Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

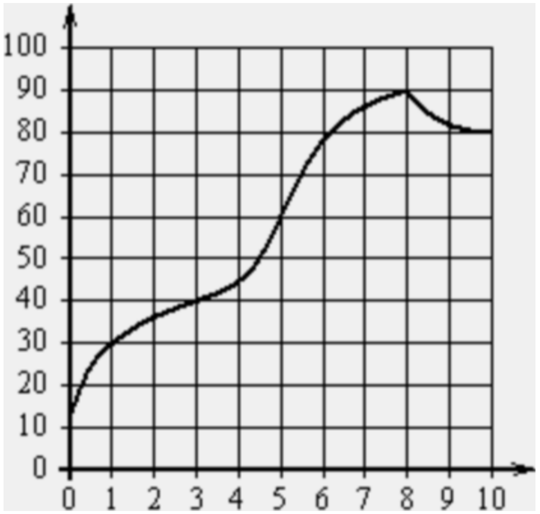
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Бегун пробежал 250 м за 36 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: ____________________________.

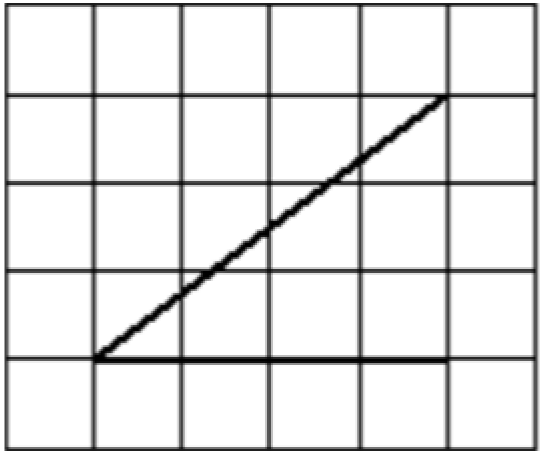
2 На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат – температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, на сколько градусов нагреется двигатель с первой по восьмую минуту разговора.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите синус этого угла.



Ответ: ___________________________.

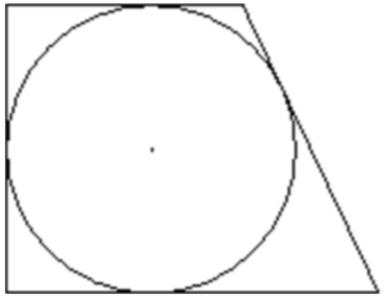
4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$3^{\log_9(4x+1)} = 9.$

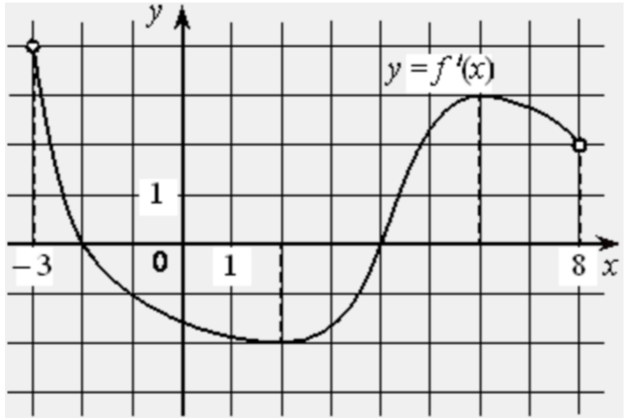
Ответ: ___________________________.

6 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 40, её большая боковая сторона равна 11. Найдите радиус окружности.



Ответ: ___________________________.

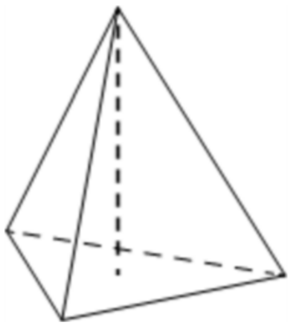
7 На рисунке изображён график функции $y = f`(x)$ − производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

8 В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 10,5. Найдите высоту пирамиды.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\left(5^{\frac{3}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{35^9}.$$

Ответ: ___________________________.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа, t – время, прошедшее от начального момента, T – период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 96 мг. Период его полураспада составляет 3 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 3 мг.

Ответ: ___________________________.

11 Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции
$y = \ln(x + 9) - 10x + 7$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$4^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^{x-1} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1; \frac{5}{3}\right)$.

14 Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

15 Решите неравенство
$(2-3x)\cdot\log_{2x-1}(x^2-2x+2)\le 0.$

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC=CD$.

а) Докажите, что $AB:BC=AP:PD$.
б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB=5$, а $BC=5\sqrt{2}$.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	$0{,}2S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\left|\frac{6}{x}-5\right|=ax-1$$
на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.

19 а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	25
2	60
3	0,6
4	0,5
5	20
6	4,5
7	4
8	3,5
9	7
10	15
11	10
12	-8,9
13	а) $1; \log_2 3$. б) $\log_2 3$
14	$\operatorname{arctg}\frac{13}{5}$
15	$\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right] \cup (1;+\infty)$
16	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$
17	7
18	$\left(\frac{5}{6};\frac{3}{2}\right)$
19	а) 2592, б) нет, в) 5568, 5586, 5865, 5856, 5658, 5685, 6558, 6585, 6855, 8655, 8565, 8556

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$4^{x-\frac{1}{2}} - 5\cdot 2^{x-1} + 3 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1;\frac{5}{3}\right)$.

.

Решение:
а)

Умножение степеней с одинаковыми основаниями
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Деление степеней с одинаковыми основаниями
$a^n : a^m = a^{n-m}$

$$\frac{4^x}{4^{\frac{1}{2}}} - 5\cdot\frac{2^x}{2} + 3 = 0$$

$$\frac{4^x}{2} - 5\cdot\frac{2^x}{2} + 3 = 0 \qquad \Big| \cdot 2$$

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

$4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

Пусть $2^x = t$

$t^2 - 5t + 6 = 0$
$D = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 = 1^2$
$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3$
$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2$

$2^x = 2$ $2^x = 2^1$ $x = 1$	$2^x = 3$ $2^x = 2^{\log_2 3}$ $x = \log_2 3$

б)
$x = 1 \notin \left(1; \frac{5}{3}\right)$

$x = \log_2 3$
$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$
$1 < \log_2 3 < 2$
=>

Сравним $\log_2 3$ и $\frac{5}{3}$
$\log_2 3$ и $\log_2 2^{\frac{5}{3}}$
3 и $2^{\frac{5}{3}}$ $\quad | \wedge 3$
3^3 и 2^5
27 и 32
=>
$\log_2 3 < \frac{5}{3}$
=>
$\log_2 3 \in \left(1; \frac{5}{3}\right)$

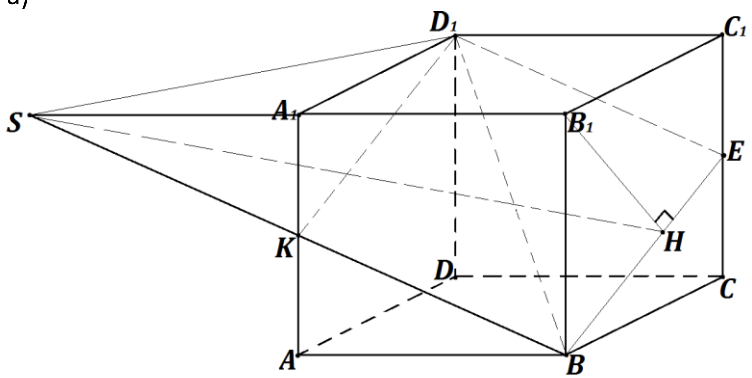
Ответ: а) 1; $\log_2 3$. б) $\log_2 3$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

Решение:
а)



Построение сечения:
Продлим A_1B_1 на расстояние A_1S, равное A_1B_1
Построим SD_1, т.к. точки S и D_1 лежат в одной плоскости
$SD_1 \parallel A_1C_1$
Построим BS, т.к. точки B и S лежат в одной плоскости
Пусть $BS \cap AA_1 = K$
Построим D_1K, т.к. точки D_1 и K лежат в одной плоскости
Построим прямую D_1E такую, что $D_1E \parallel BK$
Построим BE, т.к. точки B и E лежат в одной плоскости

=>
BKD_1E – ромб

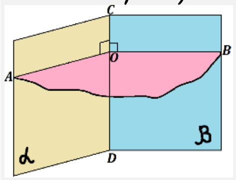
$ABCD$ – прямоугольник
Если мы докажем, что смежные стороны этого прямоугольника равны, то мы докажем, что это квадрат
A_1K – средняя линия треугольника BB_1S (т.к. $A_1K \parallel BB_1$ и $A_1S = A_1B_1$)
=>
$SK = BK$
$\triangle ABK = \triangle A_1SK$ по двум сторонам и углу между ними
$(SK = BK, A_1S = AB, \angle A_1SK = \angle ABK)$
=>
$A_1K = AK$

Выразим каждую из этих сторон по теореме Пифагора:
$A_1K^2 = D_1K^2 - A_1D_1{}^2$
$AK^2 = BK^2 - AB^2$
=>
$D_1K^2 - A_1D_1{}^2 = BK^2 - AB^2$

$D_1K = BK$, т.к. у ромба BKD_1E все стороны равны по определению
=>
$A_1D_1 = AB$
$AD = AB$
=>
$ABCD$ – квадрат
■

б)

Схема нахождения угла между плоскостями



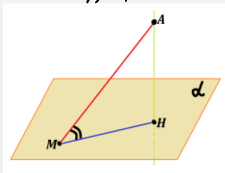
1) Ищем прямую пересечения плоскостей (на рисунке это CD)
2) На этой прямой ставим точку (на рисунке это точка O)
3) Проводим из этой точки два перпендикуляра в каждой из плоскостей (на рисунке $OA \perp CD$ в плоскости α и $OB \perp CD$ в плоскости β)

4) Угол между этими перпендикулярами – искомый угол между плоскостями (на рисунке $\angle AOB$ – угол между плоскостями α и β)

Плоскость α и плоскость BCC_1 пересекаются по прямой BE, поэтому угол между этими плоскостями – это угол между перпендикулярами к этой общей прямой, проведёнными от каждой из плоскостей

Но мы пока что не знаем точку пересечения этих перпендикуляров

Угол между прямой и плоскостью



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость (на рисунке $\angle AMH$ – угол между прямой AM и MH (её проекцией на плоскость α))

Проведём высоту B_1H в $\triangle BB_1E$
B_1H – это проекция SH на «правую стену», т.е. на плоскость BCC_1
=>
$\angle SHB_1$ – искомый угол между плоскостью α и плоскостью BCC_1

Найдём B_1H:
Рассмотрим $\triangle BB_1E$
$BE = \sqrt{BC^2 + EC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (по теореме Пифагора)
$S_{BB_1E} = S_{BCC_1B_1} - S_{B_1C_1E} - S_{BCE}$
$$S_{BB_1E} = BC \cdot CC_1 - \frac{B_1C_1 \cdot EC_1}{2} - \frac{BC \cdot CE}{2}$$
$$S_{BB_1E} = 12 \cdot 10 - \frac{12 \cdot 5}{2} - \frac{12 \cdot 5}{2} = 60$$
$$S_{BB_1E} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot B_1H = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot B_1H$$

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot B_1H = 60$$
$$B_1H = \frac{120}{13}$$
$SB_1 = 2 \cdot A_1B_1 = 2 \cdot 12 = 24$

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

Рассмотрим $\triangle SHB_1$ — прямоугольный:

$$\operatorname{tg}\angle SHB_1 = \frac{SB_1}{B_1H} = \frac{24}{1} : \frac{120}{13} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

$$\angle SHB_1 = \operatorname{arctg}\frac{13}{5}$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{13}{5}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$(2-3x)\cdot\log_{2x-1}(x^2-2x+2) \le 0.$

.

Решение:

ОДЗ:

1.

$x^2-2x+2>0$

$(x-1)^2+1>0$

x — любое

2.

$2x-1 \ne 1$

$2x \ne 2$

$x \ne 1$

3.

$2x-1>0$

$2x>1$

$x>\frac{1}{2}$

Способ №1

Оценим значение логарифма:

Подлогарифмическое выражение больше единицы

=>

если основание логарифма будет больше единицы, то логарифм положительный

если основание логарифма будет меньше единицы, то логарифм отрицательный

Если

$2x-1>1$

То

$2-3x \le 0$

Если

$0<2x-1<1$

То

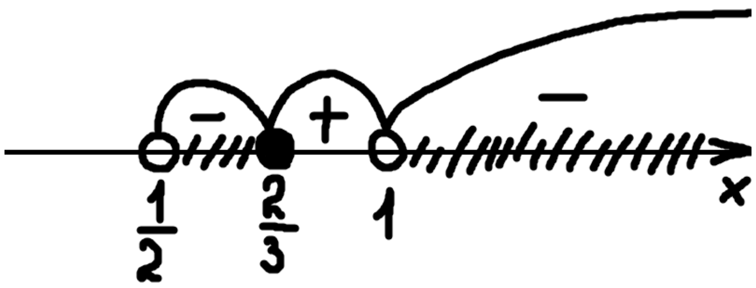
$2-3x \ge 0$

$\begin{cases}2x-1>1\\2-3x\le 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x>2\\2\le 3x\end{cases}$ $\begin{cases}x>1\\\frac{2}{3}\le x\end{cases}$ => $x>1$	$\begin{cases}0<2x-1<1\\2-3x\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}1<2x<2\\2\ge 3x\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1\\\frac{2}{3}\ge x\end{cases}$ => $\frac{1}{2}<x\le\frac{2}{3}$

Способ №2

$2-3x=0$ $x=\frac{2}{3}$	$\log_{2x-1}(x^2-2x+2)=0$ $x^2-2x+2=(2x-1)^0$ $x^2-2x+2=1$ $x^2-2x+1=0$ $(x-1)^2=0$ $x=1$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115



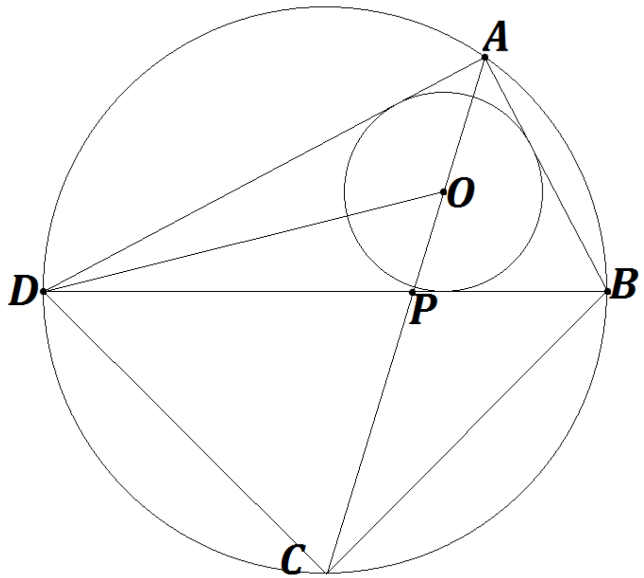
Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right] \cup (1;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB:BC = AP:PD$.
б) Найдите площадь треугольника COD, где $O -$ центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что $BD -$ диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 5$, а $BC = 5\sqrt{2}$.
.

Решение:
а)



Заметим, что искомое отношение можно получить из подобных треугольников, значит надо найти подобные треугольники со сторонами из искомого отношения.

$\angle ADB = \angle ACB$ (т.к. это вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AB)
$\angle DAC = \angle CAB$ (т.к. это вписанные углы, опирающиеся на хорды одинаковой длины, следовательно, на хорды, стягивающие дуги одинаковой градусной меры)
=>
$\triangle APD \sim \triangle ABC$ по двум углам
$\begin{pmatrix}\angle ADP = \angle ACB \\ \angle DAP = \angle CAB\end{pmatrix}$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PD} \qquad \Big| : BC$$

$$\frac{AB}{AP \cdot BC} = \frac{1}{PD} \qquad \Big| \cdot AP$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PD} \qquad \Big| \cdot AP$$

■

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

б)

$BC = CD = 5\sqrt{2}$

$\angle BAD = 90°$

(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

$\angle BCD = 90°$

(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 10$ (по теореме Пифагора)

$AB = 5$

=>

$AB = \frac{1}{2} \cdot BD$

=>

$\angle ADB = 30°$

(по свойству прямоугольного треугольника)

$\angle ADB = \angle ACB$

=>

$\angle ACB = 30°$

$\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = 90 - 30 = 60°$

$\angle ADO = \angle PDO = \frac{1}{2} \cdot \angle ADB = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15°$

(по свойству касательных)

$\angle BDC = 45°$

(т.к. $\Delta\, BCD$ – прямоугольный и равнобедренный)

$\angle CDO = \angle BDC + \angle PDO = 45 + 15 = 60°$

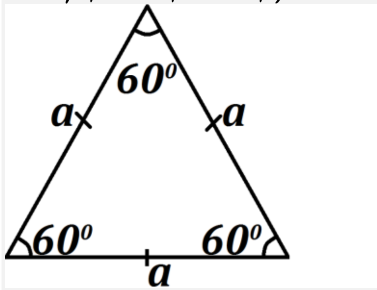
$\angle DOC = 180 - \angle CDO - OCD = 180 - 60 - 60 = 60°$

(по теореме о сумме углов треугольника)

=>

$\Delta\, COD$ – равносторонний

площадь равностороннего треугольника



$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

$S_{COD} = \frac{\sqrt{3} \cdot CD^2}{4}$

$S_{COD} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	$0{,}2S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.
.

Решение:

Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot S = 1{,}2\cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}7\cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}2\cdot S - 0{,}7\cdot S = 0{,}5\cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}2\cdot 0{,}7\cdot S = 0{,}84\cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}4\cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}84\cdot S - 0{,}4\cdot S = 0{,}44\cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}2\cdot 0{,}4\cdot S = 0{,}48\cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	$0{,}2\cdot S$

=>

01.04.2019	$0{,}48\cdot S - 0{,}2\cdot S = 0{,}28\cdot S$

20209 год

01.01.2020	$1{,}2\cdot 0{,}2\cdot S = 0{,}24\cdot S$
01.04.2020	
01.07.2020	0

=>

01.04.2020	$0{,}24\cdot S - 0 = 0{,}24\cdot S$

Общая сумма выплат должна быть больше 10 млн рублей
(по условию)
=>
$0{,}5\cdot S + 0{,}44\cdot S + 0{,}28\cdot S + 0{,}24\cdot S > 10$ млн
$1{,}46\cdot S > 10$
$S > \frac{1000}{146}$
$S > \frac{500}{73}$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

$S > 6\frac{62}{73}$

Требуется найти наименьшее подходящее целое S
=>
$S = 7$

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\left|\frac{6}{x} - 5\right| = ax - 1$$
на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение:

Решим графически:

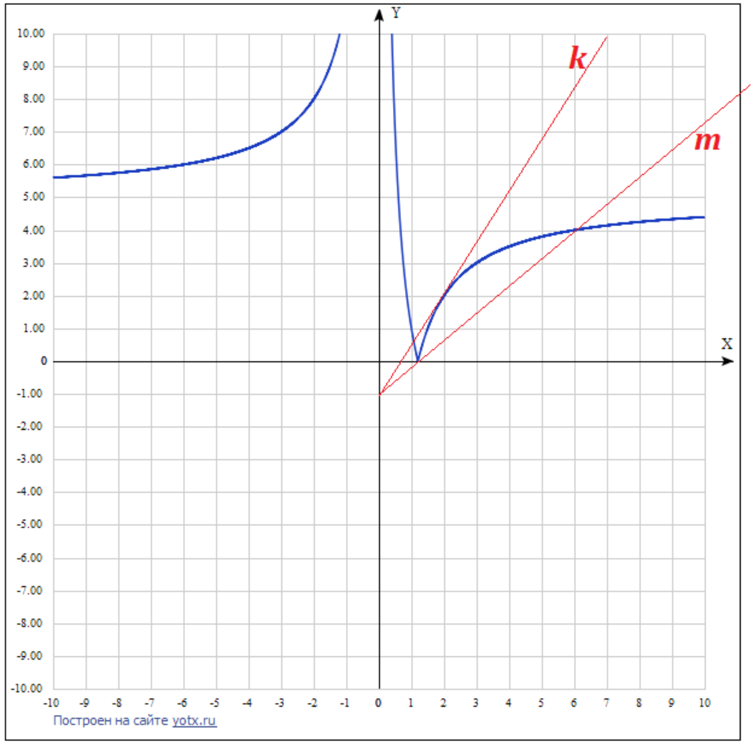
Построим $y = \left|\frac{6}{x} - 5\right|$ (можно строить только в первой и четвёртой четверти)

Уравнение $y = ax - 1$ задаёт множество прямых, проходящих через точку $(0; -1)$

Если $a = 1$, то получаем 3 пересечения с гиперболой
Если $a < 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. прямая в 4-й четверти будет располагаться ниже оси Ox)
Если $a = 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. прямая станет параллельна оси абсцисс)

Пусть
m – прямая, проходящая через точку $\left(\frac{6}{5}; 0\right)$, т.е. через точку «перелома» гиперболы
k – прямая, проходящая через точку касания гиперболы

Проведём прямые m и k:



Гипербола в точке касания – это гипербола с отрицательным коэффициентом, поэтому раскрываем модуль, меняя знаки на противоположные
$$y = \left|\frac{6}{x} - 5\right|$$

© 2018 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

$y = -\frac{6}{x} + 5$ – гипербола при $x > \frac{6}{5}$

Графики имеют три общие точки, если прямые $y = ax - 1$ лежат внутри острого угла, образованного прямыми m и k, найдём значения параметров a, соответствующих этим прямым:

Найдём значение параметра a у прямой m:

$y = ax - 1$ проходит через т. $\left(\frac{6}{5}; 0\right)$

$0 = a \cdot \frac{6}{5} - 1$

$1 = \frac{6}{5}a$

$a = \frac{5}{6}$

Найдём значение параметра a у прямой k:

$y = ax - 1$ является касательной к гиперболе $-\frac{6}{x} + 5$

Условие касания функции и прямой

$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$

$$\begin{cases} (ax-1)' = \left(-\frac{6}{x} + 5\right)' \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = (-6 \cdot x^{-1} + 5)' \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{6}{x^2} \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 5 \end{cases}$$

Подставим значение a под второе уравнение системы:

$\frac{6}{x^2} \cdot x - 1 = -\frac{6}{x} + 5$

$\frac{6}{x} - 1 = -\frac{6}{x} + 5$

$\frac{12}{x} = 6$

$x = 2$

$a = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{2^2} = \frac{3}{2}$

Если $a = \frac{5}{6}$, то получаем 2 пересечения с гиперболой

Если $a = \frac{3}{2}$, то получаем 2 пересечения с гиперболой

Если $\frac{5}{6} < a < \frac{3}{2}$, то получаем 3 пересечения с гиперболой

Ответ: $\left(\frac{5}{6}; \frac{3}{2}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

Решение:

а)
Пусть a, b, c и d – цифры четырёхзначного числа

Произведение цифр в 10 раз больше суммы цифр этого числа
=>
$a \cdot b \cdot c \cdot d = 10(a + b + c + d)$
$abcd = 10a + 10b + 10c + 10d$
=>
$abcd$ должно быть кратно 10
=>
среди цифр точно есть 5 и цифра, кратная 2, например 2 (можно было попробовать взять 4, 6, 8)

Пусть
$a = 2$
$b = 5$
Тогда
$10cd = 20 + 50 + 10c + 10d$
$10cd = 70 + 10c + 10d \quad \Big| : 10$
$cd = 7 + c + d$
$cd - c = d + 7$
$c(d - 1) = d + 7$
$c = \dfrac{d + 7}{d - 1}$

Если $d = 2$, то
$a = 2$
$b = 5$
$c = 9$
$d = 2$

2592 или другое число из этих же цифр (есть ещё много и других вариантов, но нам нужен один пример)

б)
$a \cdot b \cdot c \cdot d = 175(a + b + c + d)$
$abcd = 175a + 175b + 175c + 175d$
=>
$abcd$ должно быть кратно 175

Разложим 175 на простые множители: $175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$

=>
среди цифр точно есть 5, 5 и 7

Пусть
$a = 5$
$b = 5$
$c = 7$
Тогда
$175d = 175 \cdot 5 + 175 \cdot 5 + 175 \cdot 7 + 175d$
$0 = 175 \cdot 5 + 175 \cdot 5 + 175 \cdot 7$
=>
Противоречие
=>
Не существует

в)
$a \cdot b \cdot c \cdot d = 50(a + b + c + d)$
$abcd = 50a + 50b + 50c + 50d$
=>
$abcd$ должно быть кратно 50
=>
среди цифр точно есть 5, 5 и цифра, кратная 2 (2, 4, 6 или 8)

Если
$a = 5$
$b = 5$
$c = 2$
Тогда
$50d = 50 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot d$
=>
Противоречие

Если
$a = 5$
$b = 5$
$c = 4$
Тогда
$100d = 50 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 50 \cdot d$
$50d = 700$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

$d = 14$
=>
Не подходит, т.к. $d -$ это цифра

Если
$a = 5$
$b = 5$
$c = 6$
Тогда
$150d = 50 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 6 + 50 \cdot d$
$100d = 800$
$d = 8$
=>
5568 или другое число из этих же цифр нам подходит, запишем все варианты:

5568
5586
5865
5856
5658
5685

6558
6585
6855

8655
8565
8556

Ответ: а) 2592, б) нет, в) 5568, 5586, 5865, 5856, 5658, 5685, 6558, 6585, 6855, 8655, 8565, 8556

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180115

© 2018 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях