11 класс

11.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным? *(Г. Жуков)*

Ответ. Нет, не может.

Решение. Так как трёхчлен $f(x)$ не имеет корней, то $c = f(0) \neq 0$ и $f(c) \neq 0$. Тогда выражение $\frac{f(c)}{c}$ иррационально как отношение рационального и иррационального чисел. Но $\frac{f(c)}{c} = \frac{ac^2 + bc + c}{c} = ac + b + 1$. Так как $b + 1$ рационально, то ac — иррационально. Получаем, что дискриминант $D = b^2 - 4ac$ иррационален как разность рационального и иррационального чисел.

Комментарий. В целом верное решение не проходит, если $c = 0$ и/или $f(c) = 0$ — 6 баллов.

11.2. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy + yz + zx$. Докажите неравенство
$$\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$
(А. Храбров)

Решение. По неравенству о средних имеем
$$xy+xz \geqslant 2\sqrt{xy \cdot xz}, \quad xy+yz \geqslant 2\sqrt{xy \cdot yz}, \quad xz+yz \geqslant 2\sqrt{xz \cdot yz}.$$
Сложим эти три неравенства и разделим полученное на 2. С учётом условия, получаем
$$xyz \geqslant xy + xz + yz \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}.$$
Деля полученное неравенство на $\sqrt{xyz}$, получаем требуемое.

Замечание. Это решение легче придумать, если переписать данное и требуемое неравенства в виде $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant 1$ и $\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \leqslant 1$.

11.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности Γ, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны. (*А. Кузнецов*)

Решение. Так как BL — биссектриса $\angle ABC$, имеем $\angle ABL = \angle LBC$. Поскольку PB — касательная к Ω, имеем $\angle PBA = \angle BCA$ (см. рис. 4). Кроме того, $\angle PBL = \angle PBA + \angle ABL = \angle BCA + \angle LBC = \angle BLP$, значит, $\angle BPM = 180^\circ - (\angle PBL + \angle BLP) = 180^\circ - 2\angle BLP$. Отсюда следует, в частности, что $\angle BLP$ — острый.

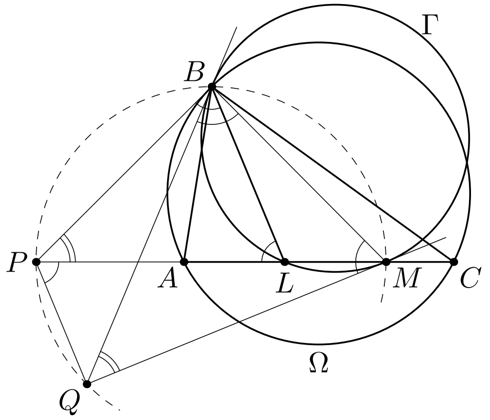

Рис. 4

Так как $\angle BLM = 180^\circ - \angle BLP$ тупой, касательные к Γ в точках B и M пересекаются в точке Q, лежащей по ту же сторону от BM, что и точка L (а значит — по ту же сторону, что и P). Далее, имеем $\angle QBM = \angle QMB = 180^\circ - \angle BLM = \angle BLP$. Значит, $\angle BQM = 180^\circ - 2\angle QBM = 180^\circ - 2\angle BLP = \angle BPM$. Поэтому точки B, M, P и Q лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle QPM = \angle QBM = \angle BLP$. Это и означает, что $PQ \parallel BL$.

Комментарий. Доказано, что четырёхугольник $BPQM$ вписан — 3 балла.

Задача сведена к доказательству вписанности четырёхугольника $BPQM$ — 2 балла.

Доказано, что точки P и Q лежат с одной стороны от BM — 0 баллов.

За отсутствие обоснования расположения точки Q баллы не снимаются.

11.4. Есть клетчатая доска 2015×2015. Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500. Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. $k = 2(2015 - 1500) = 1030$.

Решение. Покажем, что 1030 детекторов Диме хватит. Пусть он расположит 515 детекторов в 515 левых клетках средней строки квадрата, а остальные 515 детекторов — в 515 верхних клетках среднего столбца. Заметим, что при любом положении корабля его левый столбец лежит в одном из 516 левых столбцов доски. Если этот столбец — один из 515 самых левых, то корабль накроет детектор из этого столбца, лежащий в средней строке, иначе ни одного детектора из этой строки корабль не накроет. Значит, по показаниям детекторов из этой строки восстанавливается, в каких столбцах лежит корабль. Аналогично, строки, в которых он находится, восстанавливаются по показаниям детекторов из среднего столбца.

Рассмотрим теперь произвольную расстановку k детекторов, удовлетворяющих требованиям. Рассмотрим два положения корабля, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1. Показания какого-то детектора для них будут различаться, только если этот детектор лежит в самом левом столбце левого корабля или в самом правом столбце правого. Значит, в любых двух вертикальных прямоугольниках 1500×1, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Аналогично, в любых двух горизонтальных прямоугольниках 1×1500, отличающихся вертикальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Назовём такие пары прямоугольников *вертикальными* и *горизонтальными*, соответственно.

Выделим все вертикальные пары, лежащие в нижних 1500 и в верхних 1500 строках доски (таких пар $2 \cdot 515 = 1030$). Аналогично, выделим все 1030 горизонтальных пар, лежащих в левых 1500 и в правых 1500 столбцах. Разобьём доску на 9 прямоугольных областей так, как показано на рис. 3. Выделенные пары не покрывают клеток из E; каждая же клетка в остальных областях покрыта двумя выделенными парами (в D и F — двумя вертикальными, в B и H — двумя горизонтальными, а в областях A, C, G и I — одной горизонтальной и одной вертикальной). Итак, каждый детектор лежит не более, чем в двух выделенных парах; значит, чтобы в каждой выделенной паре был хотя бы один детектор, требуется не менее $2 \cdot 1030/2 = 1030$ детекторов.

Замечание. Существует много других примеров расположения 1030 детекторов, удовлетворяющих требованиям.

Комментарий. Приведён пример расстановки 1030 детекторов, удовлетворяющей требованиям — 1 балл.

Доказано только, что $k \geqslant 1030$ — 5 баллов.

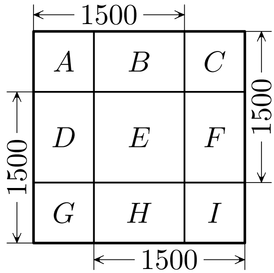

Рис. 5

Если при в целом верном рассуждении в подсчёте количества детекторов в примере или оценке совершена одна или несколько ошибок на единицу (например, считается, что число выделенных вертикальных пар в нижних строках равно 516, а не 515) — снимается 1 балл.