Для учителей математики не секрет, что решение текстовых задач вызывает у учащихся трудности, в каком бы возрасте они не находились. Трудности связаны элементарно с прочтения текста задачи, у значительного процента школьников средней школы не сформировано умение читать и понимать текст одновременно. Понятно, что дефицит такого качества чтения делает весьма затруднительным выбор структурированной информации и поиск нужной стратегии при решении, сформулированной в виде сюжетного смыслового текста учебной задачи.

Текстовые задачи являются традиционным разделом на экзамене по математике . Как правило, основная трудность при решении текстовой задачи состоит в переводе её условий на математический язык уравнений. Общего способа такого перевода не существует. Однако многие задачи ОГЭ, достаточно типичны. Можно разделить их на такие группы:

Задачи на движение

- по прямой (навстречу и вдогонку)
- по замкнутой трассе
- по воде
- на среднюю скорость
- протяженных тел

Задачи на производительность

- задачи на работу
- задачи на бассейны и трубы

Задачи на проценты, концентрацию, части и доли

- Задачи на проценты и доли
- Задачи на коцентрацию, смеси и сплавы

Арифметическая прогрессия

Геометрическая прогрессия

Методы решения этих задач имеют много общего и одновременно некоторые специфические особенности

Весь процесс решения задач можно разбить на несколько этапов.

1-й этап: анализ условия;
2-й этап: схематическая запись;
3-й этап: поиск способа решения;
4-й этап: осуществление решения;

5-й этап: проверка решения;
6-й этап: исследование задачи;
7-й этап: формулировка ответа;
8-й этап: анализ решения.
Анализируя программу по математике тему «Решение задач» можно увидеть с 5 по 8 класс, однако времени на их решение отводиться по программе очень мало : например 7

класс : 3-4 часа в теме «Уравнения» и 3 часа в теме «Системы уравнений» . 8 класс -4 часа отводится на решение задач в теме «Квадратные уравнения». В 9 классе темы решения задач нет, ее учителя вносят в повторение курса алгебры , при подготовке к ОГЭ. В 10-11 классах темы Решение задач нет, хотя текстовая задача присутствует в ЕГЭ.

Рассмотрим более подробно каждый этап решения задачи.

1. Анализ задачи. Назначение этапа — осмыслить ситуацию, отраженную в задаче; выделить условия и требования, назвать данные и искомые, выделить величины и зависимости между ними (явные и неявные). На этом этапе решения задачи можно использовать такие приемы:

а) представление той жизненной ситуации, которая описана в задаче;

б) постановка специальных вопросов и поиск ответов на них;

в) «переформулировка» задачи;

г) моделирование ситуации, описанной в задаче, с помощью реальных предметов, предметных или графических моделей и др.

Первый прием — представление той жизненной ситуации, которая описана в задаче, — выполняется фактически при чтении или слушании задачи. Вместе с тем мысленное воспроизведение всех объектов задачи и связей между ними может проводиться и позже. Цель такого воспроизведения — выявление основных количественных и качественных характеристик ситуации, представленной в задаче.

Второй прием — постановка специальных вопросов и поиск ответов на них — включает следующий «стандартный» набор вопросов, ответы на которые позволяют детально разобраться в содержании задачи:

1. О чем говорится в задаче?
2. Что известно в задаче?
3. Что требуется найти в задаче?
4. Что в задаче неизвестно? и др.

Третий прием — переформулировка текста задачи — состоит в замене данного в задаче описания некоторой ситуации другим описанием, сохраняющим все отношения, связи, качественные характеристики, но более явно их выражающим. Вся лишняя, несущественная информация при этом отбрасывается, текст задачи преобразуется в форму, облегчающую поиск пути решения. В ходе переформулировки выделяются основные ситуации, о которых идет речь в задаче, при необходимости строится вспомогательная модель задачи: краткая запись условия, таблица, рисунок, чертеж, диаграмма и т.п.

Моделирование ситуации, описанной в задаче, с помощью реальных предметов, предметных моделей или графических моделей является еще одним, четвертым, приемом анализа задачи.

Вспомогательные модели являются действенным средством поиска пути решения задачи и составления плана ее решения.

Рассмотрим задачи, которые вызывают трудности у учащихся:

Во-первых это задачи на проценты.

Тема «Решение задач на проценты» проходят в 5-6 классах , но назвать эту тему легкоусвояемой нельзя поэтому перед учителем математики стоит непростая задача: научить обучающихся общим подходам в решении задач на проценты. Этого можно достигнуть только при систематической работе с учениками над этой темой с 5-го по 11-й класс

Существует три основных вида задач на проценты:

1. Найти число а, составляющее п процентов от числа Ь.

   Решение: а = п/100 * Ь

2. Обратная задача: найти число Ь, если п процентов от него равно а.

   Решение: Ь = а : п/100

3. Найти, сколько процентов составляет число а от числа Ь.

   Решение: п = а/Ь * 100.

Большинство учащихся с легкостью скажут заученную фразу , что процент от числа находится умножением ,а число по величине его процента находится делением , но почему то встречаясь с задачами на проценты возникает ступор.

Типичные задачи ,в которых учащиеся испытывают затруднения, хотя уровень этих задач невысок, именно на эти задачи необходимо обращать внимание учащихся ,обращаясь к ним вновь и вновь.

1.Мясо теряет при варке около 35% своего веса. Сколько нужно сырого мяса, чтобы получить 520 гр. вареного?

Решение:

Пусть x гр. - масса сырого мяса 0.35x – теряет при варке.

По условию:

x-0,35x=520

x=520/0,65=800 (гр.)

Ответ: нужно взять 800гр. сырого мяса.

2.Вкладчик положил в банк некоторую сумму денег под 30% годовых. Через год он получил прибыль в 7500 руб. Найдите величину вклада.

Решение:

30% - это 0,3;

7500:0,3=25 000 (руб.)

Ответ: 25 000 руб.

3.Сумма двух чисел равна 120. Найти эти числа, если 40% одного равны 60% другого.

Решение:

Основная идея решения состоит в том, чтобы на основании условия задачи составить уравнение.

Пусть х - одно число, тогда (120-х) - другое число. По условию задачи:

0,4х=0,6(120-х)

х=72

120-72=48

Ответ: 72 и 48.

4. После повышения цены на 30% книга стала стоить 52 руб. Сколько стоила книга до повышения цены?

Решение:

Первоначальная цена книги составляет 100%.

Поэтому52руб., т.е. цена после подорожания, составляет 100%+30%=130% от первоначальной цены. Теперь можно решить задачу на нахождение величины по известному ее проценту.

Рассуждать можно по-разному:

1)1%- это 52:130=0,4 руб., а 100% - это 0,4*100=40 руб.;

2) 10% - это 52:13=4 руб., а 100% - это 4*10=40 руб.;

3) 130% - это 1,3, поэтому 52 руб. составляют 1,3 первоначальной цены, а поэтому первоначальная цена равна 52:1,3=40 руб.

Более удобное рассуждение в этой задаче –это решать ее с помощью уравнения

Пусть х-цена книги до повышения, тогда 0,3х- на столько цена повысилась, и стала х+0,3х=1,3х ,что по условию 52руб.

уравнение:

1,3х=52

Х=40

5.Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

Задачи о продуктах все одинаковы: то есть такая, где из винограда получается изюм, из абрикосов урюк, из хлеба сухари или из молока творог — а на самом деле это задача на растворы. Виноград мы тоже можем условно изобразить как раствор. В нем есть вода и «сухое вещество». У «сухого вещества» сложный химический состав, а по его вкусу, цвету и запаху мы могли бы понять, что это именно виноград, а не картошка. Изюм получается, когда из винограда испаряется вода. При этом количество «сухого вещества» остается постоянным. В винограде содержалось 90% воды, значит, «сухого вещества» было 10%. В изюме 5% воды и 95% «сухого вещества». Пусть из x кг винограда получилось 20 кг изюма.

Тогда

10% от $x = 95\%$ от 20

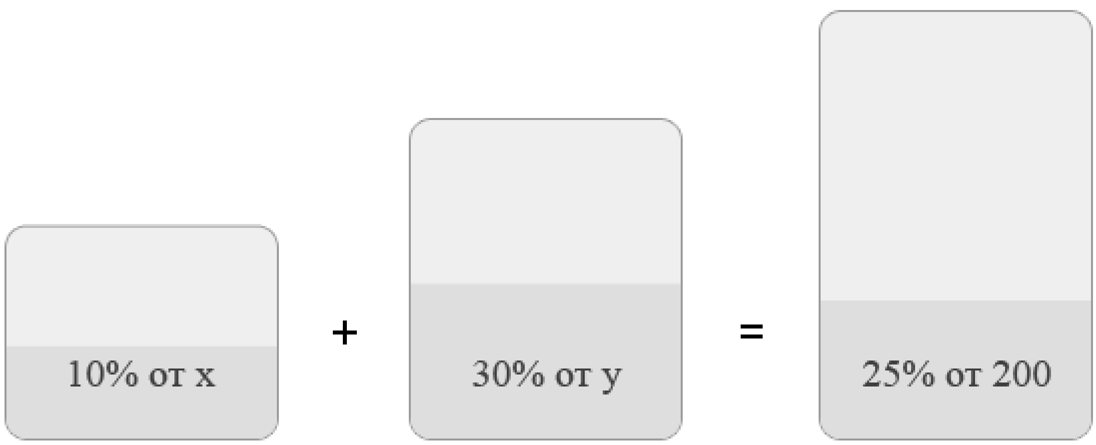
уравнение:

$$0,1x = 0,95 \cdot 20$$

Ответ: 190.

6.Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Пусть масса первого сплава равна x, а масса второго равна y. В результате получили сплав массой $x + y = 200$.



Запишем простую систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 0,1x+0,3y=0,25\cdot 200 \end{cases}$$

Первое уравнение — масса получившегося сплава, второе — масса никеля.

Решая, получим, что $x=50, y=150$.

Ответ: 100.

Однако задачи такого плана легче решаются нестандартными методами. Задачам подобного типа уделялось значительное внимание в старинных рукописях и «Арифметике» Леонтия Филипповича Магницкого. Данный способ позволяет получить правильный ответ за очень короткое время и с минимальными усилиями решение производится по правилам креста или квадрат Пирсона

Пусть требуется приготовить раствор определенной концентрации. В распоряжении имеется два раствора с более высокой и менее высокой концентрацией, чем нужно.

Если обозначить массу первого раствора через m_1, а второго – через m_2, то при смешивании общая масса смеси будет складываться из суммы этих масс.

Пусть массовая доля растворённого вещества в первом растворе – ω_1, во втором – ω_2, а в их смеси – ω_3. Тогда общая масса растворённого вещества в смеси будет складываться из масс растворённого вещества в исходных растворах:

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = \omega_3(m_1 + m_2),$$

$$m_1(\omega_1 - \omega_3) = m_2(\omega_3 - \omega_2),$$

Очевидно, что отношение массы первого раствора к массе второго раствора есть отношение разности массовых долей растворённого вещества в смеси и во втором растворе к разности соответствующих величин в первом растворе и в смеси.

При решении задач на растворы с разными концентрациями чаще всего применяют диагональную схему правила смешения или квадрат Пирсона.

При расчётах записывают одну над другой массовые доли растворённого вещества в исходных растворах, справа между ними – его массовую долю в растворе, который нужно приготовить, и вычитают по диагонали из большего меньшее значение.

Разности их вычитаний показывают массовые доли для первого и второго растворов, необходимые для приготовления нужного раствора.

$$\begin{array}{ccc} \omega_1 & & \omega_3 - \omega_2 \\ & \omega_3 & \\ \omega_2 & & \omega_1 - \omega_3 \end{array}$$

Например:

7.Имеется два сплава меди и олова. Один сплав содержит 72% меди, а другой 80% меди. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получилось 800 г сплава, содержащего 75% меди?

$$\begin{array}{ccc} 72 & & 80-75=5 \\ & 75 & \\ 80 & & 75-72=3 \end{array}$$

800:(5+3)=100г приходится на одну часть

для получения 800 г 75%-ного сплава нужно взять: 72%-ного сплава 100·5 = 500 г, а 80%-ного 100·3 = 300 г.

Ответ:500 г, 300 г.

8.Морская вода содержит 5% соли (по массе). Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составила 1,5%?

$$\begin{array}{cccc} 5\% & & 1{,}5\% & 30\text{ кг} \\ & 1{,}5\% & & \\ 0\% & & 3{,}5\% & x\text{ кг} \end{array}$$

$$\frac{30}{x} = \frac{1{,}5}{3{,}5};$$

$$x = \frac{30 \cdot 3{,}5}{1{,}5};$$

$$x = 7.$$

Ответ: 7 килограммов.

Задачи этого типа служат базовыми для успешного усвоения учащимися методов решения других, более сложных задач на проценты.

Еще один тип задач , который вызывает у учащихся трудности это задачи на нахождение среднего значения .

Например задачи на среднюю скорость- это целый класс задач на движение, которые включены в экзамен по математике. Задачи простые, важно понять и запомнить формулу:

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_{\text{общее}}}{t_{\text{общее}}}$$

Если участков пути было два, тогда

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}$$

Если три, то соответственно:

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3}$$

и так далее.

9.Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 61 км/ч, а вторую половину времени – со скоростью 87 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Чтобы найти среднюю скорость нужно весь путь разделить на всё время движения.

В задаче сказано о двух участках пути, тогда среднюю скорость будем искать по формуле:

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}$$

Пусть на весь путь автомобиль затратил t часов.

За первую половину времени со скоростью 61 км/ч автомобиль прошёл 0,5·t·61 километров, а за вторую половину времени 0,5·t·87 километров, тогда:

$$V_{\text{средняя}} = \frac{61 \cdot 0{,}5t + 87 \cdot 0{,}5t}{t} = \frac{0{,}5t(61 + 87)}{t} = 0{,}5 \cdot 148 = 74\text{км/ч}$$

Ответ: 74

10.Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, вторую треть – со скоростью 60 км/ч, а последнюю – со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Чтобы найти среднюю скорость нужно весь путь разделить на всё время движения. В задаче сказано о трёх участках пути. Будем использовать по формулу:

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3}$$

Обозначим весь пусть S. Тогда первую треть пути автомобиль ехал:

$$\frac{S}{3} : 90 \text{ часов}$$

Вторую треть пути автомобиль ехал:

$$\frac{S}{3} : 60 \text{ часов}$$

Последнюю треть пути автомобиль ехал:

$$\frac{S}{3} : 45 \text{ часов}$$

Таким образом

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S}{\frac{\frac{1}{3}S}{90} + \frac{\frac{1}{3}S}{60} + \frac{\frac{1}{3}S}{45}} = \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{90} + \frac{1}{60} + \frac{1}{45}\right)} = \frac{3}{\frac{2}{180} + \frac{3}{180} + \frac{4}{180}} =$$

$$= \frac{3}{\frac{9}{180}} = \frac{3\cdot 180}{9} = 60\text{км/ч}$$

Ответ: 60км/ч.

11.Первый час автомобиль ехал со скоростью 100 км/ч, следующие два часа – со скоростью 90 км/ч, а затем два часа – со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Чтобы найти среднюю скорость нужно весь путь разделить на всё время движения. В задаче сказано о трёх участках пути.

среднюю скорость будем искать по формуле:

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3}$$

Исходя из условия мы можем определить протяжённость каждого участка:

Первый участок пути составил 1·100 = 100 километров.

Второй участок пути составил 2·90 = 180 километров.

Третий участок пути составил 2·80 = 160 километров.

Находим скорость:

$$V_{\text{средняя}} = \frac{100 + 180 + 160}{1 + 2 + 2} = \frac{440}{5} = 88\text{ км/ч}$$

Ответ: 88 км/ч

Единственная небольшая сложность в подобных задачах – это когда отрезки пути или время заданы неявно. в этом случае их необходимо найти используя основную формулу движения:

$$\boxed{S = v \cdot t}$$

А затем полученные данные необходимо подставить в формулу средней скорости.

Задачи с развернутым ответом.

К решению этих задач приступают не многие учащиеся. Примерно 26 % учащихся справляются с заданием.

Решение задач – это сложная работа. Обучение решению текстовых задач - это специально организованное взаимодействие учителя и учащихся, целью которого является формирование у учащихся умения решать и понимать задачи.

В задачах на движение используются обычно формулы, выражающие законы равномерного движения: **S=V·t** , где **S**- пройденное расстояние, **V**- скорость равномерного движения, **t** - время движения.
При составлении уравнений в таких задачах часто бывает удобно прибегнуть к геометрической иллюстрации процесса движения: путь изображается в виде отрезка прямой, место встречи движущихся с разных сторон объектов точкой на отрезке и т.д.
Часто для усложнения задачи её условие формулируется в различных единицах измерения(метры, километры, часы, минуты и т.д.). В этом случае при выписывании уравнений необходимо пересчитывать все данные задачи в одинаковых единицах измерения.
Между величинами, описывающими равномерное движение и величинами, характеризующими процесс работы, имеется полная аналогия.

Рассмотрим еще примеры решения задач из Открытого банка заданий для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ по математике:

12. Маша спустилась по движущемуся вниз эскалатору за 36 секунд. По неподвижному эскалатору с той же скоростью относительного него она спустится за 1 минуту 3 секунды. За сколько секунд она спустится, стоя на ступеньках движущегося эскалатора?

Основная проблема данной задачи — неизвестно общее расстояние, т.е. длина эскалатора. В некотором смысле эта задача очень похожа на движение по воде: при спуске скорости эскалатора и человека складываются. Однако, в отличие от задач на движение, здесь недостаточно просто решить систему — требуется еще и понять, какую именно величину записывать в ответ.

Пусть x – скорость Маши ,а y- скорость эскалатора

	расстояние	скорость	время
Бежит по эскалатору y не равно 0	1	x+y	1/(x+y)=36
Бежит по эскалатору У=0	1	x	1/x=63
Стоит на эскалаторе	1	y	1/y

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1/(x+y)=36 \\ 1/x=63 \end{cases}$$

Решая эту систему находим y ,а затем 1/y

Ответ : 84сек.

Еще одна задача про эскалатор

13.Вовочка сбежал вниз по движущемуся вниз эскалатору и насчитал 45 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 105 ступенек. Сколько ступенек насчитал бы Вовочка, спустившись по неподвижному эскалатору?

	расстояние	скорость	время
Бежит вниз по эскалатору у не равно 0	1	x+y	1/(x+y)=45
Бежит вверх по эскалатору у не равно 0	1	x-y	1/(x-y)=105
Стоя ,спускаясь вниз	1	x	1/y

В таких задачах 1 ступенька – 1 секунда движения , относительно эскалатора Вовочка движется с одной и той же скоростью, это значит ,куда бы он не двигался каждую ступеньку эскалатора он пробегает за одно и то же время ,чему равно это время это не важно, потому что итоговое расстояние ему нужно пробежать одно и то же.

Получаем систему

$$\begin{cases} 1/(x+y)=45 \\ 1/(x-y)=105 \end{cases}$$

Ответ: 63 ступеньки.

Данная задача очень похожа на задачи про движение по воде. Здесь так же есть две скорости: скорость Вовочки и скорость движения самого эскалатора. Так же, как и в задачах про воду, при движении вниз скорости складываются, а вверх — вычитаются. И даже таблица заполняется примерно в такой же последовательности. Поэтому эскалатор, можно заменить на движение по воде — с точки зрения математики это одно и тоже, поэтому ответ получится одинаковым.

14.Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 75 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего параллельно путям со скоростью 3 км/ч навстречу поезду, за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Первое на что надо обратить внимание учащихся , это то, что дано время 30 секунд, которые необходимо перевести в часы. Длина поезда это ни что иное, как расстояние ,которое считается по формуле (*V1+V2)*t*

*(75+3)**30/3600=0,65км=650 м

Ответ :650м

Если пешеход идет параллельно путям в том же направлении что и едет поезд , то в формуле будет разность скоростей.