Условия и решения задач

9 класс

9.5. В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились любые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.)

(*И. Богданов*)

Ответ. Да, могло.

Первое решение. Предъявим пример, как такое могло произойти. Выстроим учеников по кругу. Предположим, что к каждому на день рождения пришли все одноклассники, кроме следующего за ним по часовой стрелке. Тогда любые два ученика A и B встретились на всех празднованиях, кроме двух: того, на которое не пришёл A, и того, на которое не пришёл B. Значит, любая пара учеников встретилась 21 раз.

Второе решение. Предъявим другой возможный пример. Выделим из класса двух учеников A и B. Пусть на день рождения к A пришли все одноклассники, кроме B, на день рождения к B пришёл только A, а на остальные дни рождения приходил только B. Тогда любая пара, в которой нет B, встретилась только на дне рождения A, а все пары, содержащие B, встречались ровно по разу на остальных празднованиях. Итого, каждая пара встретилась ровно по разу.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён правильный пример, возможно, без обоснования или с неверным обоснованием — не менее 5 баллов.

9.6. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a + b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Множество всех натуральных чисел, а также множества $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$.

Решение. Для начала проверим, что множества $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, а также множество всех натуральных чисел — полные. Для последнего множества это очевидно; для первых четырёх заметим, что если натуральные числа a и b таковы, что $a+b \leqslant 4$, то либо они оба равны 2, либо одно из них равно 1; в любом из этих случаев имеем $ab \leqslant a+b$. Значит. если $a+b \in A$, то и $ab \in A$.

Пусть теперь A — произвольное полное множество. Если A содержит некоторое число $k \geqslant 2$, то по условию оно также содержит число $1 \cdot (k-1) = k-1$. Продолжая этот процесс, получаем, что все натуральные числа, не превосходящие k, лежат в A. В частности, если A не содержит чисел, больших 4, то множество A уже перечислено в ответе.

Пусть теперь в A есть число $\ell \geqslant 5$. Зададим последовательность $\ell_1, \ell_2, \ldots$ соотношениями $\ell_1 = \ell$, $\ell_{n+1} = 2(\ell_n - 2)$. Все эти числа лежат в A. Действительно, ℓ_1 лежит в A по нашему предположению, а если $\ell_n = 2+(\ell_n-2) \in A$, то и $\ell_{n+1} = 2(\ell_n-2) \in A$. Кроме того, $\ell_{n+1} = \ell_n + (\ell_n - 4)$; по индукции теперь получаем, что $\ell_{n+1} > \ell_n \geqslant 5$. Значит, для любого натурального n имеем $\ell_n > n$; из рассуждений предыдущего абзаца понимаем теперь, что и $n \in A$. Итак, все натуральные числа лежат в A.

Комментарий. Верный ответ — 1 балл.

Доказано, что вместе с любым числом полное множество содержит все меньшие его — 2 балла.

Доказано, что полное множество, в котором есть число, большее 4, содержит бесконечно много чисел — 2 балла.

В решении упущен один или несколько из ответов — не более 5 баллов.

9.7. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k *удачным*, если $k \leqslant 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k, расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными? (*Е. Бакаев*)

Ответ. 1008 чисел.

Решение. Рассмотрим произвольное окрашивание таблицы. Пусть нашлось хотя бы два удачных числа, и a — наименьшее из них, а b — наибольшее.

Поделим b на a с остатком: $b = qa+r$, где $0 \leqslant r < a$. Предположим, что $q \geqslant 2$. В произвольном квадрате $b\times b$ можно расположить q^2 непересекающихся квадратов $a\times a$. В этих квадратах будет ровно q^2a чёрных клеток. Однако $q^2a > (q+1)a > qa+r = b$; значит, в квадрате $b \times b$ будет больше, чем b чёрных клеток, что невозможно. Итак, $q < 2$, то есть $b < 2a$.

Общее количество удачных чисел не превосходит количества натуральных чисел от a до b, то есть оно не больше $b - a + 1 < b - b/2 + 1 = b/2 + 1 \leqslant 1009$. Значит, это количество не больше 1008.

Осталось привести пример раскраски, для которой найдутся 1008 удачных чисел. Окрасим чёрным все клетки 1008-й строки и только их. Рассмотрим произвольный квадрат со стороной $d \geqslant 1009$. Он пересекается с 1008-ой строкой, значит в нём есть целая строка отмеченных клеток, то есть их как раз d штук. Значит, все числа от 1009 до 2016 являются удачными, и таких чисел как раз 1008.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример с 1008 удачными числами — 2 балла.

Доказано только, что удачных чисел не больше 1008 — 4 балла.

9.8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90^\circ$. Пусть M — середина стороны BC. Оказалось. что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$. (*Е. Бакаев*)

Первое решение. На продолжении отрезка AB за точку A отметим точку K так, что $AB = AK$ (см. рис. 1). Тогда AM — средняя линия в треугольнике BCK, откуда $AM \parallel CK$. Значит, $\angle BKC = \angle BAM = \angle ADC$. Отсюда следует, что четырёхугольник $AKDC$ вписан.

Опять же используя параллельность AM и CK, получаем $\angle CAM = \angle ACK = \angle ADK$. Наконец, DA — медиана и высота в треугольнике BDK, поэтому DA является и биссектрисой; отсюда $\angle ADB = \angle ADK = \angle CAM$, что и требовалось доказать.

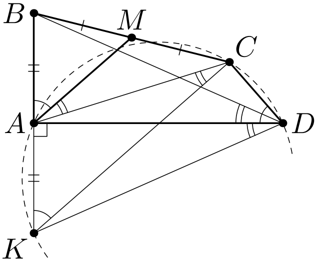

Рис. 1

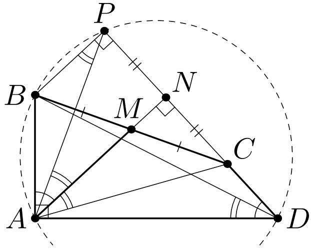

Рис. 2

Второе решение. Заметим, что $\angle ADC + \angle DAM = \angle BAM + \angle DAM = 90^\circ$; это значит, что $AM \perp CD$. Опустим перпендикуляры MN и BP из точек M и B на прямую CD; тогда точки A, M и N лежат на одной прямой (см. рис. 2).

Поскольку $BM = MC$, по теореме Фалеса получаем $PN = NC$. Значит, AN — высота и медиана в треугольнике APC, откуда $\angle CAM = \angle MAP$. Так как $BP \parallel AN$, получаем $\angle MAP = \angle APB$. Наконец, поскольку $\angle BPD = \angle BAD = 90^\circ$, четырёхугольник $ABPD$ вписан; поэтому $\angle APB = \angle ADB$. Итак, мы получили, что $\angle CAM = \angle MAP = \angle APB = \angle ADB$, что и требовалось.

Третье решение. Отложим на луче AM точку Q так, что $AQ = 2AM$ (см. рис. 3). Тогда в четырёхугольнике $ABQC$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, то есть он — параллелограмм; значит, $\angle CAQ = \angle AQB$.

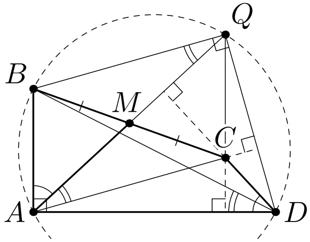

Рис. 3

Так как $QC \parallel AB$, получаем $QC \perp AD$. Так как $\angle QAD = 90^\circ - \angle BAQ = 90^\circ - \angle ADC$, имеем $DC \perp AQ$. Значит, C — точка пересечения высот в треугольнике AQD, откуда $AC \perp QD$ (и, значит, $BQ \perp QD$).

Поскольку $\angle BAD = \angle BQD = 90^\circ$, четырёхугольник $ABQD$ вписан. Значит, $\angle ADB = \angle AQB = \angle CAQ$, что и требовалось доказать.