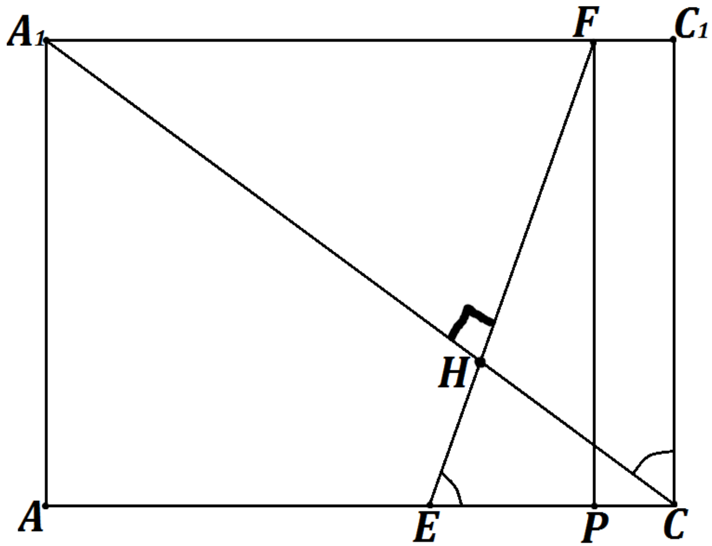
Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$A_1C \perp EF$
$A_1C \perp KK_1$ (по теореме о трёх перпендикулярах, т.к. $KK_1 \perp AC$, являющейся проекцией A_1C на плоскость ABC)
$=> A_1C \perp \gamma$
■

б)



$EF = \sqrt{EP^2 + FP^2} = \sqrt{EP^2 + AA_1{}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{14}$ (по теореме Пифагора)

$A_1F = AC - C_1F = 6\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках A_1HF и ECH

$$\frac{A_1F}{CE} = \frac{HF}{EH}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{HF}{EH}$$

=>

$$HF = \frac{5}{7} \cdot EF = \frac{5}{7} \cdot \sqrt{14}$$

$A_1H = \sqrt{A_1F^2 - HF^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{7} \cdot \sqrt{14}\right)^2} = \sqrt{50 - \frac{50}{7}} = \sqrt{\frac{300}{7}}$ (по теореме Пифагора)

Найдём площадь трапеции KK_1LL_1:

$$KK_1 = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$LL_1 = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{KK_1LL_1} = \frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{14} = 6\sqrt{7}$$

$$V_{A_1KK_1LL_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{KK_1LL_1} \cdot A_1H = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{300}{7}} = 20\sqrt{3}$$

Ответ: $20\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \frac{25^x - 7 \cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \leq 2 \cdot 5^x - 24.$$

.

Решение:

Пусть $5^x = t$

$$\frac{t^2 - 25t + 26}{t - 1} + \frac{t^2 - 7t + 1}{t - 7} \leq 2t - 24$$

Нужно сократить $t - 1$

$(t - 24)(t - 1) = t^2 - 25t + 24$

=>

$$\frac{t^2 - 25t + 24 + 2}{t - 1} + \frac{t^2 - 7t + 1}{t - 7} \leq 2t - 24$$

$$\frac{(t - 24)(t - 1) + 2}{t - 1} + \frac{t^2 - 7t + 1}{t - 7} \leq 2t - 24$$

$$\frac{(t - 24)(t - 1)}{t - 1} + \frac{2}{t - 1} + \frac{t^2 - 7t}{t - 7} + \frac{1}{t - 7} \leq 2t - 24$$

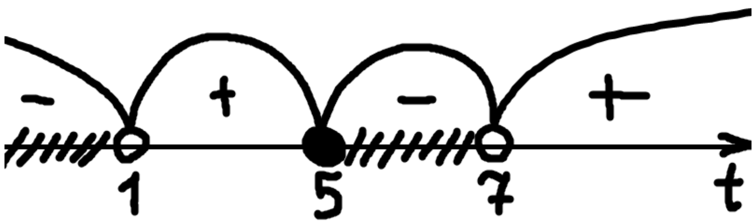
$$t - 24 + \frac{2}{t - 1} + t + \frac{1}{t - 7} \leq 2t - 24$$

$$\frac{2}{t - 1} + \frac{1}{t - 7} \leq 0$$

$$\frac{2t - 14 + t - 1}{(t - 1)(t - 7)} \leq 0$$

$$\frac{3t - 15}{(t - 1)(t - 7)} \leq 0$$

$3t-15=0$ $t=5$	$(t-1)(t-7)\neq 0$ $t\neq 1$ $t\neq 7$



$t<1$ $5^x<1$ $5^x<5^0$ $x<0$	$5\le t<7$ $5\le 5^x<7$ $5^1\le 5^x<5^{\log_5 7}$ $1\le x<\log_5 7$

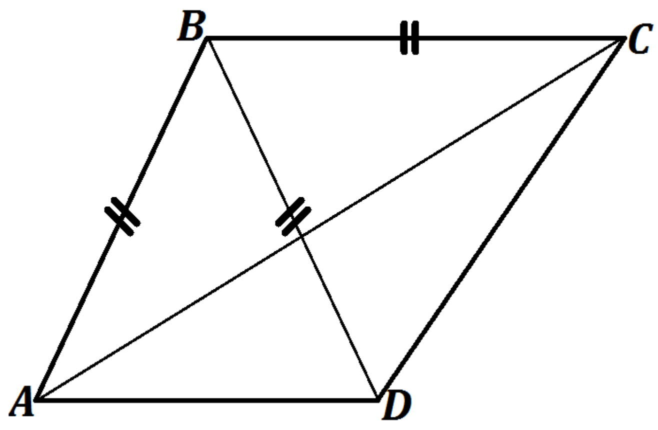
Ответ: $(-\infty;0)\cup[1;\log_5 7)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC=12$ и $BD=6{,}5$.

Решение:
а)



$AB=BD=BC$ (по условию)

Пусть $\angle BAC=\alpha$
$\triangle ABC$ — равнобедренный
=>
$\angle BAC=\angle ACB=\alpha$

$\angle CAD=\angle ACB=\alpha$
(т.к. это накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC)
=>
AC — биссектриса угла BAD
■

б)
$AB=BD=BC=6{,}5$
Идея поиска CD в том, чтобы найти косинус угла CBD и использовать теорему косинусов для треугольника CBD

$\angle BAD=\angle BDA=2\alpha$
$\angle BDA=\angle CBD=2\alpha$ (накрест лежащие)

Пусть

BH – высота треугольника ABC

Тогда

$AH = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$

$\cos\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{6}{6{,}5} = \frac{12}{13}$

Косинус двойного угла

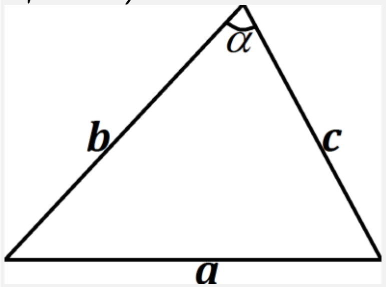
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{144}{169} - 1 = \frac{288}{169} - \frac{169}{169} = \frac{119}{169}$$

Теорема Косинусов



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

или

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2 \cdot BC \cdot BD \cdot \cos 2\alpha$

$$CD^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{119}{169}$$

$$CD^2 = \frac{169}{2} - \frac{119}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$CD = 5$

Ответ: 5

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

Решение:

Пусть n – срок кредита

Составим таблицу:

Год	Долг на	Основной	Дополнительный

	начало года	платёж	платёж
1	28	$\frac{28}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot 28 = 7$
…			
n	$\frac{28}{n}$	$\frac{28}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot \frac{28}{n} = \frac{7}{n}$

Очевидно, что наибольший годовой платёж будет в первом году (потому что платежи равномерно уменьшаются в течение n лет)
=>
Наибольший годовой платёж = 9 млн

$$\frac{28}{n} + 7 = 9$$

$$\frac{28}{n} = 2$$

$$n = 14$$

=>
В таблице все значения становятся известными:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	28	$\frac{28}{14} = 2$	7
…			
14	2	2	$\frac{7}{14} = 0{,}5$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{ОСВ} = 14 \cdot 2 + \frac{7 + 0{,}5}{2} \cdot 14$$

$$\text{ОСВ} = 28 + 7{,}5 \cdot 7 = 80{,}5$$

Ответ: 80,5 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение
$6a + \sqrt{5 + 4x - x^2} = ax + 3$
имеет единственный корень.

Решение:

$$\sqrt{5 + 4x - x^2} = ax - 6a + 3$$

Решим графически:

$$y = \sqrt{5 + 4x - x^2}$$
$$y = \sqrt{-x^2 + 4x - 4 + 4 + 5}$$
$$y = \sqrt{(-x^2 + 4x - 4) + 9}$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180312

$y = \sqrt{-(x^2 - 4x + 4) + 9}$
$y = \sqrt{3^2 - (x-2)^2}$

Заметим, что если возвести данное уравнение в квадрат, то получится уравнение окружности:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 3^2 - (x-2)^2 \end{cases}$$

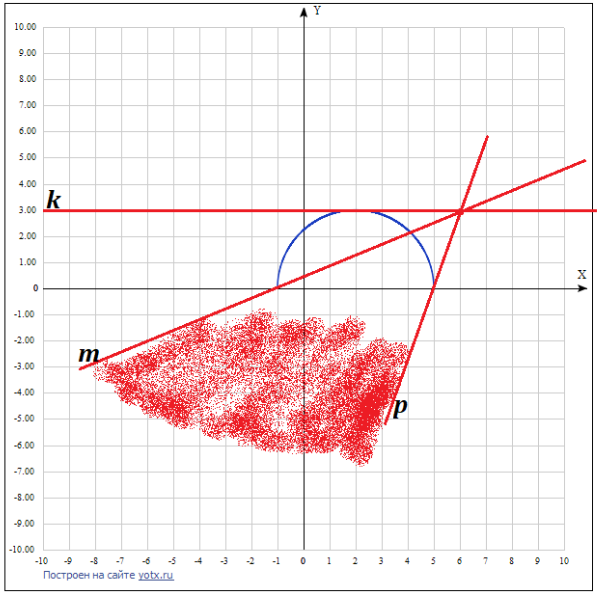
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

=>
Графиком левой части уравнения является полуокружность с центром $(2; 0)$ и радиусом 3

Рассмотрим правую часть уравнения:
$y = ax - 6a + 3$
$y = a(x-6) + 3$
=>
Графиком правой части уравнения является пучок прямых, проходящих, через точку $(6; 3)$

Пусть
$k -$ прямая, проходящая через точку $(6; 3)$, и касающаяся полуокружности
$m -$ прямая, проходящая через точку $(6; 3)$ и точку «левого основания» полуокружности
$p -$ прямая, проходящая через точку $(6; 3)$ и точку «правого основания» полуокружности

Проведём прямые k и m и p:



Найдём значение параметра a, соответствующее прямой k
$y = ax - 6a + 3$ проходит через т. $(2; 3)$
$3 = 2a - 6a + 3$
$0 = -4a$
$a = 0$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = ax - 6a + 3$ проходит через т. $(-1; 0)$
$0 = -a - 6a + 3$
$-3 = -7a$
$a = \frac{3}{7}$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = ax - 6a + 3$ проходит через т. $(5; 0)$
$0 = 5a - 6a + 3$
$-3 = -a$
$a = 3$

Итак,
Если $a < 0$, то пересечений нет
Если $a = 0$, то 1 пересечение

Если $0 < a < \frac{3}{7}$, то 2 пересечения
Если $a = \frac{3}{7}$, то 2 пересечения
Если $\frac{3}{7} < a < 3$, то 1 пересечение
Если $a = 3$, то 1 пересечение
Если $a > 3$, то пересечений нет

Ответ: $a \in \{0\} \cup \left(\frac{3}{7}; 3\right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?
.

Решение:

а)
Да, например
8, 9, 10, 11, 12

Наименьшее произведение 72, наибольшее произведение 132
=>
Произведение любых двух из этих чисел больше 60 и меньше 140
=>
Может

б)
Пусть
a, b, c, d, e и f – числа на доске, записанные в порядке возрастания

$ab > 60$
$a < b$
=>
$b = 9$ – наименьшее возможное значение второго по величине числа

$ef < 140$
$e < f$
=>
$e = 11$ – наибольшее возможное значение пред последнего по величине числа
=>
Получаем противоречие, т.к. между b и e есть два числа – c и d, но между 9 и 11 есть только 10
=>
Не может

в)
Пусть
a, b, c и d – числа на доске, записанные в порядке возрастания

Если
$a = 6$, то:
$b = 11$ (чтобы меньшее произведение получилось больше 60)
$c = 12$ или больше
$d = 13$ или больше
(но тогда большее произведение будет больше 140)
=>
Такой вариант не подходит

Если
$a = 5$, то:
$b = 13$ (чтобы меньшее произведение получилось больше 60)
$c = 14$ или больше
$d = 15$ или больше

(но тогда большее произведение будет больше 140)
=>
Такой вариант не подходит и
=>
$a \geq 7$

Если
$a = 10$, то:
$b = 11$ или больше
$c = 12$ или больше
$d = 13$ или больше
(но тогда большее произведение будет больше 140)
=>
Такой вариант не подходит и
$a \leq 9$
=>
Для наименьшего из четырёх чисел есть 3 варианта:

$a = 7$ Какое число может быть последним? 14 не может быть, т.к. даже в примере с наименьшими средними числами 7, 9, 10, 14 нарушается второе условие Последнее из четырёх чисел равно 12 или 13 7 9 10 12 (38) 7 9 11 12 (39) 7 10 11 12 (40) 7 9 10 13 (39)	$a = 8$ Какое число может быть последним? 14 не может быть, т.к. даже в примере с наименьшими средними числами 8, 9, 10, 14 нарушается второе условие Последнее из четырёх чисел равно 12 или 13 8 9 10 12 (39) 8 9 11 12 (40) 8 10 11 12 (41) 8 9 10 13 (40)	$a = 9$ Какое число может быть последним? 13 не может быть, т.к. даже в примере с наименьшими средними числами 9, 10, 11, 13 нарушается второе условие Последнее из четырёх чисел равно 12 9 10 11 12 (42)

Ответ: а) да (например, 8, 9, 10, 11, 12), б) нет, в) 38

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4