ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180101

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

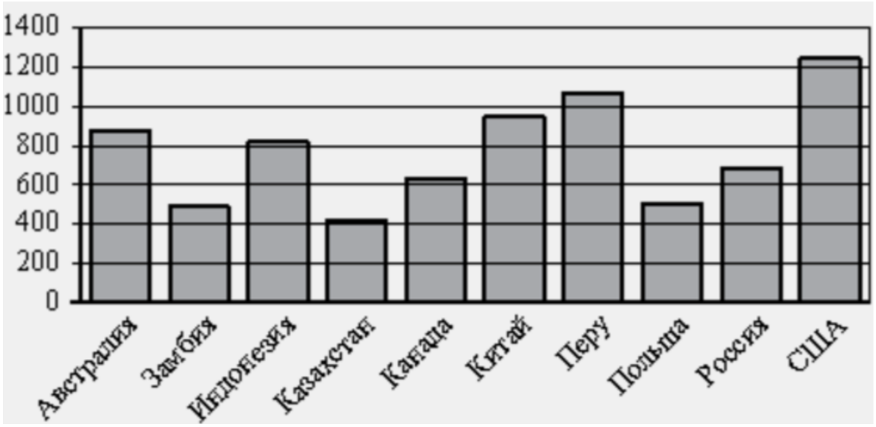
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Теплоход рассчитан на 600 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

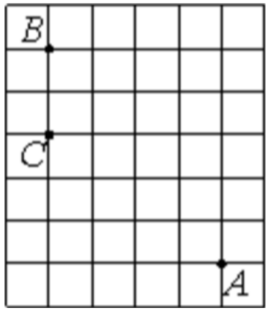
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место – Казахстан. Какое место занимала Канада?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.



Ответ: ____________________________.

4 Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится 3 сумки со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

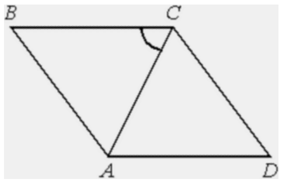
Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-6} = 81.$$

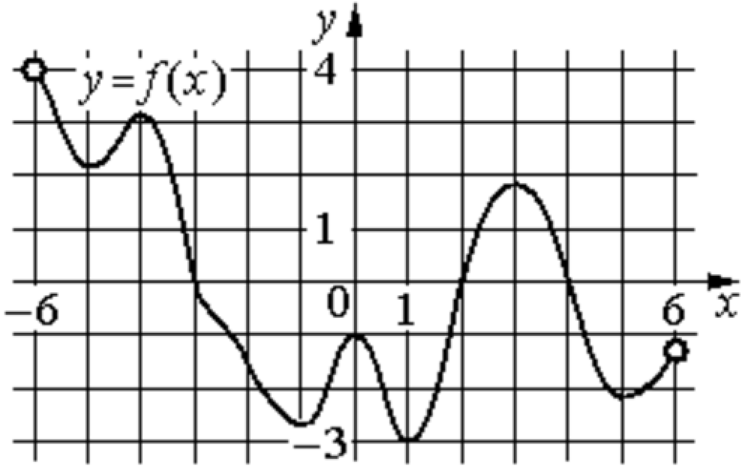
Ответ: ____________________________.

6 В ромбе $ABCD$ угол CDA равен $78°$. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



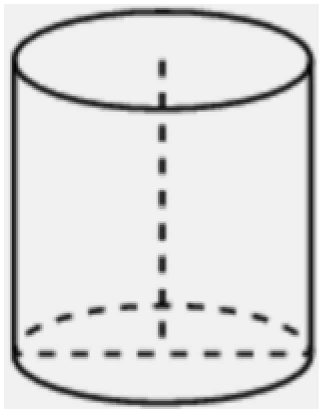
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f\,`(x) = 0$ на отрезке $[-4{,}5; 2{,}5]$.



Ответ: ____________________________.

8 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π, а диаметр основания равен 6. Найдите высоту цилиндра.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180101

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_2 729}{\log_2 9}.$$

Ответ: ___________________________.

10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 4500$ км/ч^2. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l – пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 90 км/ч.

Ответ: ___________________________.

11 Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 10%. На сколько процентов одиннадцать таких же рубашек дороже куртки?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^{x} + 4$ на отрезке $[-1; 2]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$12^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2\cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \le 3^x + 5.$$

16 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q – середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.

б) Найдите AD, если $\angle BAD = 60°$ и $BC = 2$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180101

17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r **— целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(6\sin x - 2 - 3a)\cdot\sin x + 3{,}5\cos 2x + 0{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

19 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180101

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	9
2	7
3	4
4	0,97
5	0,4
6	51
7	4
8	2
9	3
10	0,9
11	10
12	0
13	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n \in Z.$ б) $2{,}25\pi;\ 3{,}25\pi$
14	$2{,}4\sqrt{5}$
15	$(-\infty; 1] \cup (\log_3 5\,; 2)$
16	$8\sqrt{3}+14$
17	7
18	$(-\infty; -0{,}6] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$
19	а) 44, б) отрицательных, в) 17

© 2018 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение
$12^{\sin x} = 3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

.

Решение:
а)

Умножение степеней с одинаковым показателем
$a^n\cdot b^n = (ab)^n$

$3^{\sin x}\cdot 4^{\sin x} = 3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}$
$3^{\sin x}\cdot 4^{\sin x} - 3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x} = 0$
$3^{\sin x}\cdot(4^{\sin x} - 4^{\cos x}) = 0$

$3^{\sin x} = 0$ Нет решений, т.к. число в степени	$4^{\sin x} - 4^{\cos x} = 0$ $4^{\sin x} = 4^{\cos x}$

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

всегда положительно	$\sin x = \cos x \quad \vert : \cos x$ $\operatorname{tg} x = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi = 1{,}25\pi \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = 2{,}25\pi \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{4} + 3\pi = 3{,}25\pi \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Если $n = 4$, то $x = \frac{\pi}{4} + 4\pi = 4{,}25\pi \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

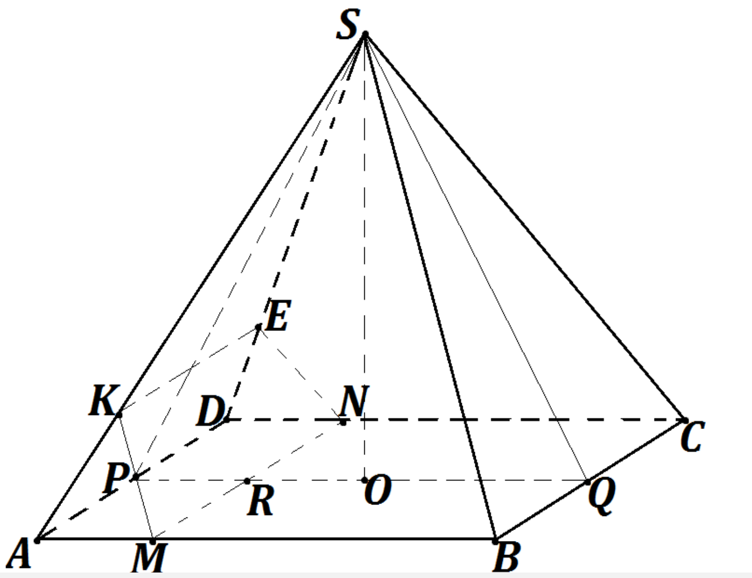
Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$. б) $2{,}25\pi$; $3{,}25\pi$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

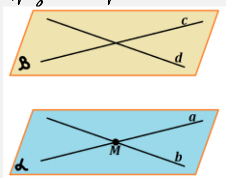
14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём
$AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.
.

Решение:
а)



Признак параллельности двух плоскостей



Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

$MN \parallel BC$ (т.к. $AM = 4$ и $DN = 4$)

Осталось доказать, что $MK \parallel SB$

Пусть
SO – высота пирамиды
Тогда
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)
$AO = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180101

$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2 + 4^2} = 12$ (по теореме Пифагора)

$\triangle AKM \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

$\left(\begin{matrix} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AK}{SA} \\ \angle MAK = \angle BAS \end{matrix}\right)$

$=> MK \parallel SB$

$=> (MNK) \parallel (SBC)$

■

б)

Пусть P — середина AD

Пусть R — середина MN

Пусть Q — середина BC

$(SPQ) \perp BC$

Расстояние от точки M до (SBC) равно расстоянию от точки R до (SBC), потому что M и R лежат на одной прямой

Итак, расстояние от точки R до прямой SQ — искомое

Рассмотрим $\triangle PQS$ — равнобедренный

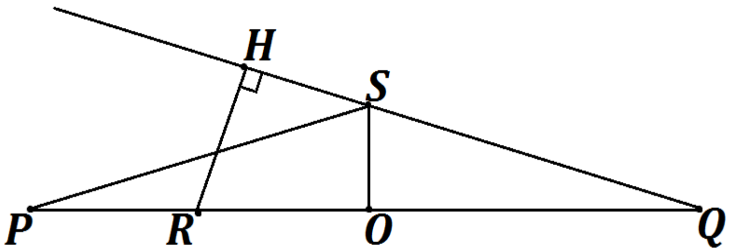
$SQ = SP = \sqrt{SO^2 + OQ^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ (по теореме Пифагора)

$PQ = AB = 16$

Воспользуемся теоремой косинусов, чтобы узнать тупоугольным или остроугольным является $\triangle PQS$:

$\cos\angle PSQ = \dfrac{SP^2 + SQ^2 - PQ^2}{2 \cdot SP \cdot SQ} = \dfrac{\sqrt{80}^2 + \sqrt{80}^2 - 16^2}{2 \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{80}}$

$\cos\angle PSQ < 0 \ => \triangle PQS$ — тупоугольный:



RH — искомое расстояние

$RQ = 12$

$\sin\angle OQS = \dfrac{SO}{SQ} = \dfrac{4}{4\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\angle HQR = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{HR}{RQ}$

$\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{HR}{12}$

$HR = \dfrac{12}{\sqrt{5}} = \dfrac{12\sqrt{5}}{5} = 2{,}4\sqrt{5}$

Ответ: б) $2{,}4\sqrt{5}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \le 3^x + 5.$$

.

Решение:

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \le t + 5$$

Нужно сократить $t - 5$

$(t - 5)(t - 1) = t^2 - 6t + 5$

=>

$$\frac{t^2 - 6t + 5 - 1}{t - 5} + \frac{6t - 54 + 3}{t - 9} \le t + 5$$

$$\frac{(t-5)(t-1)-1}{t-5}+\frac{6t-54+3}{t-9}\le t+5$$

$$\frac{(t-5)(t-1)}{t-5}-\frac{1}{t-5}+\frac{6t-54}{t-9}+\frac{3}{t-9}\le t+5$$

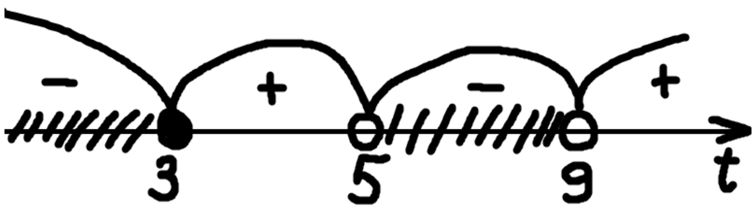
$$t-1-\frac{1}{t-5}+6+\frac{3}{t-9}\le t+5$$

$$\frac{3}{t-9}-\frac{1}{t-5}\le 0$$

$$\frac{3t-15-t+9}{(t-9)(t-5)}\le 0$$

$$\frac{2t-6}{(t-9)(t-5)}\le 0$$

$2t-6=0$ $t=3$	$(t-9)(t-5)\ne 0$ $t\ne 9$ $t\ne 5$



$t\le 3$ $3^x\le 3$ $3^x\le 3^1$ $x\le 1$	$5<t<9$ $5<3^x<9$ $3^{\log_3 5}<3^x<3^2$ $\log_3 5<x<2$

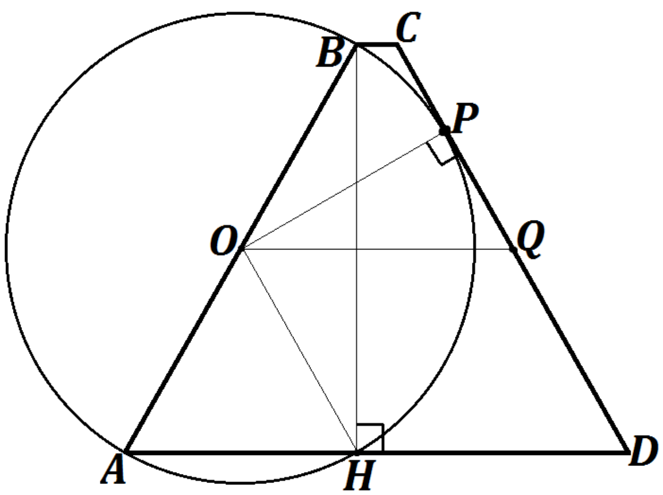
Ответ: $(-\infty;1]\cup(\log_3 5\,;2)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q – середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.
б) Найдите AD, если $\angle BAD=60°$ и $BC=2$.

Решение:
а)



Признаки параллелограмма

Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

QO – средняя линия трапеции $ABCD$
(т.к. O – середина AB и Q – середина CD)
=>
$QO \parallel AD$
=>
$QO \parallel DH$

Рассмотрим $\triangle OAH$
$OA = OH$
=>
$\angle OAH = \angle OHA$

$\angle OAH = \angle ADC$
(т.к. трапеция равнобедренная)
=>
$\angle OHA = \angle ADC$ – соотвественные
=>
$OH \parallel DQ$
=>
$DQOH$ – параллелограмм
■

б)
BH – высота трапеции (т.к. $\angle AHB$ – вписанный и опирается на диаметр)

Пусть
R – радиус окружности
$AH = x$
Тогда
$DH = 2 + x$

Выразим AH и DH другим способом:

Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный
$\angle ABH = 180 - \angle AHB - \angle BAH = 180 - 90 - 60 = 30°$
$AH = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2R = R$

Пусть
P – точка касания CD и окружности
$\angle OPQ = 90°$
(по свойству касательной)

Рассмотрим $\triangle OPQ$ – прямоугольный
$\angle PQO = \angle ADC = 60°$
(т.к. это соответственные углы при параллельных прямых)
$\sin \angle PQO = \frac{OP}{OQ}$
$\sin 60° = \frac{R}{OQ}$
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{OQ}$
$OQ = \frac{2R}{\sqrt{3}}$
=>
$DH = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Получаем систему двух уравнений, приравняв значения AH и DH, найденные разными способами :
$$\begin{cases} x = R \\ 2 + x = \frac{2R}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$2 + x = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

$2\sqrt{3} + \sqrt{3}x = 2x$
$2x - \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180101

$x(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

$x = \dfrac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \quad \Big| \cdot (2+\sqrt{3})$

$x = \dfrac{2\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$x = 2\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}+6$

$AD = AH + DH = x + 2 + x = 2x + 2$

$AD = 2\cdot(4\sqrt{3}+6) + 2 = 8\sqrt{3} + 12 + 2 = 8\sqrt{3} + 14$

Ответ: $8\sqrt{3} + 14$

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение:
Переведём миллионы в тысячи:
1 млн это 1000 тыс.
1,2 млн это 1200 тыс.

Пусть клиент вносил платежи 7 числа каждого месяца

Кредит на 6 месяцев, поэтому будет 6 платежей:
x_1 — первый платёж
x_2 — второй платёж
…
x_6 — шестой платёж

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
15.01	1000
01.02	$1000\cdot\left(1+\dfrac{r}{100}\right) = 1000 + 10r$
07.02	$1000 + 10r - x_1$
15.02	600
01.03	$600\cdot\left(1+\dfrac{r}{100}\right) = 600 + 6r$
07.03	$600 + 6r - x_2$

15.03	400
01.04	$400 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 400 + 4r$
07.04	$400 + 4r - x_3$
15.04	300
01.05	$300 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 300 + 3r$
07.05	$300 + 3r - x_4$
15.05	200
01.06	$200 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 200 + 2r$
07.06	$200 + 2r - x_5$
15.06	100
01.07	$100 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 100 + r$
07.07	$100 + r - x_6$
15.07	0

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1000 + 10r - x_1 = 600 \\ 600 + 6r - x_2 = 400 \\ 400 + 4r - x_3 = 300 \\ 300 + 3r - x_4 = 200 \\ 200 + 2r - x_5 = 100 \\ 100 + r - x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1000 + 10r - 600 = x_1 \\ 600 + 6r - 400 = x_2 \\ 400 + 4r - 300 = x_3 \\ 300 + 3r - 200 = x_4 \\ 200 + 2r - 100 = x_5 \\ 100 + r = x_6 \end{cases}$$

Сложим левые и правые участи уравнений:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000 + 26r$

Общая сумма выплат должна быть меньше 1,2 млн рублей (по условию)
=>
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 < 1200$ тыс.

$1000 + 26r < 1200$
$26r < 200$
$r < \frac{200}{26}$
$r < \frac{100}{13}$
$r < 7\frac{9}{13}$

Требуется найти наибольшее подходящее целое r
=>
$r = 7$

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180101

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$(6\sin x - 2 - 3a)\cdot\sin x + 3{,}5\cos 2x + 0{,}5 = 0$
имеет хотя бы один корень.

Решение:

Косинус двойного угла
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

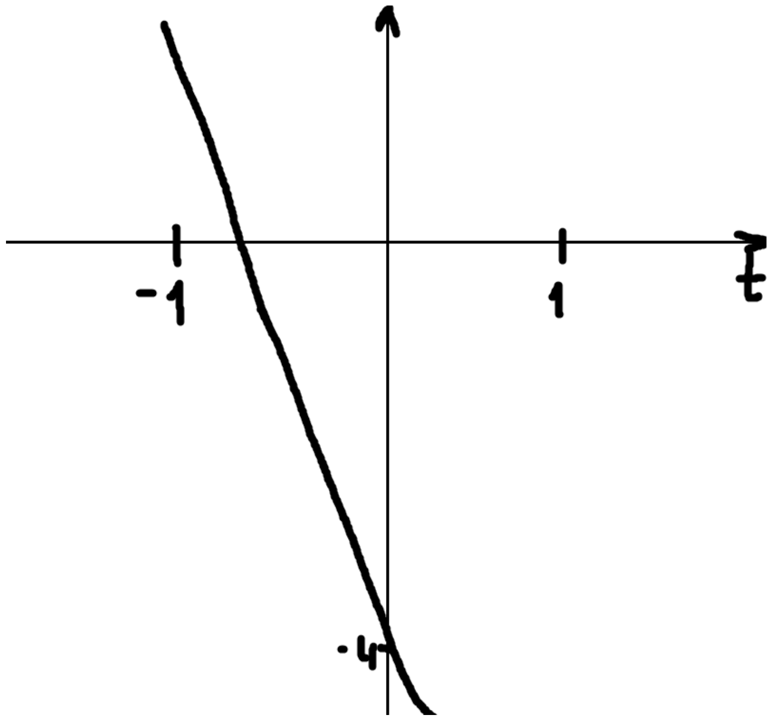
$6\sin^2 x - (2+3a)\cdot\sin x + 3{,}5 - 7\sin^2 x + 0{,}5 = 0$
$-\sin^2 x - (2+3a)\cdot\sin x + 4 = 0 \quad \Big|\cdot(-1)$
$\sin^2 x + (2+3a)\cdot\sin x - 4 = 0$

Пусть $\sin x = t$
$-1 \le \sin x \le 1$
=>
$-1 \le t \le 1$

Перефразируем вопрос:
Найдём все значения a, при каждом из которых уравнение $t^2 + (2+3a)\cdot t - 4 = 0$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $-1 \le t \le 1$

Рассмотрим квадратичную функцию:
$f(t) = t^2 + (2+3a)\cdot t - 4$ – парабола (ветви вверх)
Проходит через точку $(0; -4)$

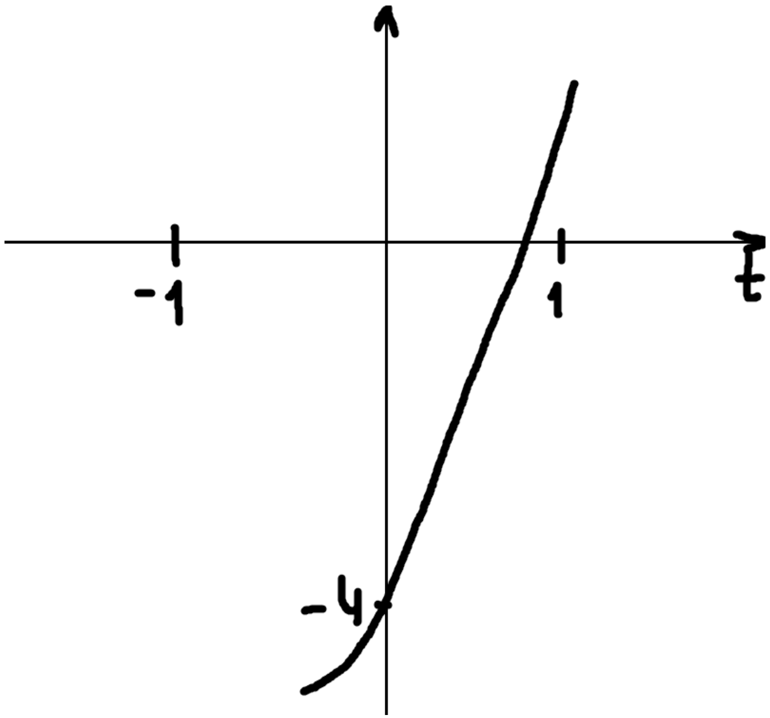
1 случай, при котором будет хотя бы одно решение, попадающее в отрезок $[-1; 1]$
(когда левая ветка параболы проходит через $t = -1$ или выше этой точки)



$f(-1) \ge 0$
$1 - 2 - 3a - 4 \ge 0$
$3a \le -5$
$a \le -\dfrac{5}{3}$

2 случай, при котором будет хотя бы одно решение, попадающее в отрезок $[-1; 1]$
(когда правая ветка параболы проходит через $t = 1$ или выше этой точки)

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180101



$f(1) \geq 0$
$1 + 2 + 3a - 4 \geq 0$
$3a \geq 1$
$a \geq \frac{1}{3}$

3 случай (когда парабола стартует из точки $(0; -4)$)
Не подходит, т.к. наша парабола имеет коэффициент $a = 1$
=>
такая парабола пересечёт ось Ox в точках $x = \pm 2$, т.е. решений на нужном нам отрезке не будет

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение:
а)
На доске может быть написано:
41 или 42 или 43 или 44 или 45 или 46 или 47 чисел

Пусть
$ч_1, ч_2, \ldots, ч_n$ – написанные на доске числа
$п_1, п_2, \ldots, п_n$ – написанные на доске положительные числа
$о_1, о_2, \ldots, о_n$ – написанные на доске отрицательные числа

Допустим на доске написано 41 число:
20 положительных
20 отрицательных
1 ноль

Тогда
$$\frac{ч_1 + ч_2 + \cdots + ч_{41}}{41} = -3$$
=>
$$ч_1 + ч_2 + \cdots + ч_{41} = -123$$

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$$\frac{п_1 + п_2 + \cdots + п_{20}}{20} = 4$$
=>
$$п_1 + п_2 + \cdots + п_{20} = 80$$

$$\frac{о_1 + о_2 + \cdots + о_{20}}{20} = -8$$
=>
$$о_1 + о_2 + \cdots + о_{20} = -160$$

Сумма всех положительных + сумма всех отрицательных должны равняться сумме всех чисел

Очевидно, что, добавляя одно положительное сумма увеличивается на 4, а добавляя одно отрицательное сумма уменьшается на 8, т.е. шаг равен 4
=>
сумма чисел также должна быть кратна 4
=>
количество чисел на доске также должно быть кратно 4
=>
на доске 44 числа

б)
На доске написано 44 числа

$$\frac{ч_1 + ч_2 + \cdots + ч_{44}}{44} = -3$$
=>
$$ч_1 + ч_2 + \cdots + ч_{44} = -132$$

Допустим среди 44 чисел:
20 положительных
20 отрицательных
4 нуля

$$\frac{п_1 + п_2 + \cdots + п_{20}}{20} = 4$$
=>
$$п_1 + п_2 + \cdots + п_{20} = 80$$

$$\frac{о_1 + о_2 + \cdots + о_{20}}{20} = -8$$
=>
$$о_1 + о_2 + \cdots + о_{20} = -160$$
=>
Текущая сумма -80 (нужно изменить сумму на -52)

Допустим среди 44 чисел:
15 положительных
25 отрицательных
4 нуля

$$\frac{п_1 + п_2 + \cdots + п_{15}}{15} = 4$$
=>
$$п_1 + п_2 + \cdots + п_{15} = 60$$

$$\frac{о_1 + о_2 + \cdots + о_{25}}{25} = -8$$
=>
$$о_1 + о_2 + \cdots + о_{25} = -200$$
=>
Текущая сумма -140 (нужно изменить сумму на +8)

Допустим среди 44 чисел:
17 положительных
25 отрицательных
2 нуля

$$\frac{п_1 + п_2 + \cdots + п_{17}}{17} = 4$$
=>
$$п_1 + п_2 + \cdots + п_{17} = 68$$

$$\frac{о_1 + о_2 + \cdots + о_{25}}{25} = -8$$
=>
$$о_1 + о_2 + \cdots + о_{25} = -200$$
=>
Текущая сумма -132 (подходит)

Запишем все возможные комбинации:
1
17 положительных

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180101

25 отрицательных
2 нуля
2
15 положительных
24 отрицательных
5 нулей
3
13 положительных
23 отрицательных
8 нулей
4
11 положительных
22 отрицательных
11 нулей
5
9 положительных
21 отрицательных
14 нулей
6
7 положительных
20 отрицательных
17 нулей
7
5 положительных
19 отрицательных
20 нулей
8
3 положительных
18 отрицательных
23 нулей
9
1 положительных
17 отрицательных
26 нулей

В любом варианте больше отрицательных
Наибольшее количество положительных в варианте №1

Ответ: а) 44, б) отрицательных, в) 17

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2018 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях