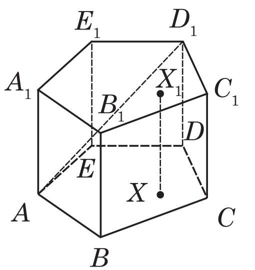
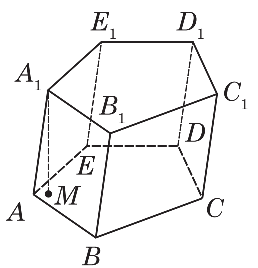
3. МНОГОГРАННИКИ

Призма





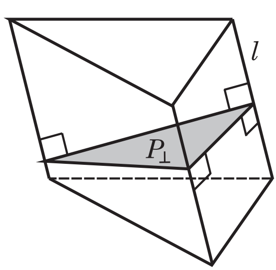
Призма — многогранник, состоящий из плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

$ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основания призмы;

AA_1, BB_1, CC_1, ... — боковые ребра;

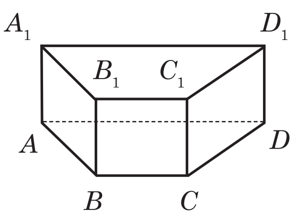
ABB_1A_1, BB_1C_1C, ... — боковые грани;

AD_1 — диагональ призмы (отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани; $A_1M \perp (ABC)$, $A_1M = H$ — высота)

Свойства	Формулы
1. Основания призмы равны. 2. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях. 3. Боковые ребра параллельны и равны. 4. Боковые грани — параллелограммы	 **Боковая поверхность** — сумма площадей боковых граней или $S_{бок} = P_\perp \cdot l$,

Окончание таблицы

	где l — длина бокового ребра; $P_{\perp}$ — сечение плоскостью, перпендикулярной к её боковым граням
	Полная поверхность — сумма боковой поверхности и площадей оснований: $S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$ **Объём призмы** $V = S_{\text{осн}} \cdot H_{\text{призмы}}$

Прямая призма	
	Призма называется **прямой**, если её боковые ребра перпендикулярны основаниям. $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, …
Свойства	**Формулы**
1. Высота равна боковому ребру. 2. Боковые грани — прямоугольники	**Боковая поверхность:** $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H,$ где $P_{\text{осн}}$ — периметр основания; $H = AA_1$ — высота. **Полная поверхность:** $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$ **Объём:** $V = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\text{осн}} \cdot AA_1$

Задача.

$ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма,
ΔABC, $\angle C = 90°$, $BC = 5$ см,
$AC = 12$ см, $S_{\text{полн}} = 270$ см^2.

Найти: AA_1.

Решение.
1. По теореме Пифагора:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$;
$AB = 13$ (см).

2. $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$;

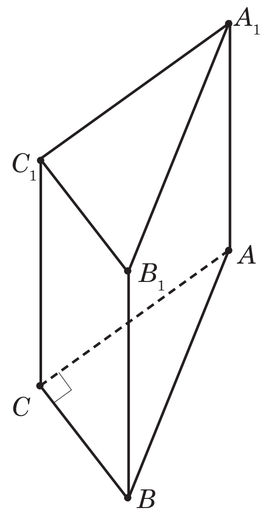
$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \ (\text{см}^2);$$

$S_{\text{бок}} = S_{\text{полн}} - 2S_{\text{осн}} = 270 - 2 \cdot 30 =$
$= 210$ (см^2);
$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1$;

$$AA_1 = \frac{S_{\text{бок}}}{P_{\text{осн}}} = \frac{210}{5+12+13} = 7.$$

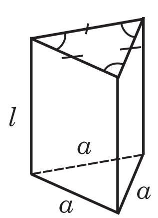
$AA_1 = 7$ (см).

Ответ: 7 см.

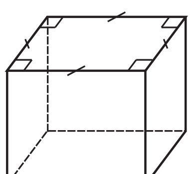


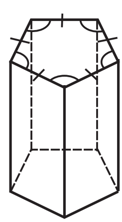
Правильная призма

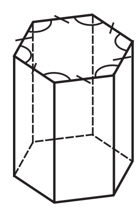
Прямая призма называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники



треугольная

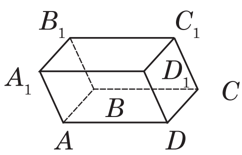
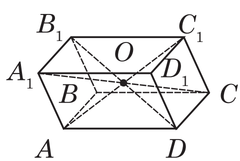
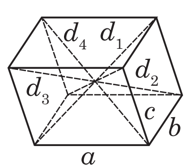

четырёх-
угольная


пятиугольная


шести-
угольная

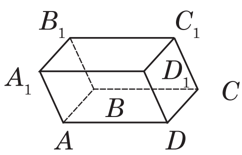
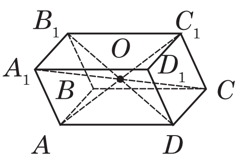
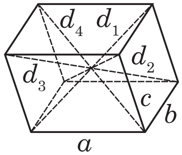
Площадь боковой поверхности правильной призмы	
$S_{бок} = S_{гр} \cdot n = aln$	$S_{гр}$ — площадь грани; n — количество граней; a — сторона основания; l — длина бокового ребра

Параллелепипед

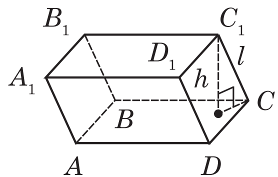
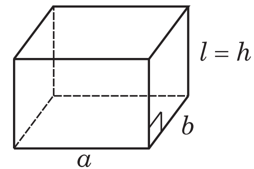
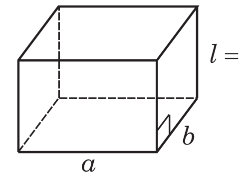
	**Параллелепипед** — призма, в основании которой лежит параллелограмм
	**Свойства**: 1. Все грани — параллелограммы. 2. Противолежащие грани параллельны и равны. 3. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. O — середина A_1C, BD_1, AC_1 и B_1D. 4. Точка O — центр симметрии параллелепипеда
	Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его рёбер. $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$. Существует три вида параллелепипедов. 1. Прямой — все боковые грани перпендикулярны плоскостям оснований, основания — параллелограммы. 2. Прямоугольный — все боковые грани и основания — прямоугольники. 3. Наклонный — боковые грани не перпендикулярны основаниям, все шесть граней — параллелограммы

Площадь боковой поверхности правильной призмы	
$S_{бок} = S_{гр} \cdot n = aln$	$S_{гр}$ — площадь грани; n — количество граней; a — сторона основания; l — длина бокового ребра

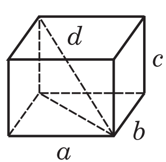
Параллелепипед

	**Параллелепипед** — призма, в основании которой лежит параллелограмм
	**Свойства**: 1. Все грани — параллелограммы. 2. Противолежащие грани параллельны и равны. 3. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. O — середина A_1C, BD_1, AC_1 и B_1D. 4. Точка O — центр симметрии параллелепипеда
	Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его рёбер. $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$. Существует три вида параллелепипедов. 1. Прямой — все боковые грани перпендикулярны плоскостям оснований, основания — параллелограммы. 2. Прямоугольный — все боковые грани и основания — прямоугольники. 3. Наклонный — боковые грани не перпендикулярны основаниям, все шесть граней — параллелограммы

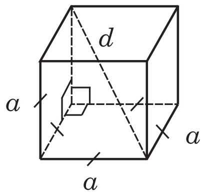
Виды параллелепипедов

Наклонный	Прямой	Прямоугольный
		
1. Боковые ребра **не перпендикулярны** плоскостям основания. 2. Высота **не совпадает** с боковым ребром. 3. Все боковые грани — **параллелограммы**	1. Боковые ребра **перпендикулярны** основаниям. 2. Боковое ребро **совпадает** с высотой. 3. В основаниях — **параллелограммы**. 4. Все боковые грани — **прямоугольники**	1. Боковые ребра **перпендикулярны** основаниям. 2. Боковое ребро **совпадает** с высотой. 3. Оба основания и боковые грани — **прямоугольники**
Площадь боковой поверхности параллелепипеда		
$S_{\text{бок}} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B})$	$S_{\text{бок}} = 2(a+b)\cdot l$	$S_{\text{бок}} = 2(a+b)\cdot l$

Окончание таблицы

Наклонный	**Прямой**	**Прямоугольный**
Площадь полной поверхности параллелепипеда		
$S_{\text{полн}} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B} + S_{ABCD})$	$S_{\text{полн}} = 2(a+b)\cdot l + 2S_{\text{осн}}$	$S_{\text{полн}} = 2(ab+al+bl)$
Объем параллелепипеда		
1. Произведение площади основания $S_{\text{осн}}$ на высоту h: $V = S_{\text{осн}} \cdot h.$ 2. Произведение площади перпендикулярного сечения $S_{\wedge}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{\wedge} \cdot l$	Произведение площади основания $S_{\text{осн}}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{\text{осн}} \cdot l$	Произведение трёх измерений прямоугольного параллелепипеда: $V = abl$
	В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$	

Куб



Куб — прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны.

Свойство
Все боковые грани — квадраты.

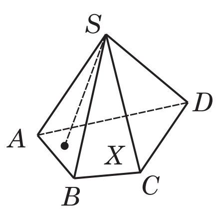
Формулы

1. Диагональ: $d = a\sqrt{3}$.

2. Площадь: $S_{\text{бок}} = 4a^2$; $S_{\text{полн}} = 6a^2$.

3. Объём: $V = a^3$ или $V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$

Пирамида



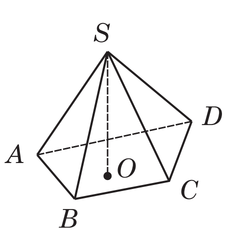
Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с вершинами основания

$ABCD$ — основание пирамиды;

S — вершина пирамиды;

SA, SB, SC, SD — боковые рёбра;

ΔASB, ΔBSC, ΔCSD, ΔASD — боковые грани



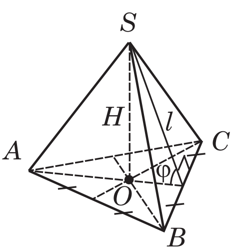
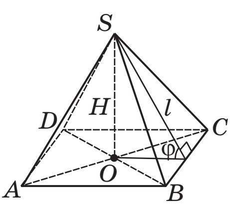
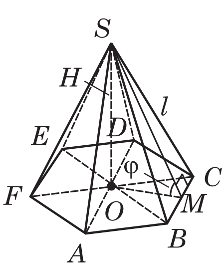
Высота пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.
SO — высота пирамиды;
$SO = H$ $(SO \perp (ABCD))$.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

$$S_{\text{бок. пир.}} = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta CSD} + S_{\Delta ASD}$$
$$S_{\text{полн. пир.}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

Правильная пирамида

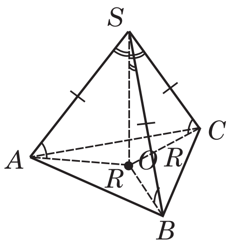
Пирамида называется **правильной**, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника

<table>
<tr><th colspan="2">Некоторые виды правильных пирамид</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Треугольная
ΔABC — правильный;
O — точка пересечения медиан (высот и биссектрис), центр вписанной и описанной окружностей</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Четырёхугольная
$ABCD$ — квадрат;
O — точка пересечения диагоналей</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Шестиугольная
$ABCDEF$ — правильный шестиугольник;
O — точка пересечения диагоналей AD, BE и FC</td></tr>
<tr><td colspan="2">SO — высота правильной пирамиды ($SO \perp (ABC)$;
O — центр основания).
SM — апофема правильной пирамиды
(высота боковой грани, $SM \perp BC$)</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><th>Свойства</th><th>Формулы</th></tr>
<tr><td>1. Боковые ребра равны, одинаково наклонены к плоскости основания.
$SA = SB = SC = \ldots;$
$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \ldots$
2. Боковые грани — равные друг другу равнобедренные треугольники.
$\Delta ASB = \Delta BSC = \ldots$
Апофемы равны и наклонены к плоскости основания под одним углом</td><td>Площадь боковой поверхности:
$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot SM = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l,$
где l — апофема
или
$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi},$
где φ — угол наклона боковой грани к плоскости основания, $\varphi = \angle SMO$.
Площадь полной поверхности:
$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$
Объём:
$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H,$
$H = SO,$
H — высота пирамиды</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задача.
Найти:
площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если все её ребра равны a.
Решение.
$S_{полн.} = S_{грани} \cdot 4 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = a^2\sqrt{3};\ S_{полн.} = a^2\sqrt{3}.$
Ответ: $S_{полн.} = a^2\sqrt{3}.$</td></tr>
</table>

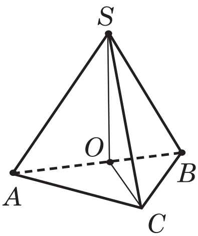
Положение высоты в некоторых видах пирамид

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>1. Если в пирамиде:
а) все боковые рёбра равны
или
б) все боковые рёбра составляют одинаковые углы с плоскостью основания
или
в) боковые рёбра составляют одинаковые углы с высотой пирамиды,
то высота проходит через центр окружности, описанной около основания</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Примечание: высота пирамиды может располагаться внутри пирамиды, на боковой грани или вне пирамиды, в зависимости от размещения центра описанной окружности. Около такой пирамиды можно описать конус</td>
</tr>
</table>

Задача.

Основание пирамиды — треугольник со сторонами 3, 4 и 5 см.
Все боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45°.

Найти: объём пирамиды.



Решение.

1. Все боковые рёбра наклонены под одним углом $\Rightarrow$ т. O — центр окружности, описанной около ΔABC.

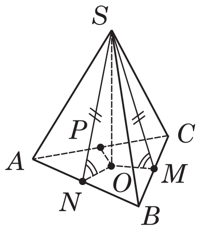
2. ΔABC — прямоугольный, т. к. $5^2 = 3^2 + 4^2$.
В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности — совпадает с серединой гипотенузы.

3. $AC = 4$ см; $BC = 3$ см; $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (см).

Продолжение таблицы

4. ΔSOC — равнобедренный прямоугольный треугольник ($\angle SOC = 90°$, $\angle OSC = \angle OCS = 45°$). $SO = OC = AO = OB =$ $= AB : 2 = 5 : 2 = 2{,}5$ (см); $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2{,}5 = 5$ (см^3).

Ответ: 5 см^3.



2. Если в пирамиде:

а) все **двугранные углы** при основании равны

или

б) все **высоты боковых граней** равны

или

в) высота составляет одинаковые углы с плоскостями боковых граней,

то **высота проходит через центр окружности, вписанной в основание**

В такую пирамиду можно вписать конус.
Площадь боковой поверхности пирамиды, в которой все **двугранные углы при основании равны α**, можно вычислять по формуле: $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$

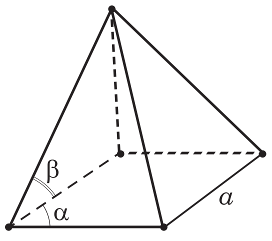
Задача.

Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. Боковые грани наклонены к основанию под углом β.

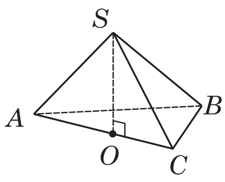
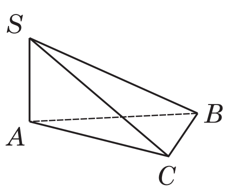
Найти: площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

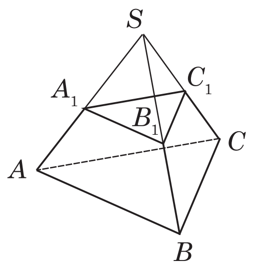
$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\beta} = \frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}.$$



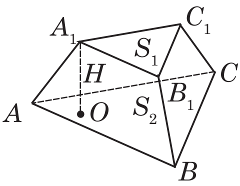
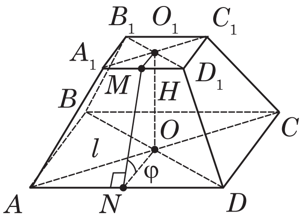
Окончание таблицы

	3. Если **одна боковая грань** пирамиды перпендикулярна **плоскости основания**, то **высотой пирамиды является высота этой грани**. Если в $SABC$ $(SAC) \perp (ABC)$ и $SO \perp AC$ $(O \in AC)$, то SO — высота пирамиды, $SO \perp (ABC)$
	4. Если **две смежные боковые** грани перпендикулярны плоскости основания, то **высотой пирамиды является их общее боковое ребро**. Если $(SAB) \perp (ABC)$ и $(SAC) \perp (ABC)$, то SA — высота пирамиды $(SA \perp (ABC))$

Усечённая пирамида

	**Образование усечённой пирамиды** Если задана пирамида $SABC$ и проведена плоскость $A_1B_1C_1$, параллельная основанию пирамиды $((A_1B_1C_1) \parallel (ABC))$, то эта плоскость отсекает от заданной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной. (С коэффициентом подобия $k = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}$)
Другая часть заданной пирамиды — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — называется **усечённой пирамидой**. Грани ABC и $A_1B_1C_1$ — **основания** $((ABC) \parallel (A_1B_1C_1))$. Трапеции ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — **боковые грани**	

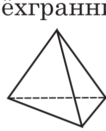
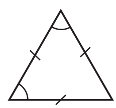
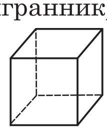
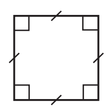
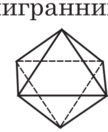
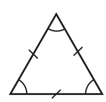
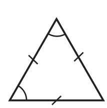
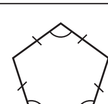
Окончание таблицы

	**Высотой** усечённой пирамиды называется расстояние между плоскостями её оснований. $A_1O \perp (ABC)$; $A_1O = H$ — высота. $V_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$, где S_1, S_2 — площади оснований
	**Площадь** поверхности усечённой пирамиды равна сумме площадей оснований и боковой поверхности: $S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}$. **Правильная усечённая пирамида** — усечённая пирамида, являющаяся частью правильной пирамиды. **Апофема** — высота боковой грани. $MN \perp AD$ и $MN \perp A_1D_1$; MN — апофема

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды	
$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot l$, P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема	$S_{\text{бок}} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\varphi}$, S_1 и S_2 — площади оснований; φ — угол наклона боковой грани к бóльшему основанию

Правильные многогранники

Правильный выпуклый многогранник — выпуклый многогранник, грани которого являются правильными многоугольниками с одинаковым количеством сторон и к каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер

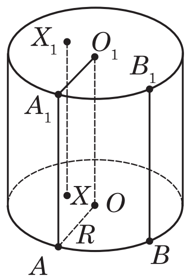
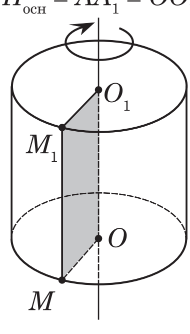
№	Многогранник	Многоугольник	Число граней	Число вершин	Число рёбер
1	Правильный тетраэдр (четырёхгранник) 		4	4	6
2	Гексаэдр (шестигранник), куб 		6	8	12
3	Октаэдр (восьмигранник) 		8	6	12
4	Икосаэдр (двадцатигранник) 		20	12	30
5	Додекаэдр (двенадцатигранник) 		12	20	30

Площадь поверхности, объём, радиусы вписанной и описанной сфер

Тип многогранника	**Площадь поверхности**	**Объём**	**Радиус описанной сферы**	**Радиус вписанной сферы**
Правильный тетраэдр	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{3}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{12}$
Правильный октаэдр	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
Правильный икосаэдр	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$	$\frac{a\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$
Правильный гексаэдр	$4a^2$	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
Правильный додекаэдр	$3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$	$\frac{a^3\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$	$\frac{a\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}$

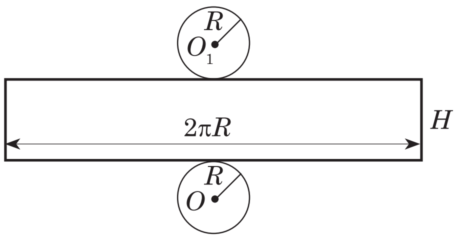
4. ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

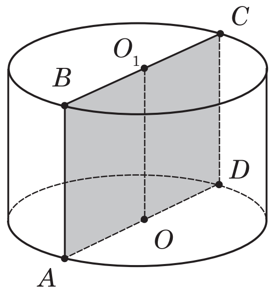
Цилиндр

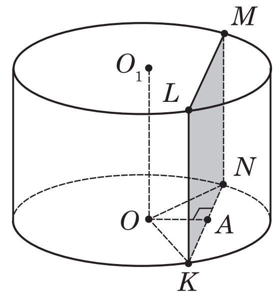
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Цилиндр (круговой цилиндр) — тело, состоящее из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки окружностей, лежащих в основаниях этих цилиндров.
Основания цилиндра — круги.
Образующие — отрезки, соединяющие точки окружностей.
AA_1, BB_1 — образующие</td>
</tr>
<tr>
<th>Свойства</th>
<th>Формулы</th>
</tr>
<tr>
<td>1. Основания цилиндра равны и параллельны
$$AO = O_1A_1 = R$$
$$(AOB) \parallel (A_1O_1B_1)$$
2. Образующие цилиндра равны и параллельны
$$AA_1 \parallel BB_1;\ AA_1 = BB_1$$
3. Высота цилиндра равна образующей.
$$H_{\text{осн}} = AA_1 = OO_1$$


При вращении прямоугольника около его стороны как оси образуется цилиндр</td>
<td>Площадь основания:
$$S_{\text{осн.}} = \pi R^2$$
Площадь боковой поверхности:
$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$$
Площадь полной поверхности:
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$
$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(H+R)$$
Объём:
$$V = S_{\text{осн}} \cdot H$$
$$V = \pi R^2 H$$
OMM_1O_1 — прямоугольник;
OO_1 — ось цилиндра;
$R_{\text{цил}} = OM = O_1M_1$;
$H_{\text{цил}} = MM_1 = OO_1$</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы

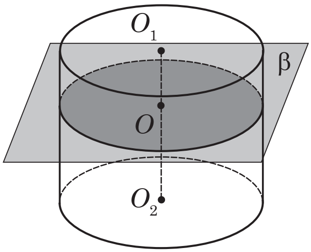
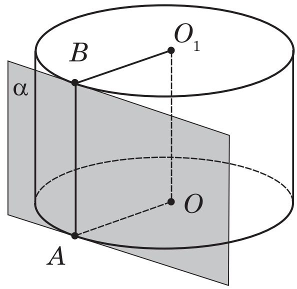
<table>
<tr><th colspan="2">Развёртка цилиндра</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Развёртка цилиндра — прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и H (боковая поверхность) и два круга радиусами R (основания цилиндра)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Сечение цилиндра плоскостями</th></tr>
<tr><th>Осевое сечение</th><th>Сечение плоскостью, параллельной оси</th></tr>
<tr><td>

$ABCD$ — осевое сечение (сечение, проходящее через ось OO_1)
$ABCD$ — прямоугольник
$AD = d_{осн} = 2R$
$AB = CD = H_{цил}$
AB и CD — образующие</td>
<td>

$(KLMN) \parallel OO_1$
$KLMN$ — прямоугольник
KL и MN — образующие
$KL = H_{цил}$, KN — хорда.
OA — расстояние от основания высоты до хорды NK</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Сечение плоскостью, параллельной основанию	**Касательная плоскость**
 Плоскость, параллельная основанию, пересекает боковую поверхность цилиндра по окружности, равной окружности основания: $R_{сеч} = R_{осн}$	 **Касательная плоскость** — плоскость, проходящая через образующую и перпендикулярная плоскости осевого сечения, проходящего через эту образующую. α — касательная плоскость, AB — образующая, α проходит через AB: $\alpha \perp (AOO_1B)$

Задача.

Площадь основания цилиндра равна Q, площадь осевого сечения равна S.

Найти:
площадь полной поверхности цилиндра.

Решение.

$S_{осн} = Q$; $S_{ABCD} = S$; $S_{полн} = 2\pi R(H + R)$, но $2RH = S$.

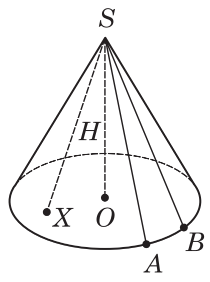
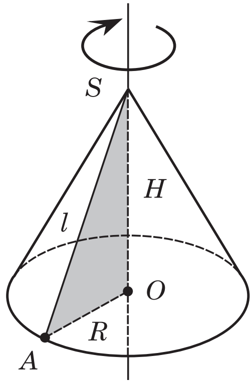
$S_{бок} = 2\pi RH$, тогда $S_{бок} = \pi S$;

$S_{полн} = S_{бок} + 2Q = \pi S + 2Q$;

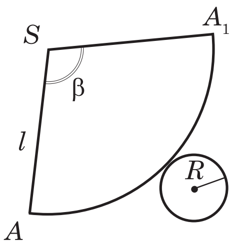
$S_{полн} = \pi S + 2Q$.

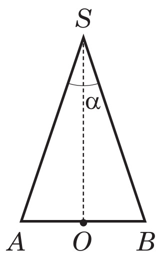
Ответ: $S_{полн} = \pi S + 2Q$.

Конус

	**Конус** (круговой конус) — тело, состоящее из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих заданную точку с точками окружности основания. **Основание конуса** — круг, т. S — вершина конуса. SA и SB — образующие (отрезки, соединяющие вершину с точками окружности основания)
Свойства	**Формулы**
1. Образующие конуса равны: $SA = SB = \ldots$ 2. $H_{\text{кон}} = SO$ $SO \perp (AOB)$	**Площадь основания:** $S_{\text{осн}} = \pi R^2$ **Площадь боковой поверхности:** $S_{\text{бок}} = \pi Rl$ **Площадь полной поверхности:** $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$ $S_{\text{полн}} = \pi R(l + R)$ **Объём:** $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$; $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$
	При вращении прямоугольного треугольника около его катета как оси образуется конус. ΔAOS — прямоугольный. SO — ось симметрии, AS — образующая. $R_{\text{кон}} = AO$; $H_{\text{кон}} = SO$; $AS = l$

Развёртка конуса





Развёртка конуса состоит из сектора SAA_1, радиус которого равен образующей конуса, длина дуги — длине окружности основания.

$SA = SA_1 = l$; $\cup AA_1 = 2\pi R$.

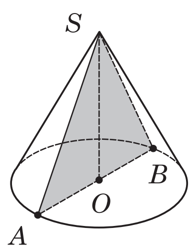
$\angle ASA_1 = \beta$ — угол в развёртке конуса.

$\angle ASB = \alpha$ — угол при вершине осевого сечения,

$$\beta = 2\pi \sin\frac{\alpha}{2}; \quad \alpha = 2\arcsin\frac{\beta}{2\pi}$$

Сечение конуса плоскостями

Осевое сечение

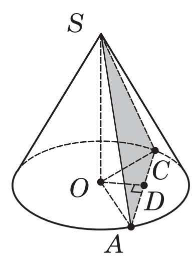


ΔSAB — осевое сечение (проходит через ось SO)

ΔSAB — равнобедренный

$SA = SB = l$ — образующие

Сечение, проходящее через вершину



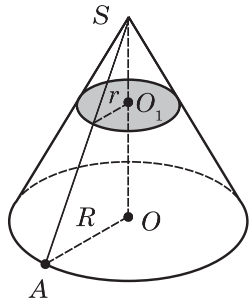
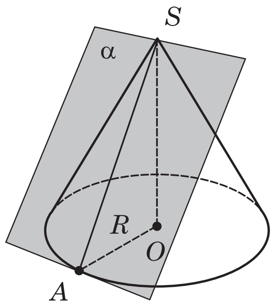
ΔASC — равнобедренный

$AS = SC = l$ — образующие

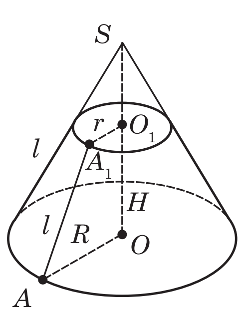
AC — хорда, $OA = OC = R$

OD — расстояние от основания высоты до хорды AC

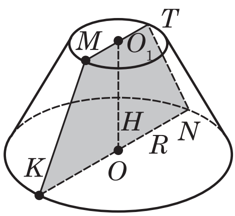
$OD^2 = AO^2 - AD^2$

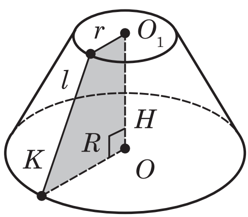
Сечение плоскостью, параллельной основанию	Касательная плоскость
 Плоскость, параллельная основанию, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса. $\frac{r_{\text{сеч}}}{R_{\text{кон}}} = \frac{SO_1}{SO}$	 **Касательная плоскость** — это плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, содержащему эту образующую. α — касательная плоскость; SA — образующая, α проходит через SA; $\alpha \perp (SAO)$

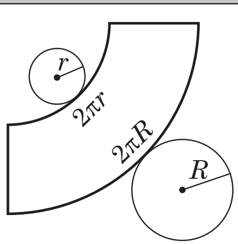
Усечённый конус

	**Усечённый конус** — часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Основания — круги с центрами O и O_1. l — образующая, $AA_1 = l$; $OA = R$ и $O_1A_1 = r$ — радиусы оснований

Окончание таблицы

<table>
<tr><th>Свойства</th><th>Формулы</th></tr>
<tr><td>


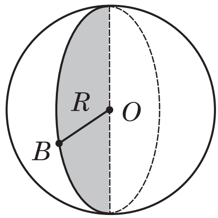
Осевое сечение — равнобокая трапеция.
$MKNT$ — осевое сечение.
$MT \parallel KN$ и $MK = TN$
$MT = 2r$; $KN = 2R$
$OO_1 \perp KN$
$OO_1 = H$
</td><td rowspan="2">
Площадь боковой поверхности:
$$S_{\text{бок}} = \pi(R+r)l$$
Площадь полной поверхности:
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{1\text{осн}} + S_{2\text{осн}}$$
Объём:
$$V_{\text{у.к.}} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$$
R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований;
l — образующая.
</td></tr>
<tr><td>


При вращении прямоугольной трапеции около оси, проходящей через меньшую боковую сторону, перпендикулярную основаниям, образуется усечённый конус
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Развёртка усечённого конуса</th></tr>
<tr><td>


</td><td>
Два круга — верхнее и нижнее основания радиусами r и R; часть кольца — боковая поверхность
</td></tr>
</table>

Шар и сфера

Шар



Шар — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R) от данной точки (O).

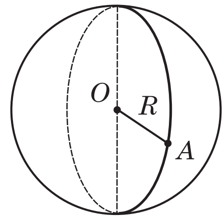
O — центр шара;
OB — радиус шара;
$OB = R$.

Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра.

Объём шара:

$$V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Сфера



Сфера — тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (R) от данной точки (O).

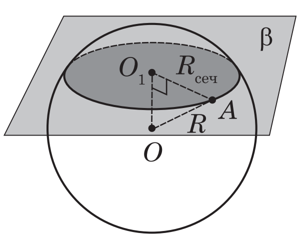
O — центр сферы;
OA — радиус сферы;
$AO = R$.

При вращении полуокружности вокруг её диаметра получаем сферу.

Площадь поверхности сферы:

$$S_{сф} = 4\pi R^2$$

Сечение шара плоскостью



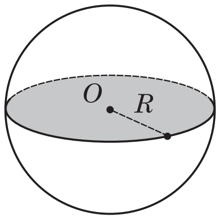
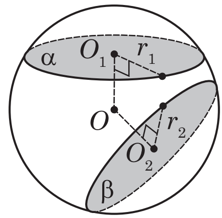
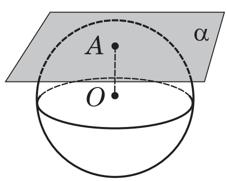
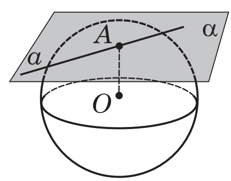
O — центр шара;
O_1 — центр круга сечения;
$OO_1 \perp \beta$

Всякое сечение шара плоскостью есть круг.

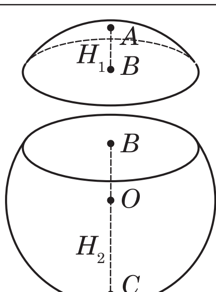
Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Из ΔOO_1A:

$$R_{сеч} = \sqrt{R^2_{шара} - OO_1^2}$$

<table>
<tr><th>Большой круг</th><th>Сечение двумя плоскостями</th></tr>
<tr><td>
Большой круг — сечение шара, проходящее через центр.
$R_{сеч} = R_{шара}$</td><td>
$OO_1 \perp \alpha$ и $OO_2 \perp \beta$
r_1 и r_2 — радиусы кругов сечения.
$OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$
$OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$
$OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$</td></tr>
<tr><td>
Касательная плоскость к шару — это плоскость, проходящая через точку сферы, перпендикулярная к радиусу, проведённому в эту точку.
$OA \perp \alpha$</td><td>
Касательная к шару — это прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания.
$OA \perp \alpha$; $OA \perp a$; $a \in \alpha$</td></tr>
</table>

Части шара

<table>
<tr><td></td><td>Шаровой сегмент — часть шара, которую отсекает секущая плоскость.
Плоскость делит шар на два сегмента:
$AB = H_1$ — высота меньшего сегмента;
$BC = H_2$ — высота большего сегмента</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><td></td><td>

Основные формулы

Площадь боковой поверхности:

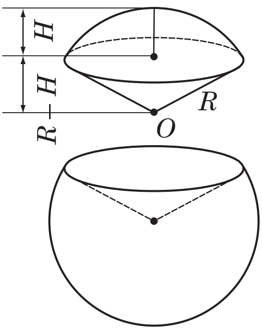
$S_{бок} = 2\pi RH.$

Площадь полной поверхности:

$S_{полн} = \pi H(4R - H)$

Объем: $V_{сегм} = \pi H^2\left(R - \dfrac{H}{3}\right)$

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

Шаровой сектор — тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, которое имеет общее основание с сегментом и вершину в центре конуса.

Основные формулы

Площадь полной поверхности:

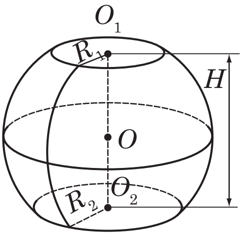
$S_{полн} = \pi R\left(2H + \sqrt{H(2R - H)}\right)$

Объём: $V_{сек} = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Примечание: если шаровой сегмент меньше полушара, то для получения шарового сектора его дополняют конусом, а если больше полушара, то конус удаляют

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

Шаровой слой — часть шара между двумя параллельными секущими плоскостями.

H — расстояние между секущими плоскостями;

R_1 и R_2 — радиусы оснований

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Основные формулы

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi RH$; R — радиус шара.

Площадь полной поверхности: $S_{полн} = \pi(2RH + R_1^2 + R_2^2).$

Объём: $V = \dfrac{\pi H}{6}(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2)$

</td></tr>
</table>