Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Только 0.

Решение. Пусть i-й трёхчлен имеет вид $f_i(x) = ax^2+bx+c_i$. Тогда

$$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1,$$

поскольку $f_1(x_1) = 0$. Аналогично получаем равенства $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \ldots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$ и $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$.

Складывая полученные равенства, получаем

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \ldots + (c_1 - c_{100}) = 0.$$

Значит, единственное возможное значение суммы — ноль.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

9.2. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$. (*Б. Обухов*)

Решение. Так как CC' — диаметр Ω, имеем $\angle C'AC = 90°$. Поскольку $MP \parallel BC$, получаем $\angle MPA = \angle BCA = \angle BAC$ (см. рис. 1). Значит, треугольник AMP — равнобедренный, и поэтому его высота MD является и медианой. Так как $AD = DP$ и $AC' \parallel DM$, по теореме Фалеса получаем, что $C'M = MP$.

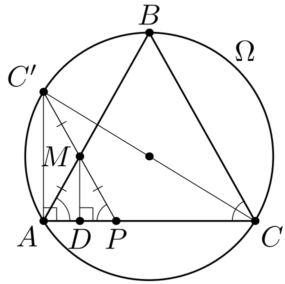

Рис. 1

Замечание. Есть и другие решения, например, с использованием подсчёта углов в прямоугольном треугольнике PAC'; именно, $\angle MAC' = 90^\circ - \angle MAP = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle MPA = \angle MC'A$, откуда $MP = MA = MC'$.

9.3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Предположим противное. Рассмотрим степени двойки, на которые делятся выписанные числа; пусть 2^k — наибольшая из них. Если хотя бы два выписанных числа делятся на 2^k, то два соседних таких числа будут различаться на 2^k. Значит, одно из них будет делиться на 2^{k+1}, что невозможно в силу выбора k. Значит, среди выписанных чисел ровно одно делится на 2^k.

Наименьшее общее кратное (НОК) группы, содержащей это число, будет делиться на 2^k, а НОК оставшейся группы — не будет. Значит, сумма этих НОК не делится на 2^k; с другой стороны, эта сумма больше, чем 2^k. Поэтому эта сумма не может быть степенью двойки.

Комментарий. Доказано, что ровно одно из выписанных чисел делится на максимальную степень двойки — 2 балла.

9.4. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, …, 11 кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого? (*И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. За 2 загрузки.

Решение. Покажем, что Архимеду достаточно использовать мешок дважды. Пусть он сначала положит в мешок слитки с весами 1, 2, 3 и 5 кг, а потом — слитки с весами 1, 4 и 6 кг. В обоих случаях мешок не порвётся.

Докажем, что это могло произойти только в том случае, если дважды был использован слиток веса 1 кг. Действительно, если бы Архимед в эти два раза вместо слитков с весами 1, …, 6 кг использовал соответственно слитки с весами $w_1, \ldots, w_6$ кг, то эти веса удовлетворяли бы системе неравенств $w_1 + w_2 + w_3 + w_5 \leqslant 11$, $w_1 + w_4 + w_6 \leqslant 11$. Складывая эти неравенства, получаем $w_1 + (w_1 + w_2 + \ldots + w_6) \leqslant 22$. В скобках стоит сумма шести различных натуральных чисел, то есть она не меньше $1 + 2 + \ldots + 6 = 21$. Отсюда следует, что $w_1 \leqslant 22 - 21 = 1$. Значит, $w_1 = 1$, то есть слиток веса 1 кг однозначно определён.

Осталось показать, что одной загрузки недостаточно. Если Архимед загрузит один слиток, то мешок не порвётся в любом случае, то есть никакой слиток идентифицировать не удастся. Пусть Архимед загрузит больше одного слитка, и мешок не порвётся. Если слиток в 1 кг не загружен в мешок, то при замене им любого слитка из мешка результат не изменится; значит, в этом случае Гиерон даже не сможет понять, находится ли этот слиток в мешке. Если же искомый слиток в мешке, то Гиерон не сможет понять, какой из (хотя бы двух) загруженных слитков — требуемый.

Замечание. После указанных двух загрузок также однозначно определяется группа гирь с весами 2, 3 и 5 кг, а также группа с весами 4 и 6 кг.

Комментарий. Доказано только, что одной загрузки мешка недостаточно — 1 балл.

Приведён только верный пример двух загрузок, но не доказано, что он работает — 3 балла (эти баллы могут складываться с предыдущим).

Приведён верный пример двух загрузок, доказано, что он работает, но не доказано, что одной загрузкой не обойтись — 6 баллов.