Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

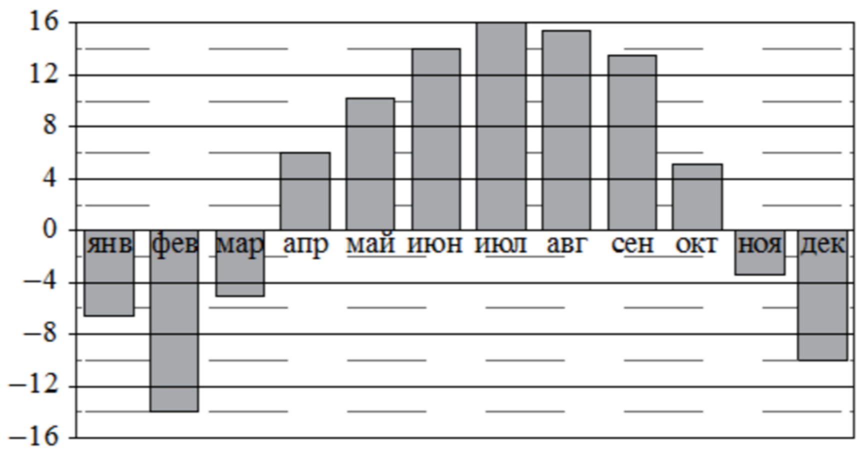
© 2017 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Показания счётчика электроэнергии 1 апреля составляли 79621 кВт·ч, а 1 мая – 79821 кВт·ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за апрель, если 1 кВт·ч электроэнергии стоит 4 руб. 50 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: ___________________________.

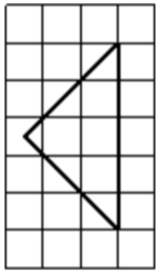
2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.



Ответ: ___________________________.

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: ___________________________.

4 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Италии и 6 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из Италии.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

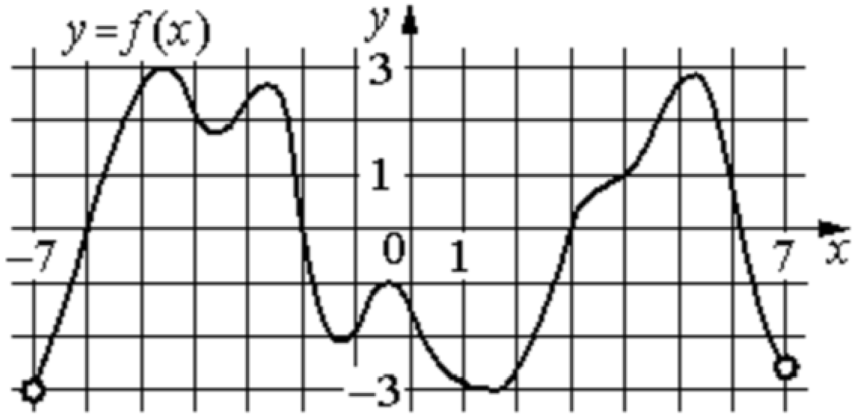
$7^{-6-x} = 343.$

Ответ: ___________________________.

6 Один угол параллелограмма больше другого на 40°. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.

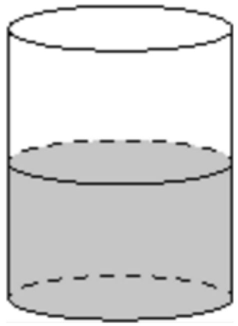
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Ответ: ___________________________.

8 В цилиндрический сосуд налили 2800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения
$30\,\mathrm{tg}\,3° \cdot \mathrm{tg}\,87° - 43$.

Ответ: ___________________________.

10 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Ответ: ___________________________.

11 Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 22:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 8 км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции
$y = (2x - 1)\cos x - 2\sin x + 5$ принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x} = 4^{\sqrt{3}\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство
$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0.$$

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171218

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \dots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 10%.
В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=9,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

19 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора Трижды победитель олимпиады по высшей математике среди всех студентов Тольяттинского государственного университета
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	900
2	7
3	2,5
4	0,16
5	-9
6	70
7	5
8	2275
9	-13
10	9,2
11	2
12	0,5
13	а) $\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z.$ б) $3\pi; 4\pi; \frac{23\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}$
14	44
15	$(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5\,; 2)$
16	1
17	21
18	$\{7 - 3\sqrt{2}; 4; 1 + 3\sqrt{2}\}$
19	а) Могло, б) 10, в) $\frac{9}{19}$

© 2017 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$(16^{\sin x})^{\cos x} = 4^{\sqrt{3}\sin x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

.

Решение:

а)

Возведение степени в степень

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$$16^{\sin x \cdot \cos x} = 4^{\sqrt{3}\sin x}$$
$$(4^2)^{\sin x \cdot \cos x} = 4^{\sqrt{3}\sin x}$$
$$4^{2\sin x \cdot \cos x} = 4^{\sqrt{3}\sin x}$$
$$2\sin x \cdot \cos x = \sqrt{3}\sin x$$
$$2\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$
$$\sin x \cdot \left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171218

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$\sin x = 0$ $x = \pi n; n \in Z$	$2\cos x - \sqrt{3} = 0$ $2\cos x = \sqrt{3}$ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \pi n; n \in Z$

Если $n = 2$, то $x = 2\pi \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = 3\pi \in \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 4$, то $x = 4\pi \in \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 5$, то $x = 5\pi \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6} \in \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{37\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6} \in \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{35\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $3\pi; 4\pi; \frac{23\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

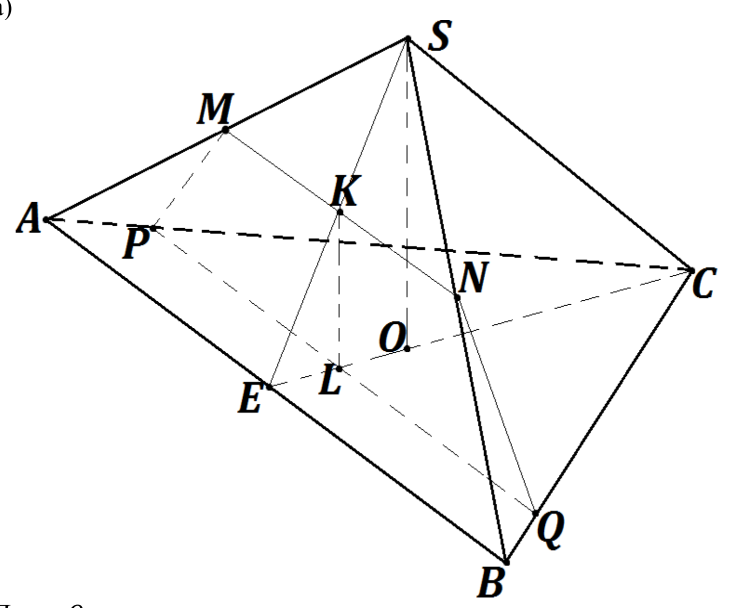
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение:

а)



Пусть O – центр основания пирамиды

Рассмотрим $\triangle ABS$ – равнобедренный:

Проведём медиану SE, являющуюся ещё и биссектрисой и высотой

Пусть $(SEC) \cap MN = K$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171218

Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$
Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$
Построим прямую NQ, т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости
Построим прямую PM, т.к. точки P и M лежат в одной плоскости
$MNQP$ — сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ — прямоугольный:
Т.к. K — середина SE и $KL \parallel SO$, то KL — средняя линия $\triangle SOE$
$=> L$ — середина OE
Пусть $EL = OL = x$
Т.к. CE — медиана в $\triangle ABC$, то:

$$\frac{OC}{OE} = 2:1$$

$$=> OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$$

$$=> \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$

■

б)
Найдём основания и высоту трапеции $MNQP$:

$MN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (т.к. MN — средняя линия $\triangle ABS$)

$PQ = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10$ (т.к. $\frac{CL}{LE} = 5:1$)

$$OC = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2} = 11$ (по теореме Пифагора)

$KL = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 11 = 5{,}5$ (т.к. KL — средняя линия $\triangle SOE$)

$$S = \frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = \frac{6 + 10}{2} \cdot 5{,}5 = 44$$

Ответ: б) 44

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

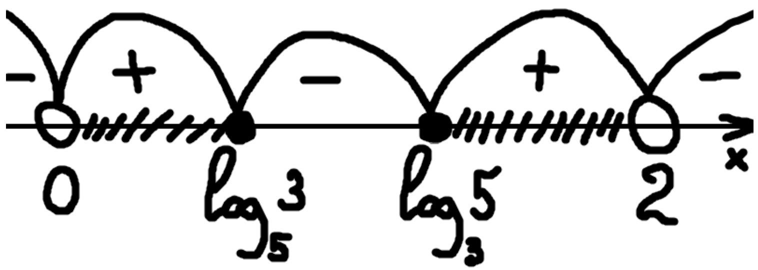
15 Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0.$$

.

Решение:

$15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15 = 0$ $15^x - 3 \cdot 3^x - 5 \cdot 5^x + 15 = 0$ $(15^x - 3 \cdot 3^x) + (-5 \cdot 5^x + 15) = 0$ $3^x \cdot (5^x - 3) - 5 \cdot (5^x - 3) = 0$ $(5^x - 3)(3^x - 5) = 0$ $5^x - 3 = 0$ $5^x = 3$ $5^x = 5^{\log_5 3}$ $x = \log_5 3$ $3^x - 5 = 0$ $3^x = 5$ $3^x = 3^{\log_3 5}$ $x = \log_3 5$	$-x^2 + 2x \neq 0$ $x(2 - x) \neq 0$ $x \neq 0$ $x \neq 2$



Ответ: $(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5\,; 2)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется	1

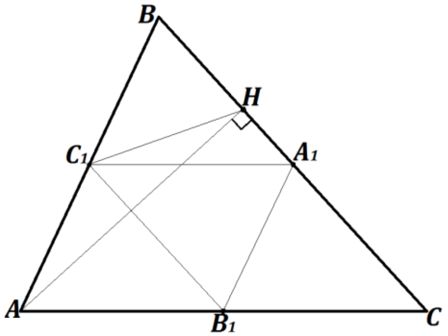
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$.

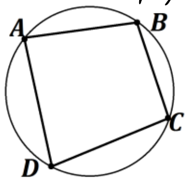
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

Решение:
а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1B_1C_1H$

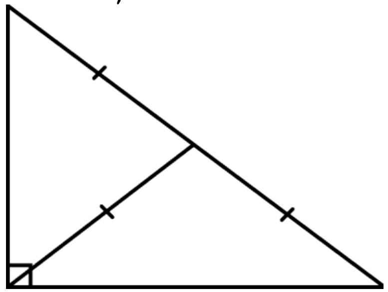
Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность



$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$

Наша задача – доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°
Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:
$\angle BCA = 45°$
$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 45 - 60 = 75°$
$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 75 = 15°$
$\angle CAH = \angle BAC - \angle BAH = 60 - 15 = 45°$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный
C_1H – медиана
=>
$C_1H = AC_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)
=>
$\triangle AC_1H$ – равнобедренный
=>
$\angle AHC_1 = \angle BAH = 15°$

Признаки параллелограмма
Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $A_1BC_1B_1$
$A_1B_1 \parallel BC_1$
$A_1B_1 = BC_1$ (т.к. A_1B_1 – средняя линия)
=>

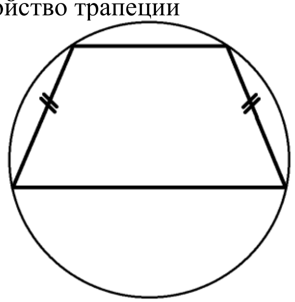
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171218

$A_1BC_1B_1$ − параллелограмм
=>
$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 75°$
$\angle A_1HC_1 = \angle AHA_1 + \angle AHC_1 = 90 + 15 = 105°$

$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1HC_1 = 75 + 105 = 180°$
=>
Четырёхугольник $A_1B_1C_1H$ можно вписать в окружность
=>
Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности
■

б)

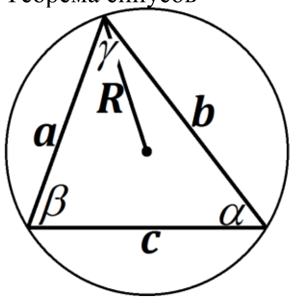
Свойство трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1B_1C_1H$ − равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$
или

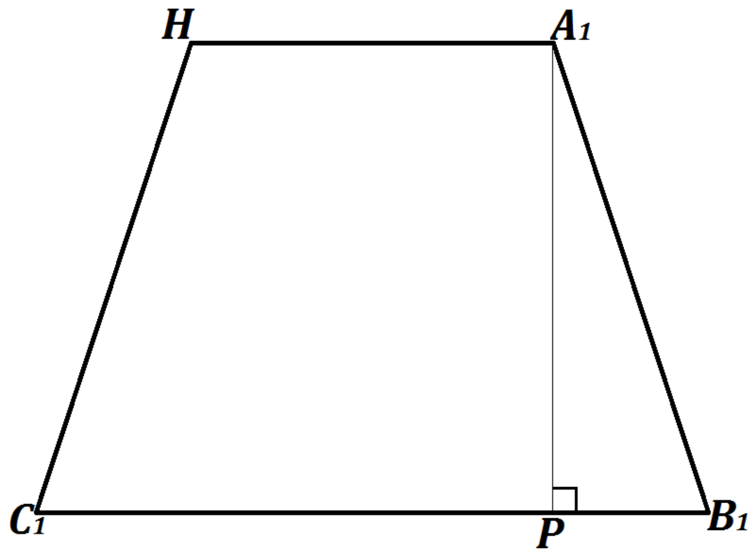
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin 45°}$$

$$AB = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sin 45°}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$$
=>
$$A_1B_1 = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$
$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

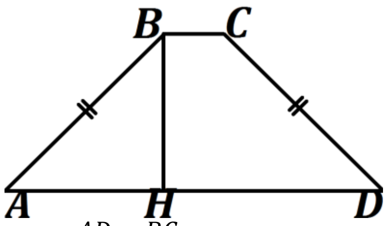
Рассмотрим $A_1B_1C_1H$:



Пусть
$A_1H = x$
A_1P − высота трапеции

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171218

Свойство равнобедренной трапеции



$$AH = \frac{AD - BC}{2}$$

$$HD = \frac{AD + BC}{2}$$

Тогда

$$B_1P = \frac{B_1C_1 - A_1H}{2} = \frac{\sqrt{3} - x}{2}$$

$$\angle B_1A_1P = 180 - \angle B_1PA_1 - \angle A_1B_1C_1 = 180 - 90 - 75 = 15°$$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin\angle B_1A_1P = \frac{B_1P}{A_1B_1}$$

$$\sin 15° = \frac{\frac{\sqrt{3} - x}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(45 - 30)° = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}} \qquad \Big| \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - x$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}\cdot x$$

$$-\sqrt{2} = -\sqrt{2}\cdot x$$

$$x = 1$$

$$A_1H = 1$$

Ответ: б) 1

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ	1

Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта a, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 10%.
В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей?

Решение:

Если продать бумаги в конце 1-го года, то за оставшиеся 24 года сумма на счёте будет: $1 \cdot 1{,}1^{24}$
Если в конце 2-го, то: $4 \cdot 1{,}1^{23}$
Если в конце 3-го, то: $9 \cdot 1{,}1^{22}$
Если в конце 4-го, то: $16 \cdot 1{,}1^{21}$
Если в конце 5-го, то: $25 \cdot 1{,}1^{20}$
Если в конце 6-го, то: $36 \cdot 1{,}1^{19}$
Если в конце 7-го, то: $49 \cdot 1{,}1^{18}$
Если в конце 8-го, то: $64 \cdot 1{,}1^{17}$
Если в конце 9-го, то: $81 \cdot 1{,}1^{16}$
Если в конце 10-го, то: $100 \cdot 1{,}1^{15}$
Если в конце 11-го, то: $121 \cdot 1{,}1^{14}$
Если в конце 12-го, то: $144 \cdot 1{,}1^{13}$
Если в конце 13-го, то: $169 \cdot 1{,}1^{12}$
Если в конце 14-го, то: $196 \cdot 1{,}1^{11}$
Если в конце 15-го, то: $225 \cdot 1{,}1^{10}$
Если в конце 16-го, то: $256 \cdot 1{,}1^{9}$
Если в конце 17-го, то: $289 \cdot 1{,}1^{8}$
Если в конце 18-го, то: $324 \cdot 1{,}1^{7}$
Если в конце 19-го, то: $361 \cdot 1{,}1^{6}$
Если в конце 20-го, то: $400 \cdot 1{,}1^{5}$
Если в конце 21-го, то: $441 \cdot 1{,}1^{4}$
Если в конце 22-го, то: $484 \cdot 1{,}1^{3}$
Если в конце 23-го, то: $529 \cdot 1{,}1^{2}$
Если в конце 24-го, то: $576 \cdot 1{,}1^{1}$
Если в конце 25-го, то: $625 \cdot 1{,}1^{0}$

Сравним суммы на счёте в конце 20-го, 21-го и 22-го

В конце 20-го года	В конце 21-го года	В конце 22-го года
$400 \cdot 1{,}1^5$ $400 \cdot 1{,}21 \cdot 1{,}1^3$ 484	$441 \cdot 1{,}1^4$ $441 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1^3$ $485{,}1$	$484 \cdot 1{,}1^3$ $484 \cdot 1{,}1^3$ 484

=>
продать в конце 21 года выгоднее всего

Ответ: 21

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

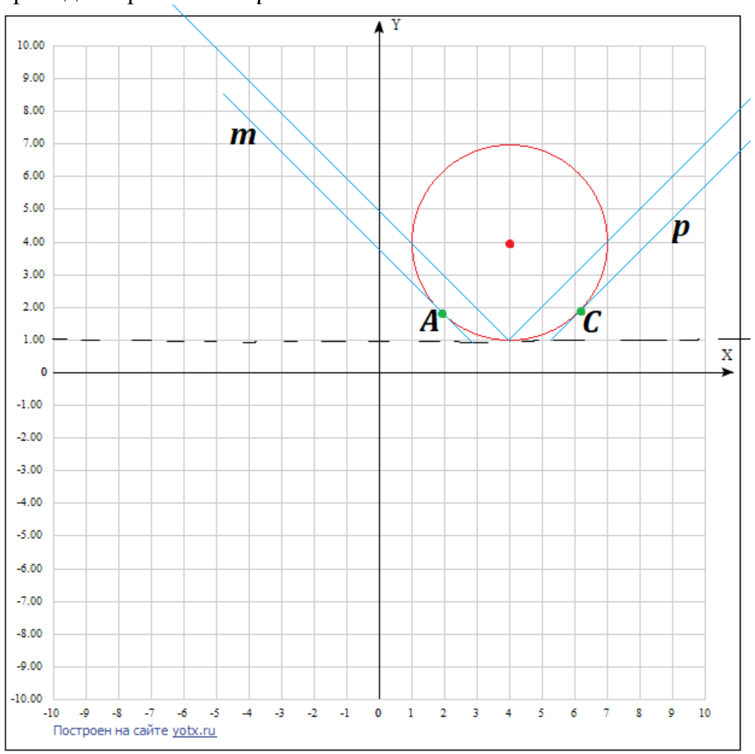
Решение:

Решим графически:
Первое уравнение – окружность с центром $(4; 4)$ и радиусом 3
Второе уравнение – прямой угол с вершиной $(a; 1)$

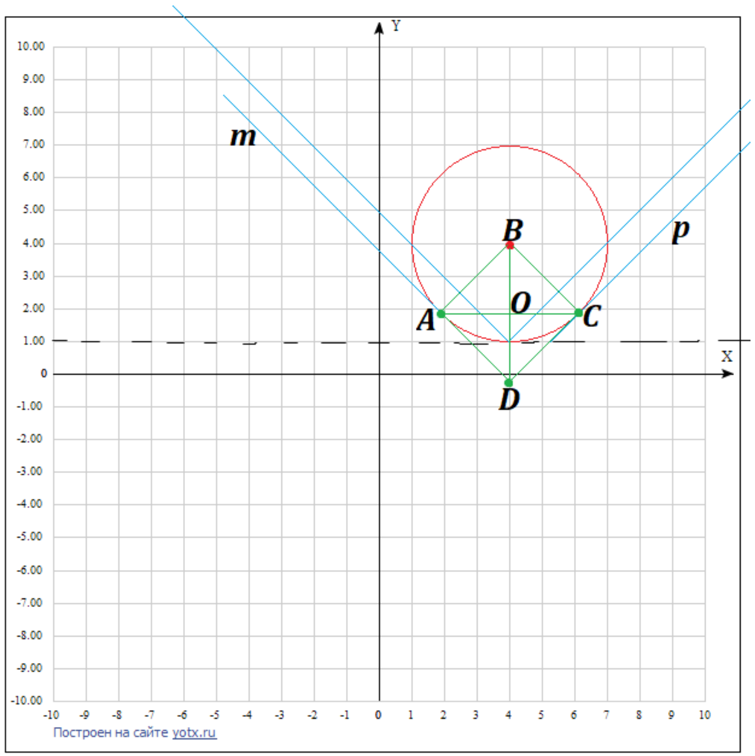
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171218

Пусть
$m -$ прямая с $k=-1$ из семейства прямых $y=-x+a+1$, проходящая через точку касания окружности (слева), т.е. через т. A
$p -$ прямая с $k=1$ из семейства прямых $y=x-a+1$, проходящая через точку касания окружности (справа), т.е. через т. C

Проведём прямые m и p



Найдём координаты точек касания:
Проведём два радиуса в точки касания, достроим квадрат и введём точки, как показано на рисунке:



$ABCD -$ это квадрат, т.к. $AB = BC$ (радиусы)
$\angle BAD = 90°$
$\angle BCD = 90°$
(по свойству касательных)

Рассмотрим $\Delta\ AOB -$ прямоугольный и равнобедренный
$AB = 3$
$AO = BO$
(половины диагоналей квадрата)
$AB^2 = AO^2 + BO^2$
$3^2 = AO^2 + AO^2$
$9 = 2AO^2$
$AO^2 = \frac{9}{2}$
$AO = \frac{3}{\sqrt{2}}$
=>

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$OB = OC = \frac{3}{\sqrt{2}}$
=>
$\left(4 - \frac{3}{\sqrt{2}}; 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ – координаты точки A
$\left(4 + \frac{3}{\sqrt{2}}; 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ – координаты точки C

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = -x + a + 1$ проходит через т. $A\left(4 - \frac{3}{\sqrt{2}}; 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$
$4 - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - 4 + a + 1$
$a = 7 - \frac{6}{\sqrt{2}} = 7 - 3\sqrt{2}$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой p
$y = x - a + 1$ проходит через т. $C\left(4 + \frac{3}{\sqrt{2}}; 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$
$4 - \frac{3}{\sqrt{2}} = 4 + \frac{3}{\sqrt{2}} - a + 1$
$a = 1 + \frac{6}{\sqrt{2}} = 1 + 3\sqrt{2}$

Итак,
Если $a < 7 - 3\sqrt{2}$, то пересечений 2, 1 или 0
Если $a = 7 - 3\sqrt{2}$, то 3 пересечения
Если $7 - 3\sqrt{2} < a < 4$, то 4 пересечения
Если $a = 4$, то 3 пересечения
Если $4 < a < 1 + 3\sqrt{2}$, то 4 пересечения
Если $a = 1 + 3\sqrt{2}$, то 3 пересечения
Если $a > 1 + 3\sqrt{2}$, то пересечений 2, 1 или 0

Ответ: $a \in \{7 - 3\sqrt{2}; 4; 1 + 3\sqrt{2}\}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?
.

Решение:

В театре число мальчиков $\leq \frac{4}{13}$ числа посетивших театр
В кино число мальчиков $\leq \frac{2}{5}$ числа посетивших кино

а)
Доля мальчиков в театре будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в театре и чем больше будет девочек в театре
Аналогично с кино
Доля мальчиков в кино будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в кино и чем больше будет девочек в кино

В группе 20 учащихся: 10 мальчиков и 10 девочек

Пусть
все мальчики ходили только в кино или только в театр, а
все девочки ходили сразу и в кино, и в театр за 1 день

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171218

Начинаем подбор:
1
Пусть
5 мальчиков были только в театре
5 мальчиков были только в кино
Тогда
Всего в театре было 5 м + 10 д
=>
$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$
(Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:
$\frac{1}{3} \le \frac{4}{13}$
$\frac{13}{39} \le \frac{12}{39}$
=>
Противоречие
=>
Такой вариант нам не подходит, уменьшим число мальчиков в театре
2
Пусть
4 мальчика были только в театре
6 мальчиков были только в кино
Тогда
Всего в театре было 4 м + 10 д
=>
$\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$
(Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:
$\frac{2}{7} \le \frac{4}{13}$
$\frac{26}{91} \le \frac{28}{91}$
=>
Подходит
=>
Проверим, подходит ли под другое условие:
Всего в кино было 6 м + 10 д
=>
$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
(Доля мальчиков в кино)
$\frac{3}{8} \le \frac{2}{5}$
$\frac{15}{40} \le \frac{16}{40}$
=>
Подходит
=>
Могло

б)
В предыдущем пункте было доказано, что мальчиков могло быть 10, предположим, что их было 11:

Если мальчиков 11, то девочек 9
Аналогично предыдущему пункту:
Доля мальчиков в театре будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в театре и чем больше будет девочек в театре
Аналогично с кино
Доля мальчиков в кино будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в кино и чем больше будет девочек в кино

Пусть
все мальчики ходили только в кино или только в театр, а
все девочки ходили сразу и в кино, и в театр за 1 день

Начинаем подбор:
1
Пусть
5 мальчиков были только в театре
6 мальчиков были только в кино
Тогда
Всего в театре было 5 м + 9 д
=>
$\frac{5}{14}$
(Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

$\frac{5}{14} \le \frac{4}{13}$

$\frac{65}{182} \le \frac{56}{182}$

=>

Противоречие

=>

Такой вариант нам не подходит, уменьшим число мальчиков в театре

2

Пусть

4 мальчика были только в театре

7 мальчиков были только в кино

Тогда

Всего в театре было 4 м + 9 д

=>

$\frac{4}{13}$

(Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

$\frac{4}{13} \le \frac{4}{13}$

=>

Подходит

=>

мальчиков в театре должно быть 0, 1, 2, 3 или 4

Проверим, подходит ли под другое условие:

Всего в кино было 7 м + 9 д

=>

$\frac{7}{16}$

(Доля мальчиков в кино)

$\frac{7}{16} \le \frac{2}{5}$

$\frac{35}{80} \le \frac{32}{80}$

=>

Противоречие

=>

Такой вариант нам не подходит, уменьшим число мальчиков в кино

Всего в кино было 6 м + 9 д

=>

$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

(Доля мальчиков в кино)

$\frac{2}{5} \le \frac{2}{5}$

=>

мальчиков в кино должно быть 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6

Итак,

мальчиков в театре должно быть 0, 1, 2, 3 или 4

мальчиков в кино должно быть 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6

=>

даже если в театре было 4 мальчика и в кино 6, то одиннадцатый мальчик не был ни в театре, ни в кино, что противоречит условию

=>

11 мальчиков в группе из 20 учащихся быть не могло

=>

10 – наибольшее количество мальчиков в группе из 20 учащихся

в)

Из предыдущего пункта следует, что наибольшее количество мальчиков в группе (а, следовательно, наименьшая доля девочек) достигается, если все мальчики ходили или в кино, или в театр, а все девочки ходили и в кино, и в театр за 1 день.

Пусть

$m_т$ − число мальчиков в театре

$m_к$ − число мальчиков в кино

d − число девочек в театре или кино

Требуется найти наименьшее значение дроби:

$$\frac{d}{m_т + m_к + d}$$

Преобразуем дробь:

$$\frac{d}{m_т + m_к + d} = \frac{1}{\frac{m_т + m_к + d}{d}} = \frac{1}{\frac{m_т + m_к}{d} + 1}$$

Попробуем как-то оценить значение дроби:

$$\frac{m_т + m_к}{d}$$

1

Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

По условию имеем:

В театре число мальчиков $\le \frac{4}{13}$ числа посетивших театр

$\frac{m_т}{m_т + d} \le \frac{4}{13}$

$13m_т \le 4 \cdot (m_т + d)$

$4 \cdot (m_т + d) \ge 13m_т \qquad |: 4$

$m_т + d \ge \frac{13m_т}{4} \qquad |: m_т$

$\frac{m_т + d}{m_т} \ge \frac{13}{4}$

$\frac{m_т}{m_т} + \frac{d}{m_т} \ge \frac{13}{4}$

$1 + \frac{d}{m_т} \ge \frac{13}{4}$

$\frac{d}{m_т} \ge \frac{9}{4}$

$4d \ge 9m_т$

$9m_т \le 4d \qquad |: 9$

$m_т \le \frac{4d}{9} \qquad |: d$

$\frac{m_т}{d} \le \frac{4}{9}$

2

По условию имеем:

В кино число мальчиков $\le \frac{2}{5}$ числа посетивших кино

$\frac{m_к}{m_к + d} \le \frac{2}{5}$

$5m_к \le 2 \cdot (m_к + d)$

$2 \cdot (m_к + d) \ge 5m_к \qquad |: 2$

$m_к + d \ge \frac{5m_к}{2} \qquad |: m_к$

$\frac{m_к + d}{m_к} \ge \frac{5}{2}$

$\frac{m_к}{m_к} + \frac{d}{m_к} \ge \frac{5}{2}$

$1 + \frac{d}{m_к} \ge \frac{5}{2}$

$\frac{d}{m_к} \ge \frac{3}{2}$

$2d \ge 3m_к$

$3m_к \le 2d \qquad |: 3$

$m_к \le \frac{2d}{3} \qquad |: d$

$\frac{m_к}{d} \le \frac{2}{3}$

3

$\frac{m_т}{d} \le \frac{4}{9}$

$\frac{m_к}{d} \le \frac{2}{3}$

=>

$\frac{m_т}{d} + \frac{m_к}{d} \le \frac{4}{9} + \frac{2}{3}$

$\frac{m_т + m_к}{d} \le \frac{10}{9}$

4

Мы искали наименьшее значение дроби:

$$\frac{1}{\frac{m_т + m_к}{d} + 1}$$

Чем больше знаменатель – тем меньше значение дроби

=>

Подставляем под $\frac{m_т + m_к}{d}$ наибольшее возможное значение, т.е. $\frac{10}{9}$

$$\frac{1}{\frac{10}{9} + 1} = 1 : \frac{19}{9} = \frac{9}{19}$$

Ответ: а) Могло, б) 10, в) $\frac{9}{19}$

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов:	1

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171218

- обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171218