Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

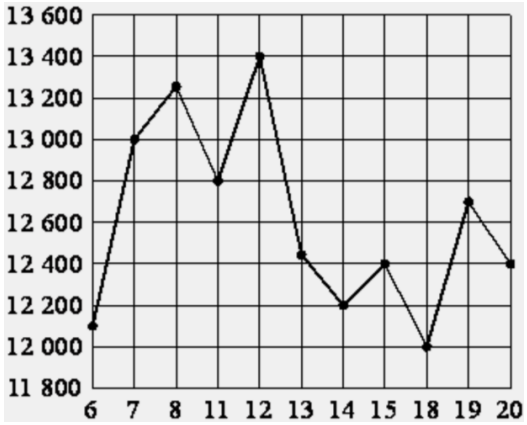
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В среднем за день во время конференции расходуется 90 пакетиков чая. Конференция длится 4 дня. В пачке чая 100 пакетиков. Какого наименьшего количества пачек чая хватит на все дни конференции?

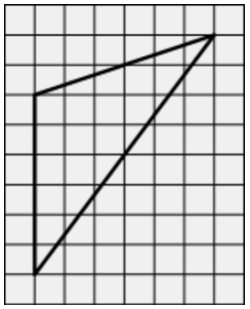
Ответ: _____.

2 На рисунке жирными точками показана цена тонны никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ: _____.

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что количество выпавших орлов меньше 2.

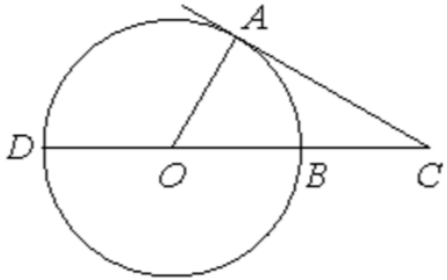
Ответ: _____.

5 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{3x-1} = 5.$$

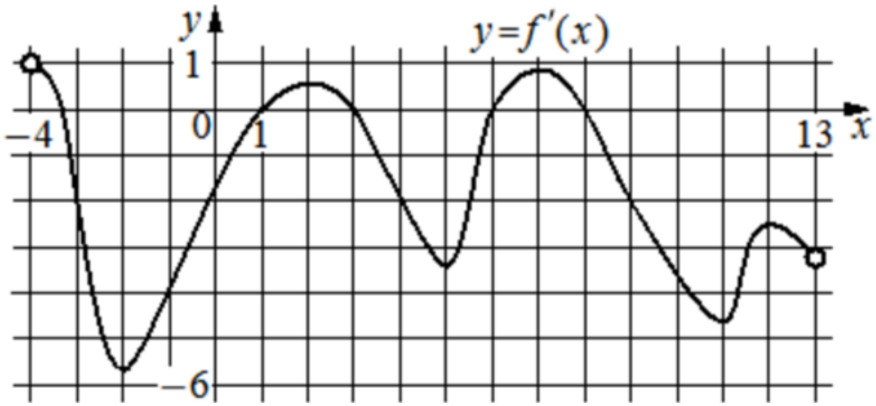
Ответ: _____.

6 Угол ACO равен 28°. Его сторона CA касается окружности с центром в точке O. Сторона CO пересекает окружность в точках B и D (см. рис.). Найдите градусную меру дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.



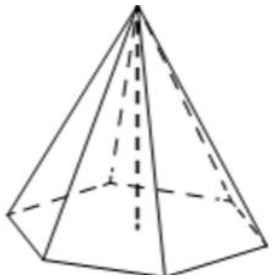
Ответ: _____.

7 На рисунке изображён график $y = f`(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

8 В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 6,5, а сторона основания равна 2,5. Найдите высоту пирамиды.



Ответ: _____.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}{60+10\sqrt{35}}.$$

Ответ: _____.

10 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 20$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 15 до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 100 до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

11 Один мастер может выполнить заказ за 30 часов, а другой – за 15 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Ответ: _____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 + 20x^3 - 65x$ на отрезке $[-4; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$1+\log_3(x^4+25)=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{30x^2+12}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2{,}2; 3{,}2]$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180212

15 Решите неравенство

$$\frac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geq 0.$$

16 В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD}=\sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t=1;2;\ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2-2ax+7|=|6a-x^2-2x-1|$$

имеет более двух различных корней.

19 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -9, -6, -4, -3, -1, 2, 5. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180212

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	4
2	1400
3	18
4	0,5
5	0,4
6	118
7	4
8	6
9	0,2
10	24
11	10
12	44
13	а) $\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{7}$. б) $\pm\sqrt{3}; \sqrt{7}$
14	$\arccos\frac{14}{55}$
15	$(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1] \cup \{0\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$
16	$\frac{116}{7}$
17	$\left(\frac{43}{441}; \frac{41}{400}\right)$
18	$(-\infty; -2\sqrt{10}-5) \cup \{-1\} \cup \left(2\sqrt{10}-5; \frac{8}{3}\right)$ $\cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$
19	а) -6, -3, 5, б) 5, в) нет

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$1 + \log_3(x^4 + 25) = \log_{\sqrt{3}}\sqrt{30x^2 + 12}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2{,}2; 3{,}2]$.

.

Решение:

а)

$1 + \log_3(x^4 + 25) = \log_{3^{\frac{1}{2}}}(30x^2 + 12)^{\frac{1}{2}}$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

Свойство логарифмов

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

$1 + \log_3(x^4 + 25) = \log_3(30x^2 + 12)$

$\log_3 3 + \log_3(x^4 + 25) = \log_3(30x^2 + 12)$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями
$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$

$\log_3 3 \cdot (x^4 + 25) = \log_3(30x^2 + 12)$

$3x^4 + 75 = 30x^2 + 12$

$3x^4 - 30x^2 + 63 = 0 \quad \Big| : 3$

$x^4 - 10x^2 + 21 = 0$

Пусть $x^2 = t$

$t^2 - 10t + 21 = 0$
$D = b^2 - 4ac = 100 - 84 = 16 = 4^2$
$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{10 + 4}{2} = 7$
$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{10 - 4}{2} = 3$

$x^2 = 3$ $x = \pm\sqrt{3}$	$x^2 = 7$ $x = \pm\sqrt{7}$

б)
$-\sqrt{7} \approx -2{,}65$
$-\sqrt{3} \approx -1{,}73$
$\sqrt{3} \approx 1{,}73$
$\sqrt{7} \approx 2{,}65$
=>
$-\sqrt{7} \notin [-2{,}2; 3{,}2]$
$-\sqrt{3} \in [-2{,}2; 3{,}2]$
$\sqrt{3} \in [-2{,}2; 3{,}2]$
$\sqrt{7} \in [-2{,}2; 3{,}2]$

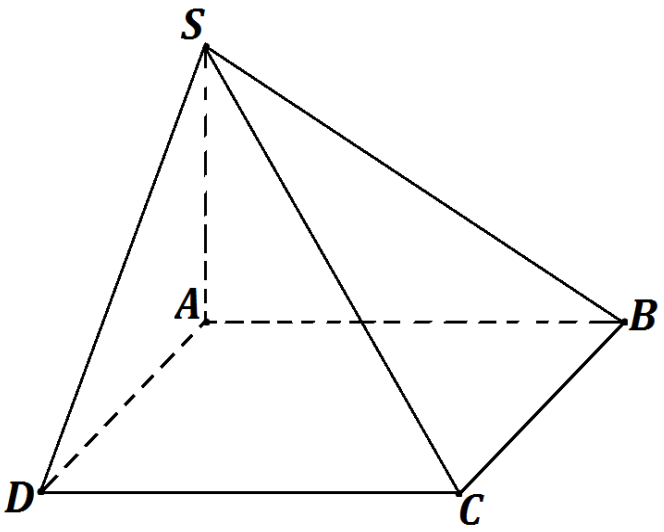
Ответ: а) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{7}$. б) $\pm\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

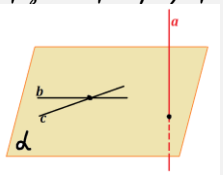
Решение:
а)



Заметим, что в $\triangle ABS$ выполняется теорема Пифагора:
$SB^2 = SA^2 + AB^2$
$\sqrt{85}^2 = \sqrt{21}^2 + 8^2$
$85 = 21 + 64$
$85 = 85$
=> $\triangle ABS$ – прямоугольный и $\angle SAB = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Заметим, что в $\triangle ADS$ выполняется теорема Пифагора:
$SD^2 = SA^2 + AD^2$
$\sqrt{57}^2 = \sqrt{21}^2 + 6^2$
$57 = 21 + 36$
$57 = 57$
=> $\triangle ADS$ – прямоугольный и $\angle SAD = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

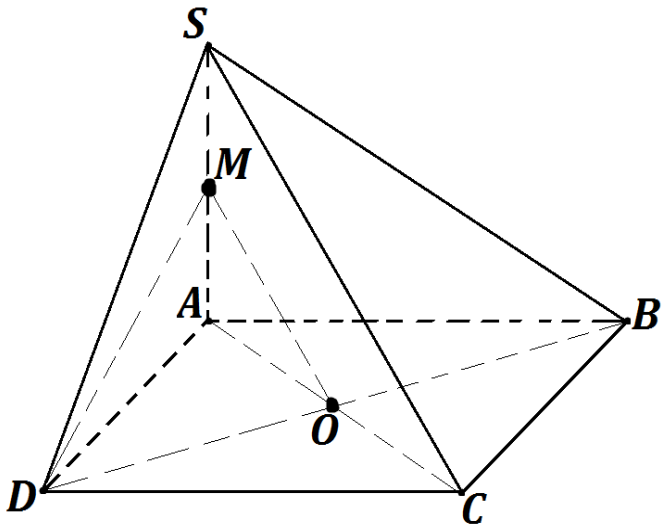
Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$SA \perp AB$
$SA \perp AD$ (т. к. $\triangle ABS$ и $\triangle ADS$ – прямоугольные)
$AB \cap AD = A$
=> $SA \perp (ABC)$
=> SA – высота пирамиды
■

б)



Построим прямую OM такую, что $OM \parallel SC$
$\angle MOD$ – искомый
O – середина AC
=>
OM – средняя линия $\triangle ASC$
=>
$OM = \frac{1}{2}SC$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (по теореме Пифагора)

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{\sqrt{21}^2 + 10^2} = 11$ (по теореме Пифагора)

=>

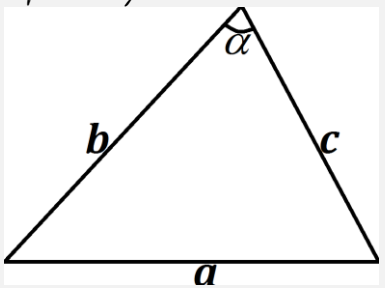
$OM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2} \cdot 11 = \frac{11}{2} = 5{,}5$

$DO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

$AM = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{21} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

$DM = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{41{,}25}$ (по теореме Пифагора)

Теорема Косинусов



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

или

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos\angle MOD = \frac{OM^2 + DO^2 - DM^2}{2 \cdot OM \cdot DO}$

$\cos\angle MOD = \frac{30{,}25 + 25 - 41{,}25}{2 \cdot 5{,}5 \cdot 5} = \frac{14}{55}$

$\angle MOD = \arccos\frac{14}{55}$

Ответ: б) $\arccos\frac{14}{55}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{3}{\left(2^{2-x^2} - 1\right)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2} - 1} + 1 \geq 0.$$

.

Решение:

Пусть $2^{2-x^2} - 1 = t$

$\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t} + 1 \geq 0$

$\frac{3 - 4t + t^2}{t^2} \geq 0$

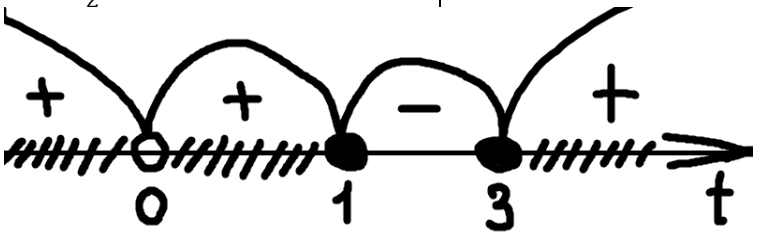
$3 - 4t + t^2 \geq 0$ | $t \neq 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

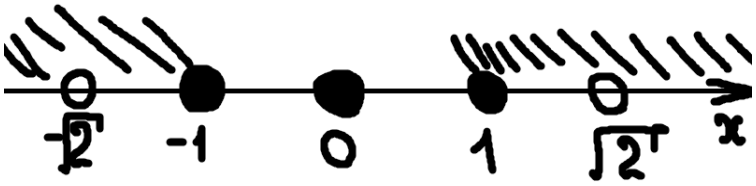
$t_1 = \frac{4+2}{2} = 3$

$t_2 = \frac{4-2}{2} = 1$



$t \leq 1$ $2^{2-x^2} - 1 \leq 1$ $2^{2-x^2} \leq 2^1$	$t \geq 3$ $2^{2-x^2} - 1 \geq 3$ $2^{2-x^2} \geq 4$	$t \neq 0$ $2^{2-x^2} - 1 \neq 0$ $2^{2-x^2} \neq 1$

$2-x^2 \le 1$ $x^2 \ge 1$ $x \le -1 \quad \vert x \ge 1$	$2^{2-x^2} \ge 2^2$ $2-x^2 \ge 2$ $x^2 \le 0$ $x = 0$	$2^{2-x^2} \ne 2^0$ $2-x^2 \ne 0$ $x \ne \pm\sqrt{2}$



Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1] \cup \{0\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

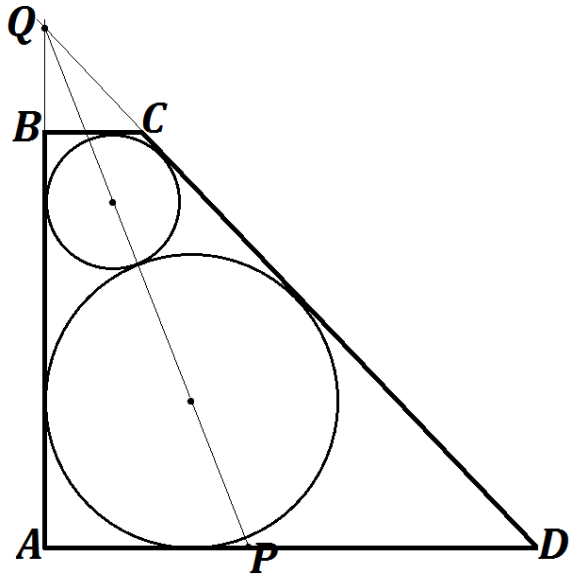
а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

.

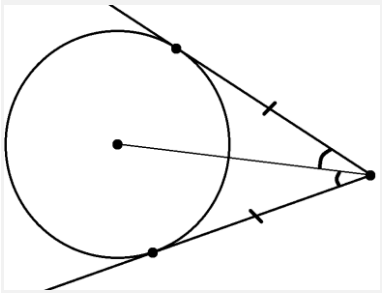
Решение:

а)



Пусть $AB \cap CD = Q$

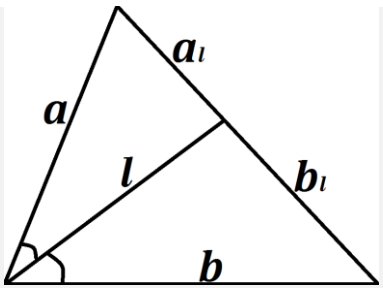
Свойство касательных



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой PQ, которая является биссектрисой угла AQD (по свойству касательных)

Свойство биссектрисы



$\frac{a_l}{b_l} = \frac{a}{b}$

$\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD}$

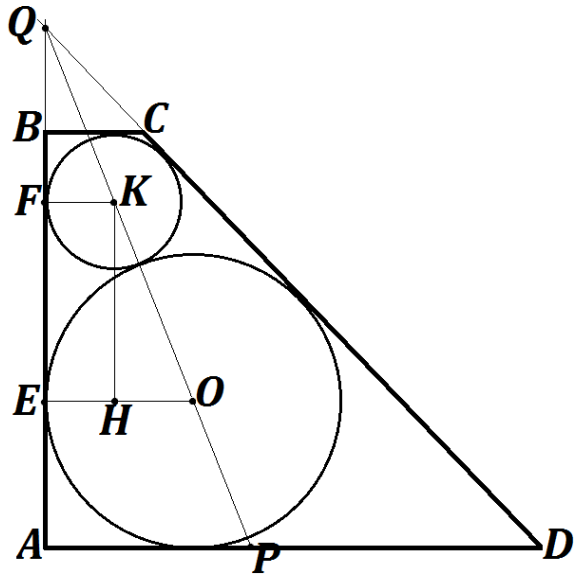
$\sin D = \frac{QA}{QD}$

=>

$\frac{AP}{PD} = \sin D$

■

б)



Пусть O – центр большей окружности
Пусть K – центр меньшей окружности
Пусть F – точка касания меньшей окружности с прямой AB
Пусть E – точка касания большей окружности с прямой AB
Тогда

$FK = \frac{1}{3} = BF$

$EO = \frac{4}{3} = AE$

Опустим перпендикуляр KH на отрезок EO
Рассмотрим $\triangle OKH$ – прямоугольный:

$OK = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$OH = EO - FK = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

$HK = \sqrt{OK^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1^2} = \frac{4}{3}$ (по теореме Пифагора)

=>

$EF = HK = \frac{4}{3}$

=>

$$AB = AE + HK + BF = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

$\triangle QFK \sim \triangle QEO$ по двум углам
$\begin{pmatrix} \angle QFK = \angle QEO = 90^\circ \\ \angle EQO - \text{общий} \end{pmatrix}$

$$\frac{QF}{QE} = \frac{FK}{EO}$$

$$\frac{QB + BF}{QB + BF + EF} = \frac{FK}{EO}$$

$$\frac{QB + \frac{1}{3}}{QB + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{QB + \frac{1}{3}}{QB + \frac{5}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$QB + \frac{5}{3} = 4QB + \frac{4}{3}$$

$$3QB = \frac{1}{3}$$

=>

$$QB = \frac{1}{9}$$

$$\cos\angle HKO = \frac{HK}{OK} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

Пусть $\angle HKO = \alpha$
$\angle BQC = 2\alpha$
$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Косинус двойного угла
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{32}{25} - \frac{25}{25} = \frac{7}{25}$$

Основные Тригонометрические формулы
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{24}{25}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{25} : \frac{7}{25} = \frac{24}{7}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7} = \frac{BC}{QB}$$

$$\frac{24}{7} = \frac{BC}{\frac{1}{9}}$$

=>

$$BC = \frac{8}{21}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7} = \frac{AD}{AQ}$$

$$\frac{24}{7} = \frac{AD}{AB + QB}$$

$$\frac{24}{7} = \frac{AD}{3 + \frac{1}{9}}$$

=>

$$AD = \frac{32}{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB$$

$$S_{ABCD} = \frac{\frac{32}{3} + \frac{8}{21}}{2} \cdot 3 = \frac{116}{7}$$

Ответ: б) $\frac{116}{7}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение:

В конце 1-го года бумаги стоят 1 тыс.
В конце 2-го года бумаги стоят 4 тыс.
В конце 3-го года бумаги стоят 9 тыс.
В конце 4-го года бумаги стоят 16 тыс.
…

В конце 2-го года бумаги в 4 раза дороже, чем в конце 1-го
В конце 3-го года бумаги в $\frac{9}{4}$ раза дороже, чем в конце 1-го

В конце 4-го года бумаги в $\frac{16}{9}$ раза дороже, чем в конце 1-го

Каждый год стоимость бумаг увеличивается всё в меньшее и в меньшее количество раз

Рассмотрим функцию $f(t)$

$$f(t) = \frac{t^2}{(t-1)^2}$$

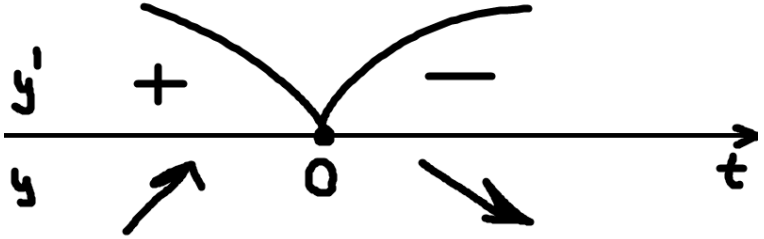
Докажем, что функция убывающая

$$f'(t) = \frac{2t \cdot (t^2 - 2t + 1) - 2t^2(t-1)}{(t-1)^4}$$

$$f'(t) = \frac{2t^3 - 4t^2 + 2t - 2t^3 + 2t^2}{(t-1)^4} = \frac{-2t^2 + 2t}{(t-1)^4}$$

$$f'(t) = \frac{-2t(t-1)}{(t-1)^4} = 0$$

$t = 0$



=> при $t > 0$ функция $f(t)$ убывает
=> продать ценные бумаги в конце 21-го года выгоднее, чем в конце 20-го и в конце 22-го

Если продать бумаги в конце 20-го года, то за оставшиеся 5 лет сумма на счёте будет: $400 \cdot (1 + r)^5$
Если продать бумаги в конце 21-го года, то за оставшиеся 4 года сумма на счёте будет: $441 \cdot (1 + r)^4$
Если продать бумаги в конце 22-го года, то за оставшиеся 3 года сумма на счёте будет: $484 \cdot (1 + r)^3$

получаем систему двух неравенств:

$$\begin{cases} 441 \cdot (1 + r)^4 > 400 \cdot (1 + r)^5 \\ 441 \cdot (1 + r)^4 > 484 \cdot (1 + r)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 441 > 400 \cdot (1+r) \\ 441 \cdot (1+r) > 484 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 441 > 400 + 400r \\ 441 + 441r > 484 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400r < 41 \\ 441r > 43 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r < \dfrac{41}{400} \\ r > \dfrac{43}{441} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{43}{441}; \frac{41}{400}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$
имеет более двух различных корней.

Решение:

$$\sqrt{(x^2 - 2ax + 7)^2} = \sqrt{(6a - x^2 - 2x - 1)^2} \qquad \Big|\,^2$$

$$(x^2 - 2ax + 7)^2 = (6a - x^2 - 2x - 1)^2$$

$$(x^2 - 2ax + 7)^2 - (6a - x^2 - 2x - 1)^2 = 0$$

Разность квадратов
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$(x^2 - 2ax + 7 - 6a + x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2ax + 7 + 6a - x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$(2x^2 - 2ax + 2x - 6a + 8)(-2ax - 2x + 6a + 6) = 0 \qquad \Big|:4$$

$$(x^2 - ax + x - 3a + 4)(-ax - x + 3a + 3) = 0$$

$$(x^2 + (1-a)x + 4 - 3a)\big(-x(a+1) + 3(a+1)\big) = 0$$

$$(x^2 + (1-a)x + 4 - 3a)(a+1)(3-x) = 0$$

$$x_1 = 3$$

Требуется найти a, при каждом из которых уравнение будет иметь три или более корней

Если $a = -1$, то корней бесконечное множество

Если уравнение $x^2 + (1-a)x + 4 - 3a = 0$ будет иметь 2 различных корня, среди которых не будет $x = 3$, то суммарно корней будет три

=>
Для уравнения $x^2 + (1-a)x + 4 - 3a = 0$ должны выполняться следующие условия:

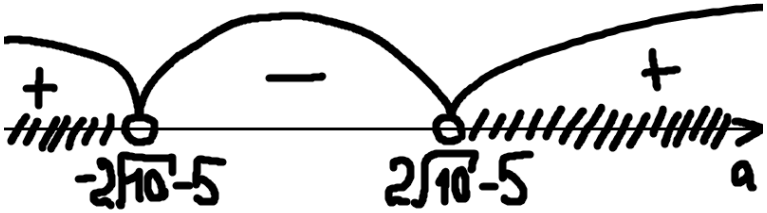
$$\begin{cases} D > 0 \\ 3^2 + (1-a)\cdot 3 + 4 - 3a \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-a)^2 - 16 + 12a > 0 \\ 9 + 3 - 3a + 4 - 3a \neq 0 \end{cases}$$

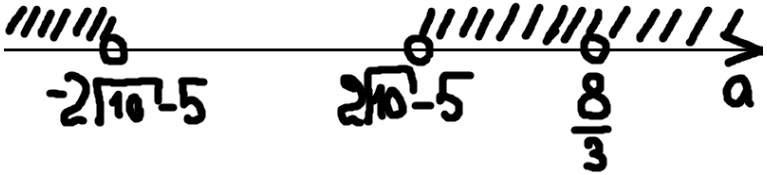
$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 - 16 + 12a > 0 \\ -6a \neq -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 10a - 15 > 0 \\ a \neq \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$a^2 + 10a - 15 > 0$
$a^2 + 10a - 15 = 0$
$D = 160$
$a_1 = \frac{-10 + 4\sqrt{10}}{2} = 2\sqrt{10} - 5$
$a_2 = \frac{-10 - 4\sqrt{10}}{2} = -2\sqrt{10} - 5$



Объединим решения системы:



Ответ: $a \in \left(-\infty; -2\sqrt{10} - 5\right) \cup \{-1\} \cup \left(2\sqrt{10} - 5; \frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор −9, −6, −4, −3, −1, 2, 5. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?
.

Решение:
а)
1
Задуманные 2, 3 и 5 из примера составили набор из семи чисел.

На доске выписан набор также из 7 чисел
=>
Задумано было также 3 числа
2
Среди задуманных чисел отрицательных больше, т.к. в наборе их больше, но есть и одно положительное
=>
Будет 2 отрицательных числа и 1 положительное
3
Если одним из положительных является 2, то никакое из отрицательных не даст нам в сумме 5
=>
Первое число из задуманных это 5
5
4
Чтобы получилось 2, нужно, чтобы в числе задуманных было -3, итак
-3 5
5

Чтобы получилось -9, нужно, чтобы в числе задуманных было
-6, итак
-6 -3 5

б)
1
Пусть задуманы ненулевые числа, для них в наборе на доске окажется k нулей
Заметим, что если добавить к задуманным один ноль, то в наборе на доске окажется $2k+1$ нулей
Пример:
1, 5, -5 => 1 ноль
1, 5, -5, 0 => 3 нуля $(2 \cdot 1 + 1)$

или
1, -1, 2, -2 => 3 нуля
1, -1, 2, -2, 0 => 7 нулей $(2 \cdot 3 + 1)$
=>
Чтобы было 5 нулей k должно быть равно 2
2
Если задумано три числа (включая ноль), то два ненулевых из них никак не образуют два нуля (максимум один ноль)
=>
Задумано больше трёх чисел
3
Если задумано четыре числа (включая ноль), то три ненулевых из них никак не образуют два нуля (максимум один ноль)
=>
Задумано больше четырёх чисел
4
Если задумано пять чисел (включая ноль), то четыре ненулевых смогут образовать два нуля, пример:
Задуманы: 0, 1, -1, 4, -3
0
0+1-1=0
0-1-3+4=0
1-1=0
-1-3+4=0

или другой пример:
Задуманы 0, 3, -3, 1, 2
0
0+3-3=0
0+1+2-3=0
3-3=0
1+2-3=0
=>
Задумано минимум 5 чисел

в)
Нет, например
Набор -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 можно получить из:

-2, -1, 3	-3, 1, 2
$a=-2$	$a=-3$
$b=-1$	$b=1$
$c=3$	$c=2$
$a+b=-3$	$a+b=-2$
$a+c=1$	$a+c=-1$
$b+c=2$	$b+c=3$
$a+b+c=0$	$a+b+c=0$

Ответ: а) -6, -3, 5, б) 5, в) нет

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4