

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10501
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

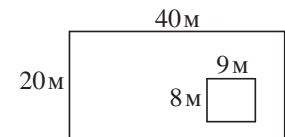
Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Найдите значение выражения $124 : \left(3\frac{7}{45} - \frac{2}{5}\right)$.
Ответ: _____.
- 2** Найдите значение выражения $39 \cdot 10 - 1,5 \cdot 10^2$.
Ответ: _____.
- 3** В школе французский язык изучают 117 учащихся, что составляет 26 % от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?
Ответ: _____.
- 4** Среднее квадратичное трёх чисел a , b и c вычисляется по формуле $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$. Найдите среднее квадратичное чисел $\sqrt{3}$, 3 и 6.
Ответ: _____.
- 5** Найдите значение выражения $\log_6 3 + \log_6 12$.
Ответ: _____.
- 6** В доме, в котором живёт Тамара, 9 этажей и несколько подъездов. Нумерация квартир начинается с № 1. На каждом этаже находится по 3 квартиры. Тамара живёт в квартире № 85. В каком подъезде живёт Тамара?
Ответ: _____.
- 7** Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 5) - \log_{\frac{1}{2}} 13 = \log_{\frac{1}{2}} 5$.
Ответ: _____.
- 8** Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 40 м и 20 м. Дом, расположенный на участке, на плане также имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 9 м и 8 м. Найдите площадь оставшейся части участка, не занятой домом. Ответ дайте в квадратных метрах.
Ответ: _____.



9 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса футбольного мяча	1) 18 кг
Б) масса дождевой капли	2) 2,8 т
В) масса взрослого бегемота	3) 20 мг
Г) масса стиральной машины	4) 750 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

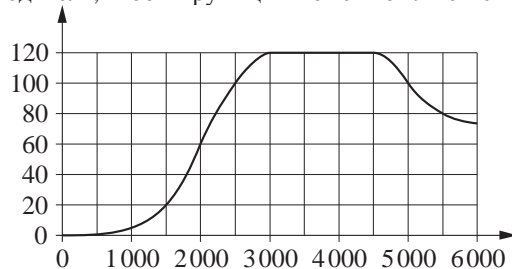
Ответ:

А	Б	В	Г

10 Вероятность того, что стекло мобильного телефона разобьётся при падении на твёрдую поверхность, равна 0,85. Найдите вероятность того, что при падении на твёрдую поверхность стекло мобильного телефона не разобьётся.

Ответ: _____.

11 На графике показана зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в Н·м. Определите по графику, какое наименьшее число оборотов в минуту должен поддерживать водитель, чтобы крутящий момент был не меньше 100 Н·м.



Ответ: _____.

12 В таблице даны результаты олимпиад по географии и биологии в 9 «А» классе.

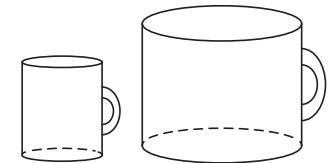
Номер ученика	Балл по географии	Балл по биологии
1	69	36
2	88	48
3	53	34
4	98	55
5	44	98
6	45	54
7	45	72
8	55	48
9	84	68

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 120 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 65 баллов.

В ответе укажите без пробелов, запятых и других дополнительных символов номера учащихся 9 «А» класса, набравших меньше 65 баллов по географии и получивших похвальные грамоты.

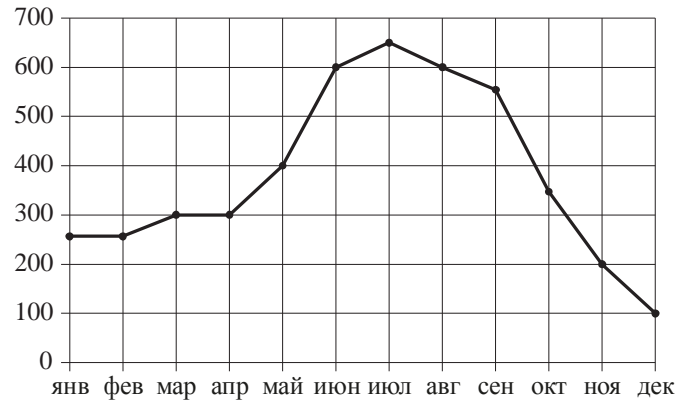
Ответ: _____.

13 Две кружки имеют форму цилиндра. Первая кружка в полтора раза ниже второй, а вторая вдвое шире первой. Во сколько раз объём первой кружки меньше объёма второй?



Ответ: _____.

- 14** На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж холодильников в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных холодильников. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж холодильников.

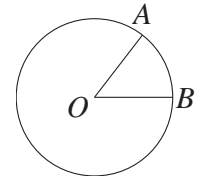
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) январь–март	1) В первый и второй месяцы периода было продано одинаковое количество холодильников.
Б) апрель–июнь	2) Ежемесячный объём продаж уменьшился более чем на 200 холодильников за весь период.
В) июль–сентябрь	3) Самое медленное уменьшение ежемесячного объёма продаж.
Г) октябрь–декабрь	4) Ежемесячный объём продаж вырос на 200 холодильников за один месяц.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

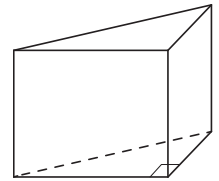
А	Б	В	Г

- 15** На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 2^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 46. Найдите длину большей дуги.



Ответ: _____.

- 16** В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 5, а гипотенуза равна $5\sqrt{2}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 4.



Ответ: _____.

- 17** Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $2^x \geq 1$	1)
Б) $0,5^x \geq 2$	2)
В) $0,5^x \leq 2$	3)
Г) $2^x \leq 1$	4)

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18 Когда какая-нибудь кошка идёт по забору, пёс Шарик, живущий в будке возле дома, обязательно лает. Выберите утверждения, которые верны при приведённом условии.

- 1) Если Шарик не лает, значит, по забору идёт кошка.
- 2) Если Шарик молчит, значит, кошка по забору не идёт.
- 3) Если по забору идёт чёрная кошка, Шарик не лает.
- 4) Если по забору пойдёт белая кошка, Шарик будет лаять.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19 Найдите трёхзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 8 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и средняя цифра которого является средним арифметическим крайних цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Улитка за день заползает вверх по дереву на 2 м, а за ночь сползает на 1 м. Высота дерева 11 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10502
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $75,6 : \left(2\frac{24}{35} - \frac{2}{7}\right)$.

Ответ: _____.

2 Найдите значение выражения $38 \cdot 10 - 1,3 \cdot 10^2$.

Ответ: _____.

3 В школе французский язык изучают 99 учащихся, что составляет 33 % от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?

Ответ: _____.

4 Среднее квадратичное трёх чисел a , b и c вычисляется по формуле $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$. Найдите среднее квадратичное чисел $\sqrt{14}$, 5 и 6.

Ответ: _____.

5 Найдите значение выражения $\log_{12} 3 + \log_{12} 4$.

Ответ: _____.

6 В доме, в котором живёт Соня, 9 этажей и несколько подъездов. Нумерация квартир начинается с № 1. На каждом этаже находится по 3 квартиры. Соня живёт в квартире № 84. В каком подъезде живёт Соня?

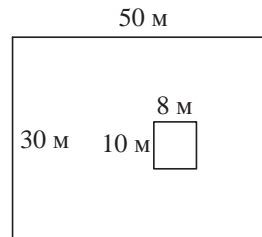
Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(7 - 2x) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} 15$.

Ответ: _____.

8

Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 50 м и 30 м. Дом, расположенный на участке, на плане также имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 8 м и 10 м. Найдите площадь оставшейся части участка, не занятой домом. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: _____.

9

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) масса спелого грецкого ореха
- Б) масса грузовой машины
- В) масса собаки
- Г) масса дождевой капли

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 8 т
- 2) 10 г
- 3) 20 мг
- 4) 12 кг

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

Ответ:

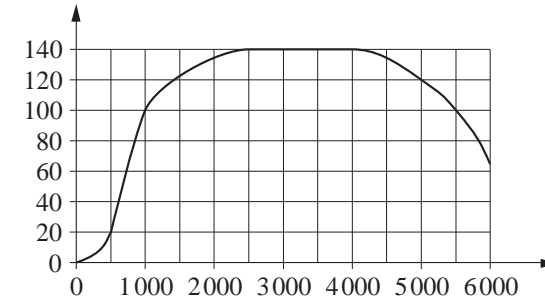
10

Вероятность того, что стекло мобильного телефона разобьётся при падении на твёрдую поверхность, равна 0,93. Найдите вероятность того, что при падении на твёрдую поверхность стекло мобильного телефона не разобьётся.

Ответ: _____.

11

На графике показана зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в Н·м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 20 Н·м. Определите по графику, какого наименьшего числа оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение.



Ответ: _____.

12

В таблице даны результаты олимпиад по физике и химии в 10 «А» классе.

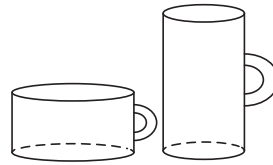
Номер ученика	Балл по физике	Балл по химии
1	84	91
2	67	64
3	56	36
4	73	58
5	43	79
6	76	75
7	53	41
8	75	54
9	76	99

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 130 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 70 баллов.

В ответе укажите без пробелов, запятых и других дополнительных символов номера учащихся 10 «А» класса, набравших меньше 70 баллов по физике и получивших похвальные грамоты.

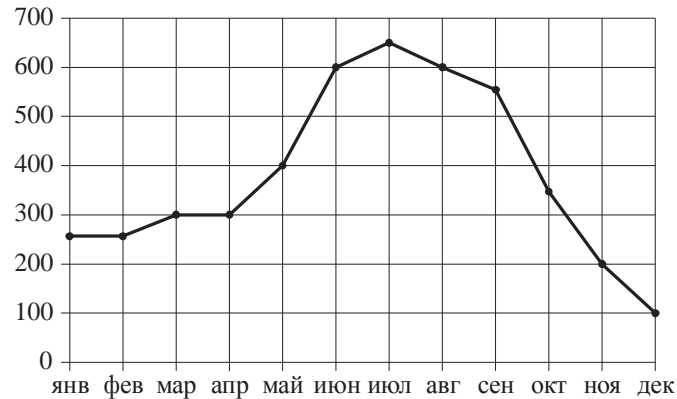
Ответ: _____.

- 13** Две кружки имеют форму цилиндра. Первая кружка в полтора раза ниже второй, а вторая втрое уже первой. Во сколько раз объём первой кружки больше объёма второй?



Ответ: _____.

- 14** На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж холодильников в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных холодильников. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж холодильников.

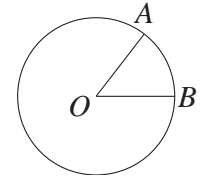
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) январь–март	1) Было продано меньше всего холодильников.
Б) апрель–июнь	2) Рост объёма продаж был наибольшим.
В) июль–сентябрь	3) Было продано около 800 холодильников.
Г) октябрь–декабрь	4) Объём продаж падал на одно и то же число холодильников в месяц.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

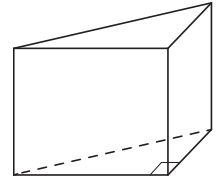
А	Б	В	Г

- 15** На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 8^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 88. Найдите длину большей дуги.



Ответ: _____.

- 16** В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 2, а гипотенуза равна $\sqrt{53}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 3.



Ответ: _____.

- 17** Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $3^x \geq \frac{1}{3}$	1)
Б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \frac{1}{3}$	2)
В) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{3}$	3)
Г) $3^x \leq \frac{1}{3}$	4)

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18 Когда учитель математики Иван Петрович ведёт урок, он обязательно отключает свой телефон. Выберите утверждения, которые верны при приведённом условии.

- 1) Если телефон Ивана Петровича включён, значит, он не ведёт урок.
- 2) Если телефон Ивана Петровича включён, значит, он ведёт урок.
- 3) Если Иван Петрович проводит контрольную работу по математике, значит, его телефон выключен.
- 4) Если Иван Петрович ведёт урок математики, значит, его телефон включён.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19 Найдите трёхзначное натуральное число, которое при делении на 4 и на 15 даёт равные ненулевые остатки и средняя цифра которого является средним арифметическим крайних цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 2 м. Высота дерева 14 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

27 апреля 2016 года

Вариант МА10503

(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $118 : \left(3\frac{41}{70} - \frac{3}{14} \right)$.

Ответ: _____.

2 Найдите значение выражения $45 \cdot 10 - 1,2 \cdot 10^2$.

Ответ: _____.

3 В школе французский язык изучают 82 учащихся, что составляет 25 % от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?

Ответ: _____.

4 Среднее квадратичное трёх чисел a , b и c вычисляется по формуле $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$. Найдите среднее квадратичное чисел 2, $2\sqrt{2}$ и 6.

Ответ: _____.

5 Найдите значение выражения $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$.

Ответ: _____.

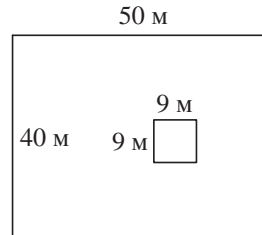
6 В доме, в котором живёт Оля, 9 этажей и несколько подъездов. Нумерация квартир начинается с № 1. На каждом этаже находится по 6 квартир. Оля живёт в квартире № 98. В каком подъезде живёт Оля?

Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения $\log_{0,3}(4x + 11) + \log_{0,3} \frac{1}{5} = \log_{0,3} 8$.

Ответ: _____.

- 8** Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 50 м и 40 м. Дом, расположенный на участке, имеет на плане форму квадрата со стороной 9 м. Найдите площадь оставшейся части участка, не занятой домом. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: _____.

- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) масса куриного яйца
- Б) масса детской коляски
- В) масса взрослого лося
- Г) масса активного вещества в таблетке

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 2,5 мг
- 2) 14 кг
- 3) 50 г
- 4) 500 кг

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

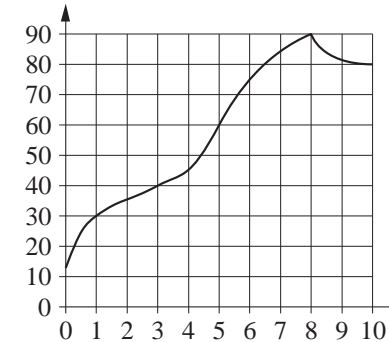
Ответ:

А	Б	В	Г

- 10** Вероятность того, что стекло мобильного телефона разобьётся при падении на твёрдую поверхность, равна 0,79. Найдите вероятность того, что при падении на твёрдую поверхность стекло мобильного телефона не разобьётся.

Ответ: _____.

- 11** На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, какое наименьшее количество минут потребуется выждать, прежде чем двигатель разогреется до 40°С.



Ответ: _____.

- 12** В таблице даны результаты олимпиад по математике и обществознанию в 9 «А» классе.

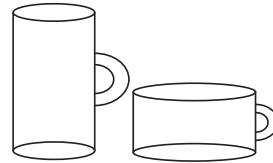
Номер ученика	Балл по математике	Балл по обществознанию
1	58	54
2	96	60
3	63	90
4	73	78
5	59	63
6	52	43
7	36	55
8	85	33
9	32	81

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 150 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 80 баллов.

В ответе укажите без пробелов, запятых и других дополнительных символов номера учащихся 9 «А» класса, набравших меньше 80 баллов по математике и получивших похвальные грамоты.

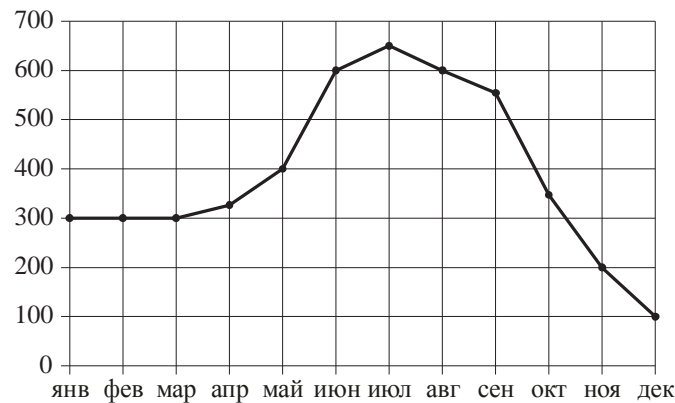
Ответ: _____.

- 13** Две кружки имеют форму цилиндра. Первая кружка в четыре с половиной раза выше второй, а вторая втрое шире первой. Во сколько раз объём первой кружки меньше объёма второй?



Ответ: _____.

- 14** На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж холодильников в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных холодильников. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж холодильников.

**ПЕРИОДЫ
ВРЕМЕНИ**

ХАРАКТЕРИСТИКИ

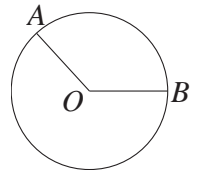
- | | |
|--------------------|--|
| А) январь–март | 1) За последний месяц периода было продано меньше 200 холодильников. |
| Б) апрель–июнь | 2) Наибольший рост ежемесячного объёма продаж. |
| В) июль–сентябрь | 3) Все три месяца объём продаж был одинаковым. |
| Г) октябрь–декабрь | 4) Ежемесячный объём продаж достигает максимума за весь год. |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

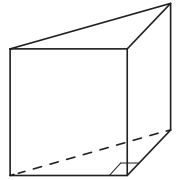
А	Б	В	Г

- 15** На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 122^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 61. Найдите длину большей дуги.



Ответ: _____.

- 16** В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 2, а гипотенуза равна $2\sqrt{2}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 4.



Ответ: _____.

- 17** Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $2^x \geq 0,5$	1)
Б) $0,5^x \geq 0,5$	2)
В) $0,5^x \leq 0,5$	3)
Г) $2^x \leq 0,5$	4)

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18 Когда какая-нибудь кошка идёт по забору, собака Жучка, живущая в будке возле дома, обязательно лает. Выберите утверждения, которые верны при приведённом условии.

- 1) Если Жучка не лает, значит, по забору идёт кошка.
- 2) Если Жучка молчит, значит, кошка по забору не идёт.
- 3) Если по забору идёт сиамская кошка, Жучка не лает.
- 4) Если по забору пойдёт кошка Муся, Жучка будет лаять.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19 Найдите трёхзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 8 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и первая цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Улитка за день заползает вверх по дереву на 2 м, а за ночь сползает на 1 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10504
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $191: \left(2\frac{1}{70} - \left(-\frac{5}{7} \right) \right)$.

Ответ: _____.

2 Найдите значение выражения $68 \cdot 10 - 2,7 \cdot 10^2$.

Ответ: _____.

3 В школе французский язык изучают 96 учащихся, что составляет 10 % от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?

Ответ: _____.

4 Среднее квадратичное трёх чисел a , b и c вычисляется по формуле $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$. Найдите среднее квадратичное чисел $\sqrt{2}$, 3 и 4.

Ответ: _____.

5 Найдите значение выражения $\log_{15} 5 + \log_{15} 45$.

Ответ: _____.

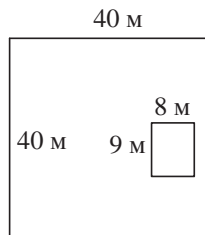
6 В доме, в котором живёт Ася, 9 этажей и несколько подъездов. Нумерация квартир начинается с № 1. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Ася живёт в квартире № 57. В каком подъезде живёт Ася?

Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения $\log_{0,3}(4x + 6) - \log_{0,3} \frac{1}{5} = \log_{0,3} 12$.

Ответ: _____.

- 8** Дачный участок имеет форму квадрата, стороны которого равны 40 м. Дом, расположенный на участке, имеет на плане форму прямоугольника, стороны которого равны 9 м и 8 м. Найдите площадь оставшейся части участка, не занятой домом. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: _____.

- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) масса кухонного холодильника
- Б) масса автобуса
- В) масса новорождённого ребёнка
- Г) масса карандаша

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 3500 г
- 2) 15 г
- 3) 18 т
- 4) 38 кг

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

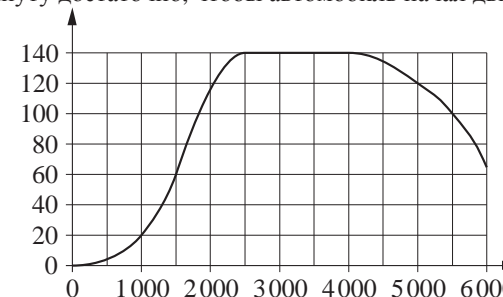
Ответ:

А	Б	В	Г

- 10** Вероятность того, что стекло мобильного телефона разобьётся при падении на твёрдую поверхность, равна 0,72. Найдите вероятность того, что при падении на твёрдую поверхность стекло мобильного телефона не разобьётся.

Ответ: _____.

- 11** На графике показана зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в Н·м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 20 Н·м. Определите по графику, какого наименьшего числа оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение.



Ответ: _____.

- 12** В таблице даны результаты олимпиад по русскому языку и биологии в 9 «А» классе.

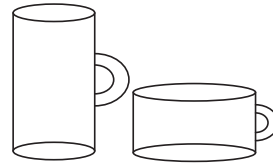
Номер ученика	Балл по русскому языку	Балл по биологии
1	70	92
2	97	36
3	30	92
4	94	70
5	81	65
6	66	32
7	41	47
8	99	79
9	69	36

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 140 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 75 баллов.

В ответе укажите без пробелов, запятых и других дополнительных символов номера учащихся 9 «А» класса, набравших меньше 75 баллов по русскому языку и получивших похвальные грамоты.

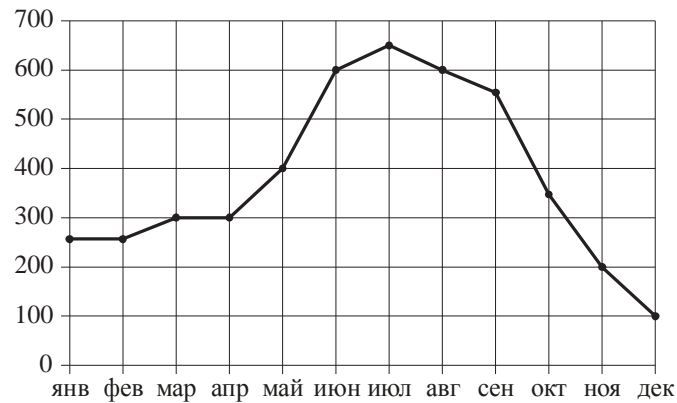
Ответ: _____.

- 13** Две кружки имеют форму цилиндра. Первая кружка в четыре с половиной раза выше второй, а вторая в полтора раза шире первой. Во сколько раз объём первой кружки больше объёма второй?



Ответ: _____.

- 14** На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж холодильников в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных холодильников. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж холодильников.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

- А) январь–март
- Б) апрель–июнь
- В) июль–сентябрь
- Г) октябрь–декабрь

ХАРАКТЕРИСТИКИ

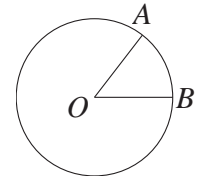
- 1) Продажи за первый и второй месяцы квартала совпадают.
- 2) Ежемесячный объём продаж достигает максимума за весь период.
- 3) За этот период ежемесячный объём продаж увеличился на 300 холодильников.
- 4) За последний месяц периода было продано меньше 200 холодильников.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

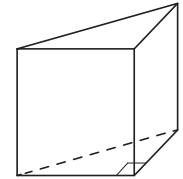
А	Б	В	Г

- 15** На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 28^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 63. Найдите длину большей дуги.



Ответ: _____.

- 16** В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 2, а гипотенуза равна $\sqrt{13}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 5.



Ответ: _____.

- 17** Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $2^x \geq 4$	1)
Б) $0,5^x \geq 4$	2)
В) $0,5^x \leq 4$	3)
Г) $2^x \leq 4$	4)

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18 Когда учитель физики Николай Дмитриевич ведёт урок, он обязательно отключает свой телефон. Выберите утверждения, которые верны при приведённом условии.

- 1) Если телефон Николая Дмитриевича включён, значит, он не ведёт урок.
- 2) Если телефон Николая Дмитриевича включён, значит, он ведёт урок.
- 3) Если Николай Дмитриевич проводит на уроке лабораторную работу по физике, значит, его телефон выключен.
- 4) Если Николай Дмитриевич ведёт урок физики, значит, его телефон включён.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19 Найдите трёхзначное натуральное число, большее 400, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и последняя цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Улитка за день заползает вверх по дереву на 3 м, а за ночь сползает на 2 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10505
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $11,61 : \left(3\frac{1}{8} - \frac{17}{40}\right)$.

Ответ: _____.

2 Найдите значение выражения $(5,2 \cdot 10^2) : (1,3 \cdot 10^{-2})$.

Ответ: _____.

3 Товар на распродаже уценили на 40 %, при этом он стал стоить 630 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

Ответ: _____.

4 Длина медианы m_c , проведённой к стороне c треугольника со сторонами a , b и c , вычисляется по формуле $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$. Найдите медиану m_c , если $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ и $c = 2$.

Ответ: _____.

5 Найдите значение выражения $(\sqrt{44} - \sqrt{11}) \cdot \sqrt{11}$.

Ответ: _____.

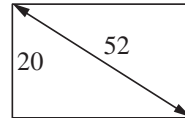
6 По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 23 рубля. Если на счёте осталось меньше 23 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёте было 600 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёта?

Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения $\log_4(2x+5)=3$.

Ответ: _____.

8 Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 52 см, а высота экрана — 20 см. Найдите ширину экрана. Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: _____.

9 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) площадь футбольного поля
- Б) площадь почтовой марки
- В) площадь купюры достоинством 100 рублей
- Г) площадь города Москвы

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 97,5 кв. км
- 2) 2511 кв. км
- 3) 150 кв. мм
- 4) 7000 кв. м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10 В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 11 из них встречается вопрос по теме «Логарифмы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Логарифмы».

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график значений атмосферного давления в некотором городе за три дня. По горизонтали указаны дни недели и время, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба. Определите по рисунку значение атмосферного давления в среду в 6:00. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.



Ответ: _____.

12 В городском парке имеется пять аттракционов: карусель, колесо обозрения, автодром, «Ромашка» и «Весёлый тир». В кассах продаётся шесть видов билетов, каждый из которых позволяет посетить один или два аттракциона. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

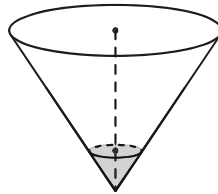
Номер билета	Набор аттракционов	Стоимость (руб.)
1	«Весёлый тир», «Ромашка»	350
2	«Весёлый тир», карусель	450
3	автодром, колесо обозрения	200
4	«Ромашка», автодром	300
5	колесо обозрения, карусель	400
6	«Ромашка»	250

Какие билеты должен купить Андрей, чтобы посетить все пять аттракционов и затратить не более 900 рублей?

В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

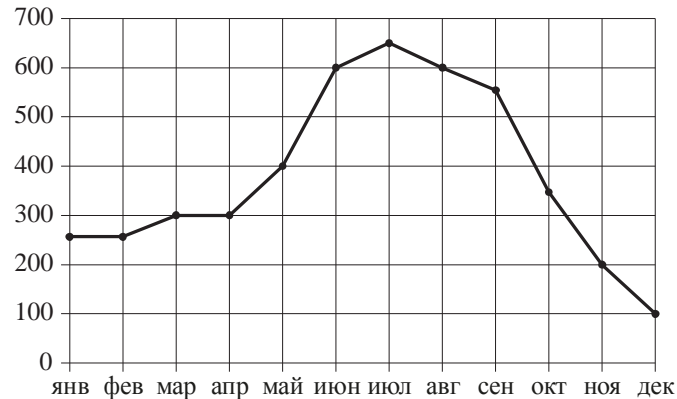
Ответ: _____.

- 13** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём сосуда 540 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Ответ: _____.

- 14** На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж холодильников в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных холодильников. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж холодильников.

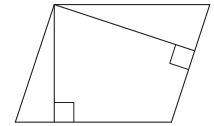
- | ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ | ХАРАКТЕРИСТИКИ |
|--------------------|--|
| А) январь–март | 1) Было продано меньше всего холодильников. |
| Б) апрель–июнь | 2) Рост объёма продаж был наибольшим. |
| В) июль–сентябрь | 3) Было продано около 800 холодильников. |
| Г) октябрь–декабрь | 4) Объём продаж падал на одно и то же число холодильников в месяц. |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

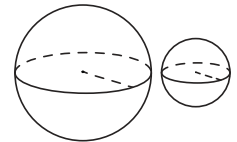
А	Б	В	Г

- 15** Стороны параллелограмма равны 10 и 55. Высота, опущенная на меньшую сторону, равна 33. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.



Ответ: _____.

- 16** Даны два шара с радиусами 2 и 1. Во сколько раз объём большого шара больше объёма другого?



Ответ: _____.

- 17** Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

РЕШЕНИЯ

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| А) $\log_5 x > 1$ | 1) $0 < x < \frac{1}{5}$ |
| Б) $\log_5 x < -1$ | 2) $x > 5$ |
| В) $\log_5 x < 1$ | 3) $x > \frac{1}{5}$ |
| Г) $\log_5 x > -1$ | 4) $0 < x < 5$ |

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18

Среди тех, кто зарегистрирован в «ВКонтакте», есть школьники из Твери. Среди школьников из Твери есть те, кто зарегистрирован в «Одноклассниках». Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Все школьники из Твери не зарегистрированы ни в «ВКонтакте», ни в «Одноклассниках».
- 2) Среди школьников из Твери нет тех, кто зарегистрирован в «ВКонтакте».
- 3) Среди школьников из Твери есть те, кто зарегистрирован в «ВКонтакте».
- 4) Хотя бы один из пользователей «Одноклассников» является школьником из Твери.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19

Найдите четырёхзначное число, кратное 25, все цифры которого различны и нечётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20

Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 3 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

27 апреля 2016 года

Вариант МА10506

(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $21,73 : \left(4\frac{29}{90} - \frac{2}{9}\right)$.

Ответ: _____.

2 Найдите значение выражения $(7,2 \cdot 10^2) : (1,2 \cdot 10^{-3})$.

Ответ: _____.

3 Товар на распродаже уценили на 40 %, при этом он стал стоить 810 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

Ответ: _____.

4 Длина медианы m_c , проведённой к стороне c треугольника со сторонами a , b и c , вычисляется по формуле $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$. Найдите медиану m_c , если $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{7}$ и $c = 4$.

Ответ: _____.

5 Найдите значение выражения $(\sqrt{32} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$.

Ответ: _____.

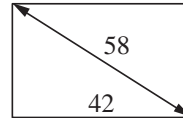
6 По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 22 рубля. Если на счёте осталось меньше 22 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёте было 500 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёта?

Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}(4x+7) = -2$.

Ответ: _____.

8 Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 58 см, а ширина экрана — 42 см. Найдите высоту экрана. Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: _____.

9 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- | | |
|----------------------------------|----------------|
| А) площадь волейбольной площадки | 1) 162 кв. м |
| Б) площадь тетрадного листа | 2) 600 кв. см |
| В) площадь письменного стола | 3) 2511 кв. км |
| Г) площадь города Москвы | 4) 1,2 кв. м |

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10 В сборнике билетов по химии всего 25 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме «Углеводороды». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Углеводороды».

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график значений атмосферного давления в некотором городе за три дня. По горизонтали указаны дни недели и время, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба. Определите по рисунку значение атмосферного давления в четверг в 12:00. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.



Ответ: _____.

12 В городском парке имеется пять аттракционов: карусель, колесо обозрения, автодром, «Ромашка» и «Весёлый тир». В кассах продаётся шесть видов билетов, каждый из которых позволяет посетить один или два аттракциона. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

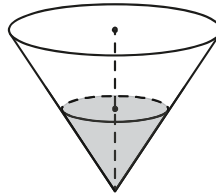
Номер билета	Набор аттракционов	Стоимость (руб.)
1	колесо обозрения, «Весёлый тир»	500
2	«Ромашка», карусель	350
3	карусель, колесо обозрения	150
4	автодром, «Весёлый тир»	500
5	«Ромашка»	250
6	автодром, «Ромашка»	450

Какие билеты должен купить Андрей, чтобы посетить все пять аттракционов и затратить не более 900 рублей?

В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

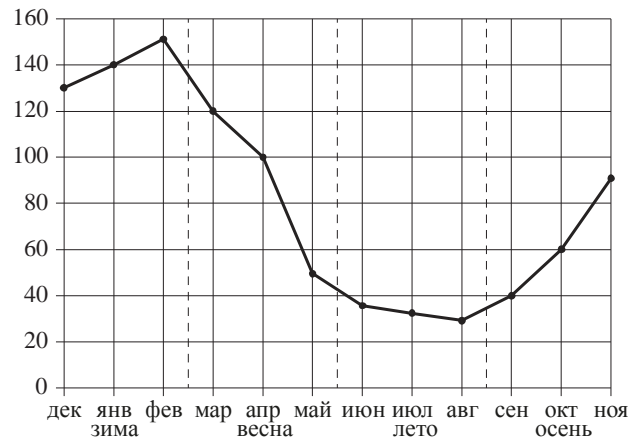
Ответ: _____.

- 13** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём сосуда 120 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Ответ: _____.

- 14** На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж обогревателей в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных обогревателей. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж обогревателей.

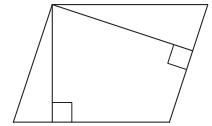
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) зима	1) Ежемесячный объём продаж был меньше 40 штук в течение всего периода.
Б) весна	2) Падение объёма продаж более чем на 60 штук за период.
В) лето	3) Ежемесячный объём продаж достиг максимума.
Г) осень	4) Ежемесячный объём продаж рос, но был меньше 100 штук.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

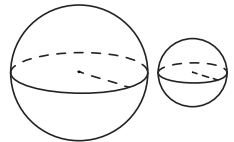
А	Б	В	Г

- 15** Стороны параллелограмма равны 22 и 44. Высота, опущенная на меньшую сторону, равна 33. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.



Ответ: _____.

- 16** Даны два шара с радиусами 6 и 3. Во сколько раз объём большого шара больше объёма другого?



Ответ: _____.

- 17** Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\log_4 x > 1$	1) $0 < x < \frac{1}{4}$
Б) $\log_4 x > -1$	2) $x > \frac{1}{4}$
В) $\log_4 x < -1$	3) $0 < x < 4$
Г) $\log_4 x < 1$	4) $x > 4$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

- 18** Среди жителей дома № 23 есть те, кто работает, и есть те, кто учится. А также есть те, кто не работает и не учится. Некоторые жители дома № 23, которые учатся, ещё и работают. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- Хотя бы один из работающих жителей дома № 23 учится.
- Все жители дома № 23 работают.
- Среди жителей дома № 23 нет тех, кто не работает и не учится.
- Хотя бы один из жителей дома № 23 работает.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

- 19** Найдите четырёхзначное число, кратное 33, все цифры которого различны и нечётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

- 20** Улитка за день заползает вверх по дереву на 2 м, а за ночь сползает на 1 м. Высота дерева 11 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10507
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $79,5 : \left(10\frac{1}{3} - \left(-\frac{4}{15} \right) \right)$.

Ответ: _____.

2 Найдите значение выражения $(5,1 \cdot 10^3) : (1,7 \cdot 10^{-3})$.

Ответ: _____.

3 Товар на распродаже уценили на 50 %, при этом он стал стоить 880 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

Ответ: _____.

4 Длина медианы m_c , проведённой к стороне c треугольника со сторонами a , b и c , вычисляется по формуле $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$. Найдите медиану m_c , если $a = 2$, $b = \sqrt{13}$ и $c = 5$.

Ответ: _____.

5 Найдите значение выражения $(\sqrt{28} - \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7}$.

Ответ: _____.

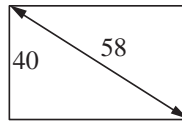
6 По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 16 рублей. Если на счёте осталось меньше 16 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёте было 300 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёта?

Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения $\lg(25x + 60) = 2$.

Ответ: _____.

8 Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 58 см, а высота экрана — 40 см. Найдите ширину экрана. Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: _____.

9 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- | | |
|------------------------------------|----------------|
| А) площадь города Санкт-Петербурга | 1) 420 кв. м |
| Б) площадь одной стороны монеты | 2) 300 кв. мм |
| В) площадь поверхности тумбочки | 3) 1439 кв. км |
| Г) площадь баскетбольной площадки | 4) 0,2 кв. м |

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10 В сборнике билетов по географии всего 25 билетов, в 20 из них встречается вопрос по теме «Реки и озёра». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Реки и озёра».

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график значений атмосферного давления в некотором городе за три дня. По горизонтали указаны дни недели и время, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба. Определите по рисунку значение атмосферного давления в среду в 18:00. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.



Ответ: _____.

12 В городском парке имеется 5 аттракционов: карусель, колесо обозрения, автодром, «Ромашка» и «Весёлый тир». В кассах продаётся 6 видов билетов, каждый из которых позволяет посетить один или два аттракциона. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

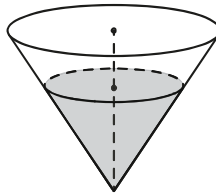
Номер билета	Набор аттракционов	Стоимость (руб.)
1	автодром	100
2	карусель, автодром	250
3	«Ромашка», «Весёлый тир»	300
4	карусель, колесо обозрения	450
5	автодром, «Ромашка»	250
6	«Весёлый тир», колесо обозрения	550

Какие билеты должен купить Андрей, чтобы посетить все пять аттракционов и затратить не более 900 рублей?

В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

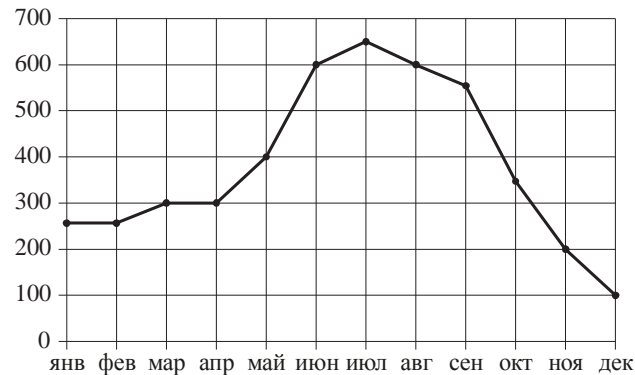
Ответ: _____.

- 13** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{3}{4}$ высоты. Объём сосуда равен 2240 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Ответ: _____.

- 14** На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж холодильников в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных холодильников. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж холодильников.

**ПЕРИОДЫ
ВРЕМЕНИ**

ХАРАКТЕРИСТИКИ

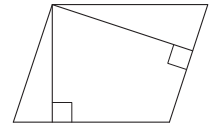
- | | |
|--------------------|---|
| А) январь–март | 1) В первый и второй месяцы периода было продано одинаковое количество холодильников. |
| Б) апрель–июнь | 2) Ежемесячный объём продаж уменьшился более чем на 200 холодильников за весь период. |
| В) июль–сентябрь | 3) Самое медленное уменьшение ежемесячного объёма продаж. |
| Г) октябрь–декабрь | 4) Ежемесячный объём продаж вырос на 200 холодильников за один месяц. |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

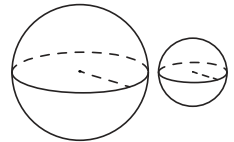
А	Б	В	Г

- 15** Стороны параллелограмма равны 4 и 8. Высота, опущенная на меньшую сторону, равна 6. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.



Ответ: _____.

- 16** Даны два шара с радиусами 3 и 1. Во сколько раз объём большего шара больше объёма другого?



Ответ: _____.

- 17** Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

РЕШЕНИЯ

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| А) $\log_2 x < -2$ | 1) $0 < x < 4$ |
| Б) $\log_2 x > 2$ | 2) $0 < x < \frac{1}{4}$ |
| В) $\log_2 x > -2$ | 3) $x > \frac{1}{4}$ |
| Г) $\log_2 x < 2$ | 4) $x > 4$ |

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18 Некоторые сотрудники фирмы летом 2014 года отдыхали на даче, а некоторые — на море. Все сотрудники, которые не отдыхали на море, отдыхали на даче. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Каждый сотрудник этой фирмы отдыхал летом 2014 года или на даче, или на море, или и там, и там.
- 2) Сотрудник этой фирмы, который летом 2014 года не отдыхал на море, не отдыхал и на даче.
- 3) Если Фаина не отдыхала летом 2014 года ни на даче, ни на море, то она является сотрудником этой фирмы.
- 4) Если сотрудник этой фирмы не отдыхал на море летом 2014 года, то он отдыхал на даче.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19 Найдите четырёхзначное число, кратное 55, все цифры которого различны и нечётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 2 м. Высота дерева 14 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10508
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $176,4 : \left(2\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{8} \right) \right)$.

Ответ: _____.

2 Найдите значение выражения $(7,5 \cdot 10^2) : (1,5 \cdot 10^{-2})$.

Ответ: _____.

3 Товар на распродаже уценили на 40 %, при этом он стал стоить 990 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

Ответ: _____.

4 Длина медианы m_c , проведённой к стороне c треугольника со сторонами a , b и c , вычисляется по формуле $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$. Найдите медиану m_c , если $a = 4$, $b = 3\sqrt{2}$ и $c = 2$.

Ответ: _____.

5 Найдите значение выражения $(\sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}$.

Ответ: _____.

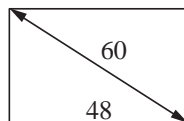
6 По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 22 рубля. Если на счёте осталось меньше 22 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёте было 400 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёта?

Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения $\log_3(2x - 5) = 2$.

Ответ: _____.

8 Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 60 см, а ширина экрана — 48 см. Найдите высоту экрана. Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: _____.

9 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) площадь почтовой марки
- Б) площадь письменного стола
- В) площадь города Санкт-Петербурга
- Г) площадь волейбольной площадки

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 162 кв. м
- 2) 1,2 кв. м
- 3) 1439 кв. км
- 4) 5,2 кв. см

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

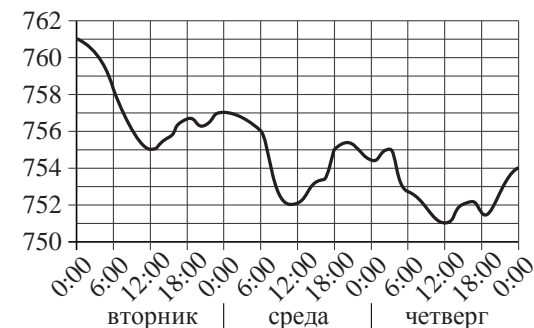
Ответ:

А	Б	В	Г

10 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 9 из них встречается вопрос по теме «Круглые черви». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Круглые черви».

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график значений атмосферного давления в некотором городе за три дня. По горизонтали указаны дни недели и время, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба. Определите по рисунку значение атмосферного давления во вторник в 12:00. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.



Ответ: _____.

12 В городском парке имеется 5 аттракционов: карусель, колесо обозрения, автодром, «Ромашка» и «Весёлый тир». В кассах продаётся 6 видов билетов, каждый из которых позволяет посетить один или два аттракциона. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

Номер билета	Набор аттракционов	Стоимость (руб.)
1	автодром, колесо обозрения	500
2	«Ромашка», карусель	250
3	автодром, «Ромашка»	500
4	«Ромашка»	150
5	карусель, «Весёлый тир»	200
6	«Весёлый тир», колесо обозрения	350

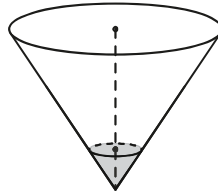
Какие билеты должен купить Андрей, чтобы посетить все пять аттракционов и затратить не более 900 рублей?

В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

13

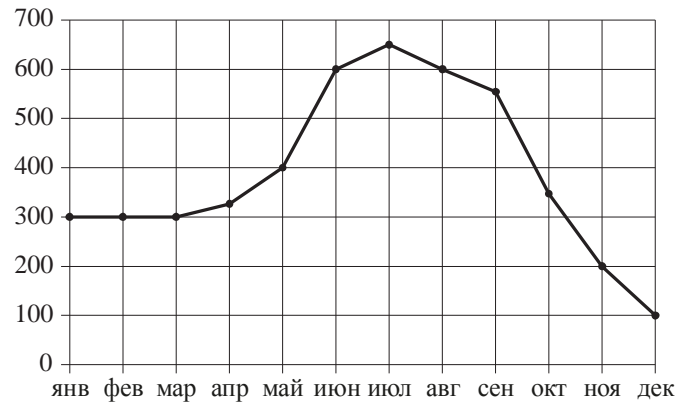
В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{4}$ высоты. Объём сосуда 6720 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Ответ: _____.

14

На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж холодильников в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных холодильников. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж холодильников.

ПЕРИОДЫ
ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- | | |
|--------------------|--|
| А) январь–март | 1) За последний месяц периода было продано меньше 200 холодильников. |
| Б) апрель–июнь | 2) Наибольший рост ежемесячного объёма продаж. |
| В) июль–сентябрь | 3) Все три месяца объём продаж был одинаковым. |
| Г) октябрь–декабрь | 4) Ежемесячный объём продаж достигает максимума за весь год. |

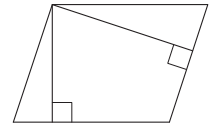
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

15

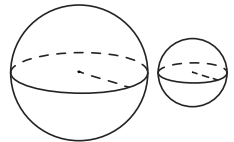
Стороны параллелограмма равны 20 и 110. Высота, опущенная на меньшую сторону, равна 66. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.



Ответ: _____.

16

Даны два шара с радиусами 5 и 1. Во сколько раз объём большого шара больше объёма другого?



Ответ: _____.

17

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

РЕШЕНИЯ

А) $\log_2 x > 1$

1) $0 < x < \frac{1}{2}$

Б) $\log_2 x < -1$

2) $x > \frac{1}{2}$

В) $\log_2 x > -1$

3) $0 < x < 2$

Г) $\log_2 x < 1$

4) $x > 2$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18 Среди дачников в посёлке есть те, кто выращивает виноград, и есть те, кто выращивает груши. А также есть те, кто не выращивает ни виноград, ни груши. Некоторые дачники в этом посёлке, выращивающие виноград, также выращивают и груши. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Если дачник из этого посёлка не выращивает виноград, то он выращивает груши.
- 2) Среди тех, кто выращивает виноград, есть дачники из этого посёлка.
- 3) Есть хотя бы один дачник в этом посёлке, который выращивает и груши, и виноград.
- 4) Если дачник в этом посёлке выращивает виноград, то он не выращивает груши.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19 Найдите четырёхзначное число, кратное 45, все цифры которого различны и нечётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Улитка за день заползает вверх по дереву на 2 м, а за ночь сползает на 1 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10509
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

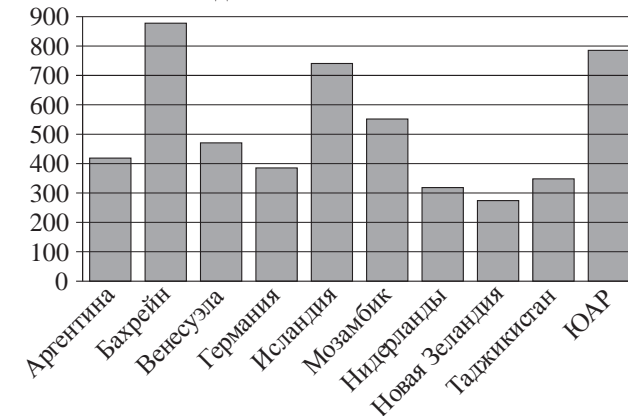
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Футболка стоила 650 рублей. После повышения цены она стала стоить 780 рублей. На сколько процентов была повышена цена на футболку?

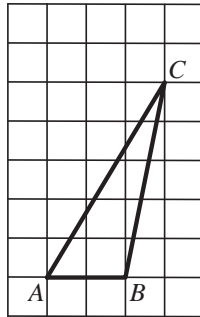
Ответ: _____.

- 2** На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимал Бахрейн, десятое место — Новая Зеландия. Какое место занимала Исландия?



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB .



Ответ: _____.

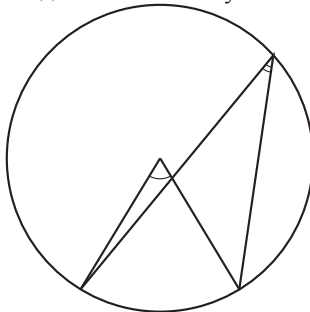
- 4 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью $0,05$ независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\log_8(x^2 + x) = \log_8(x^2 - 4)$.

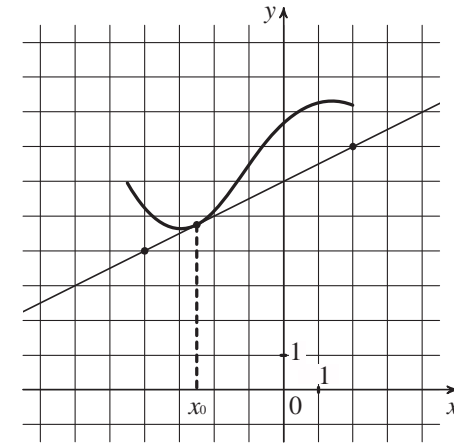
Ответ: _____.

- 6 Центральный угол на 27° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



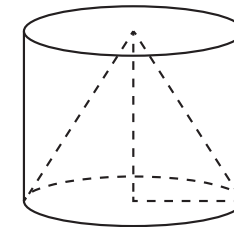
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 36 . Найдите объём конуса.



Ответ: _____.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $3^{3\sqrt{7}-2} \cdot 3^{5+3\sqrt{7}} : 3^{6\sqrt{7}}$.

Ответ: _____.

10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 48 километров? Ответ выразите в километрах.

Ответ: _____.

11 Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 18 рабочих, а во второй — 22 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Ответ: _____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 20\sin x - 23x + 24$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

- а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15 Решите неравенство $2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}$.

16 Окружность, проходящая через вершины A , C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC . Известно, что $AD = CD$.

- а) Докажите, что CP — биссектриса угла ACB .
б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?

17 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

- 18** Найдите все неотрицательные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = \sqrt{4+a^2}, \\ 5y = |6-a^2| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 19** Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно,

что $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10510
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

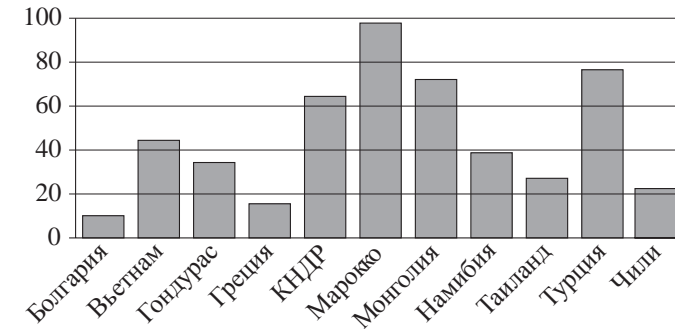
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Футболка стоила 700 рублей. После повышения цены она стала стоить 875 рублей. На сколько процентов была повышена цена на футболку?

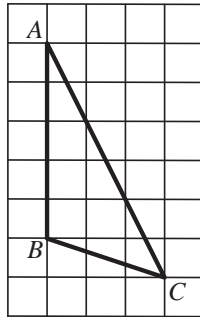
Ответ: _____.

- 2** На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимало Марокко, одиннадцатое место — Болгария. Какое место занимало Чили?



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB .



Ответ: _____.

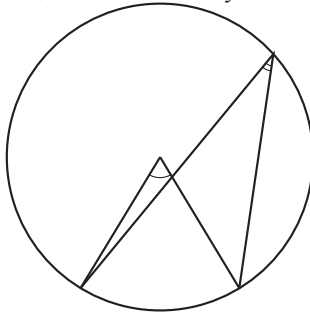
- 4 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью $0,03$ независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\log_3(x^2 + 4x) = \log_3(x^2 + 4)$.

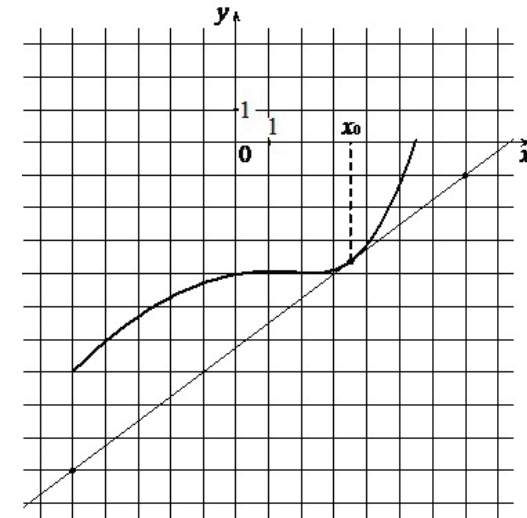
Ответ: _____.

- 6 Центральный угол на 33° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



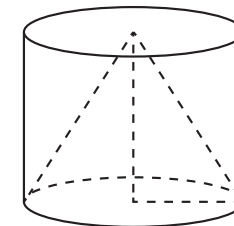
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 63 . Найдите объём конуса.



Ответ: _____.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $7^{\sqrt{5}-1} \cdot 7^{2+\sqrt{5}} : 7^{2\sqrt{5}-1}$.

Ответ: _____.

10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 32 километра? Ответ выразите в километрах.

Ответ: _____.

11 Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 2 рабочих, а во второй — 12 рабочих. Через 3 дня после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Ответ: _____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 15 \sin x - 19x + 17$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(\sqrt{2} \sin x + 1)\sqrt{-5 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

14 Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.
б) Найдите площадь сечения.

15 Решите неравенство $\log_{x^2+1}(x-3)^2 \cdot \log_{x^2+1} \frac{(x-3)^2}{(x^2+1)^3} \leq -2$.

16 В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN , причём $AM : CM = 2 : 3$ и $\cos \angle BAC = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

- а) Докажите, что угол ABC тупой.
б) Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC .

17 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн.

- 18** Найдите все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x + y)\sin \alpha + 8\sin^2 \alpha = 2\sin \alpha - 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sin \alpha + 4\sin^2 \alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 19** Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3 , если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leq 300$?

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10511
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

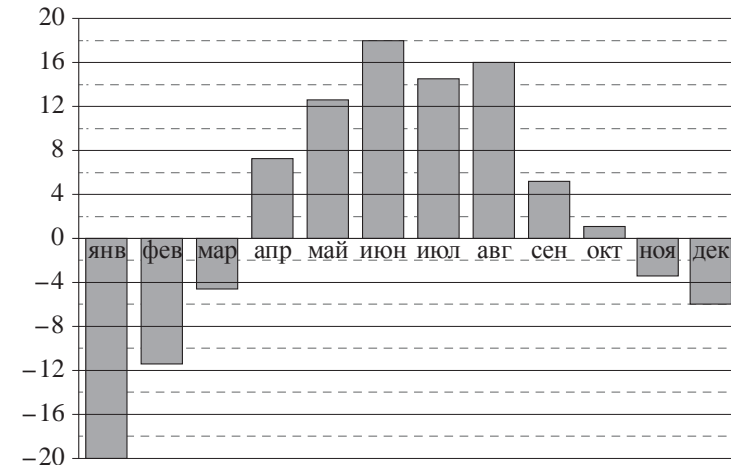
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Летом килограмм клубники стоит 90 рублей. Маша купила 1 кг 400 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна была получить с 1000 рублей?

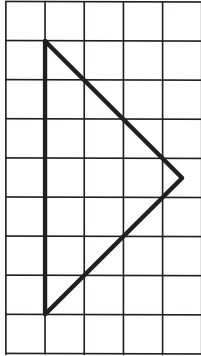
Ответ: _____.

- 2** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1973 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.



Ответ: _____.

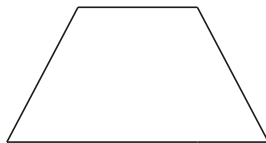
- 4 Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,84. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 8^x$.

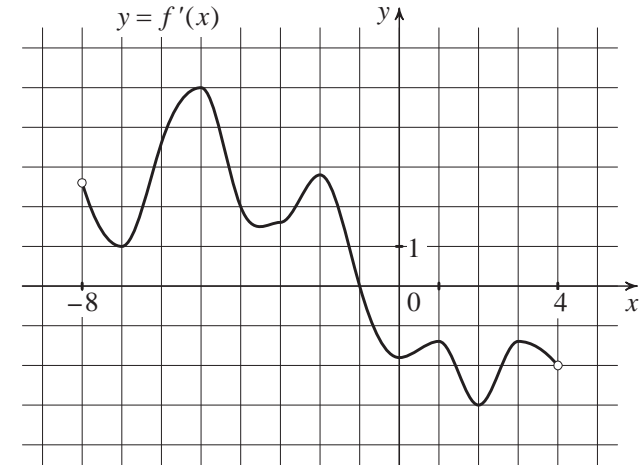
Ответ: _____.

- 6 Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 18, а её периметр равен 40. Найдите площадь трапеции.



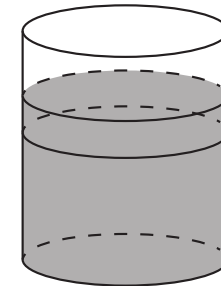
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: _____.

- 8 В цилиндрический сосуд налили 3000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 20 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 .



Ответ: _____.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{(3\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{16 - \sqrt{60}}$.

Ответ: _____.

10

Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 2,3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 23$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ: _____.

11

Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 12 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+4)^9 - 9x$ на отрезке $[-3, 5; 0]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14

В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15

Решите неравенство $2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}$.

16

Окружность, проходящая через вершины A , C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC . Известно, что $AD = CD$.

а) Докажите, что CP — биссектриса угла ACB .

б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?

17

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

- 18** Найдите все неотрицательные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = \sqrt{4+a^2}, \\ 5y = |6-a^2| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 19** Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно,

что $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

27 апреля 2016 года
Вариант МА10512
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

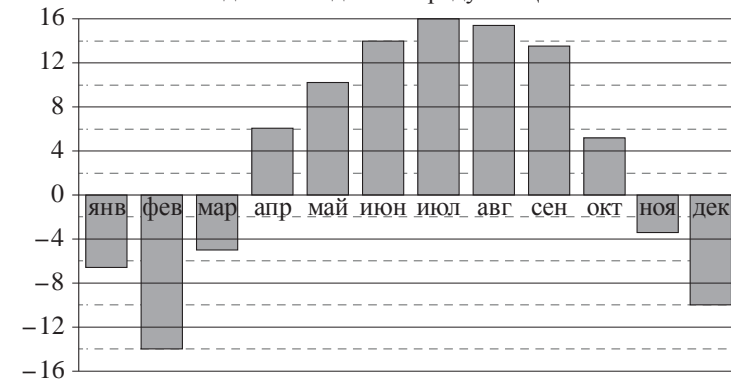
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Летом килограмм клубники стоит 90 рублей. Маша купила 1 кг 200 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна была получить с 500 рублей?

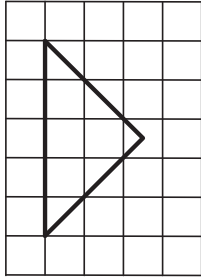
Ответ: _____.

- 2** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1994 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.



Ответ: _____.

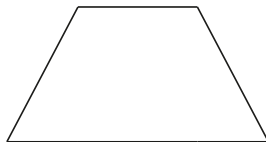
- 4 Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,95. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = 4^x$.

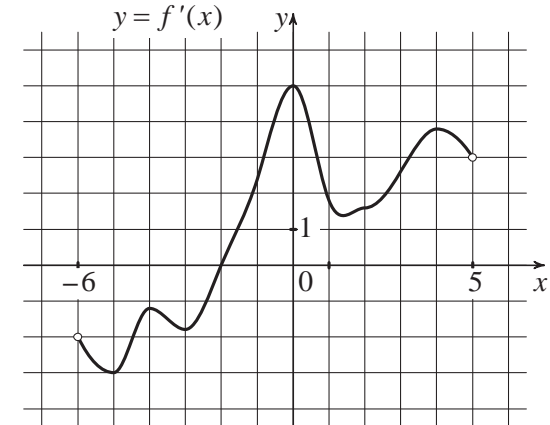
Ответ: _____.

- 6 Основания равнобедренной трапеции равны 17 и 23, а её периметр равен 50. Найдите площадь трапеции.



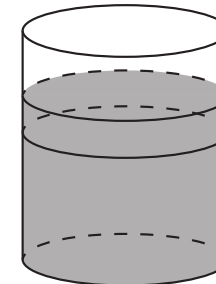
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: _____.

- 8 В цилиндрический сосуд налили 1700 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 10 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 5 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 .



Ответ: _____.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{14})^2}{5 + \sqrt{21}}$.

Ответ: _____.

10

Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 2,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 13$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ: _____.

11

Первый и второй насосы наполняют бассейн за 20 минут, второй и третий — за 24 минуты, а первый и третий — за 30 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+3)^7 - 7x$ на отрезке $[-2, 5; 0]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $(\sqrt{2} \sin x + 1)\sqrt{-5 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$.

14

Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.
б) Найдите площадь сечения.

15

Решите неравенство $\log_{x^2+1}(x-3)^2 \cdot \log_{x^2+1} \frac{(x-3)^2}{(x^2+1)^3} \leq -2$.

16

В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN , причём $AM : CM = 2 : 3$ и $\cos \angle BAC = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

- а) Докажите, что угол ABC тупой.
б) Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC .

17

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн.

- 18** Найдите все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x + y)\sin \alpha + 8\sin^2 \alpha = 2\sin \alpha - 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sin \alpha + 4\sin^2 \alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 19** Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3 , если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leq 300$?

Ответы к тренировочной работе по математике для 11 класса в форме ЕГЭ от 27.04.2016

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вариант МА10509	20	3	5	0,9975	-4	27	0,5	12	27	0,18	27	24
Вариант МА10510	25	9	3	0,9991	1	33	0,75	21	49	0,08	8	17
Вариант МА10511	874	-6	3,5	0,14	1,5	60	-1	450	3	30	8	27
Вариант МА10512	392	-10	2,5	0,08	-1	80	-2	850	4	90	16	14

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

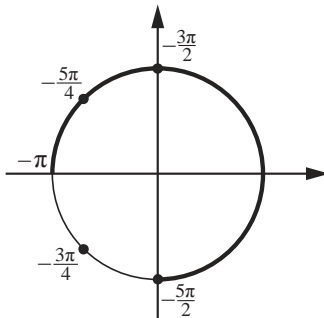
Решение.

а) Имеем

$$\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x; \quad \sqrt{2} \cos^2 x = -\cos x, \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $SABNM$.

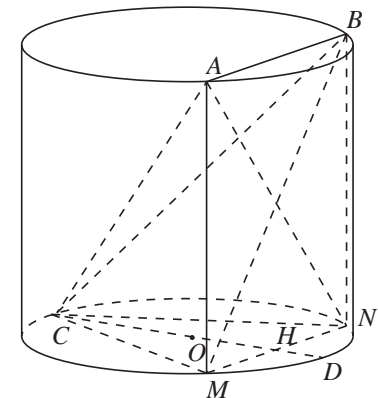
Решение.

а) Для построения сечения опустим перпендикуляры AM и BN на второе основание цилиндра. Отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB , параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны, что и требовалось доказать.

б) Площадь прямоугольника $ABNM$ равна $12 \cdot 6 = 72$. Отрезок OH равен $\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$. Высота CH пирамиды $SABNM$ равна $6 + 3\sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $SABNM$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot 72 \cdot (6 + 3\sqrt{3}) = 144 + 72\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $144 + 72\sqrt{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство $2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}, \quad 2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{2 \cdot \frac{x}{x+1} + 3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2 \cdot \frac{x}{x+1}}{x+1}}.$$

Сделаем замену $y = 2^{\frac{x}{x+1}}$. Тогда данное неравенство принимает вид

$$y - 8y^2 + 8 \leq y^2, \quad 9y^2 - y - 8 \geq 0, \quad (y-1)(9y+8) \geq 0; \quad y \leq -\frac{9}{8} \text{ или } y \geq 1.$$

Сделаем обратную замену:

$$2^{\frac{x}{x+1}} \geq 1, \quad \frac{x}{x+1} \geq 0, \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x < -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$.

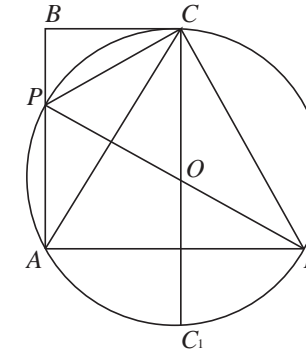
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

Окружность, проходящая через вершины A , C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC . Известно, что $AD = CD$.

- а) Докажите, что CP — биссектриса угла ACB .
 б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?

Решение.



а) Пусть O — центр окружности. Прямая OC перпендикулярна касательной BC , а так как хорда AD параллельна BC , прямая OC перпендикулярна прямой AD . Диаметр CC_1 перпендикулярен хорде AD , а значит, делит её пополам. Высота треугольника ACD является его медианой, значит, треугольник равнобедренный, $AC = CD$, а так как $AD = CD$, треугольник равносторонний. Тогда $\angle ACB = \angle CAD = 60^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ - \angle CAD = 30^\circ$.

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle BCP = \angle PAC = \angle BAC = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle ACB$.

Следовательно, CP — биссектриса угла ACB .

б) Пусть $AC = AD = a$. Тогда $AB = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BC = \frac{1}{2} AC = \frac{a}{2}$, значит,

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, значит,

$$AP = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Поэтому}$$

$$S_{APD} = \frac{1}{2} AD \cdot AP = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6},$$

$$S_{BCDP} = S_{ABCD} - S_{APD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{a^2\sqrt{3}}{6} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{APD}}{S_{BCDP}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{6}}{\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: 4:5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

Решение.

Обозначим через S размер кредита. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по $0,2S$ млн. Всего $0,6S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1,2S$ млн. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1,2S - x$, а в середине 5-го года он равен $1,2(1,2S - x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, т. е. последняя выплата равна $1,2(1,2S - x)$ и по условию равна x . Значит,

$$1,2(1,2S - x) = x, \quad 2,2x = 1,44S, \quad x = \frac{144}{220}S = \frac{36}{55}S,$$

и общий размер выплат равен $0,6S + \frac{72}{55}S = \frac{105}{55}S = \frac{21}{11}S$. По условию

$$\frac{21}{11}S > 10, \quad 21S > 110.$$

При $S = 6$ это неравенство верно, а при $S = 5$ оно неверно, как и при меньших S .

Ответ: 6 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

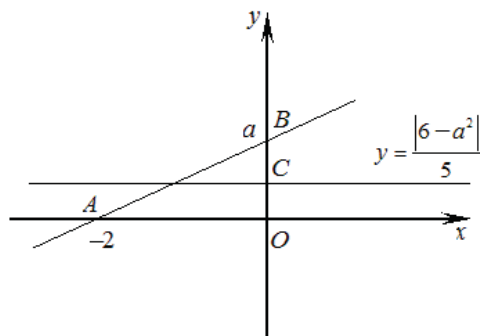
18 Найдите все неотрицательные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = \sqrt{4+a^2}, \\ 5y = |6-a^2| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первому уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x; y)$, которые лежат на отрезке AB прямой, соединяющей точки $A(-2; 0)$ и $B(0; a)$, где $a \geq 0$, поскольку уравнение задаёт множество точек $(x; y)$, сумма расстояний от каждой из которых до точек A и B равна $\sqrt{4+a^2}$, что равно длине отрезка AB .



Второму уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x; y)$, которые лежат на прямой $y = \frac{|6-a^2|}{5}$, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $C\left(0; \frac{|6-a^2|}{5}\right)$.

Отсюда следует, что условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда точка C лежит между точками O и B , причём если точка C совпадает с точкой A или с точкой B , то условие задачи выполнено.

Решим неравенство $0 \leq \frac{|6-a^2|}{5} \leq a$. Имеем

$$0 \leq \frac{|6-a^2|}{5} \leq a; \quad |6-a^2| \leq 5a; \quad \begin{cases} 6-a^2 \leq 5a, \\ 6-a^2 \geq -5a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)(a+6) \geq 0, & \begin{cases} a \geq 1, \\ a \leq -6; \end{cases} \\ (a+1)(a-6) \leq 0; & \begin{cases} a \leq 6, \\ a \geq -1; \end{cases} \end{cases} \quad 1 \leq a \leq 6.$$

Ответ: $1 \leq a \leq 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и отрезка (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}, \frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии 1, 6, 11, 16,... и 1, 2, 3, 4, ... соответственно. Для этих прогрессий имеем $\frac{a_1}{b_1} = 1, \frac{a_2}{b_2} = 3$ и $\frac{a_4}{b_4} = 4$.

б) Предположим, что такие прогрессии существуют. Тогда одно из чисел $\frac{a_1}{b_1}$ или $\frac{b_2}{a_2}$ не меньше 1, а второе больше 1. Значит, либо $a_1 \geq b_1$ и $a_2 < b_2$, либо $a_1 > b_1$ и $a_2 \leq b_2$, и, следовательно, $a_2 - a_1 < b_2 - b_1$. Отсюда, используя свойства арифметической прогрессии, получаем

$$a_4 = a_2 + 2(a_2 - a_1) < b_2 + 2(b_2 - b_1) = b_4 \text{ и } \frac{a_4}{b_4} < 1.$$

Пришли к противоречию.

в) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ соответственно. Из условия следует, что числа c и d натуральные, а $\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_2}{b_2}$ целые и не равные нулю.

Имеем

$$\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + c}{b_1 + d} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{cb_1 - da_1}{b_1(b_1 + d)} \text{ и}$$

$$\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + 9c}{b_1 + 9d} - \frac{a_1 + c}{b_1 + d} = \frac{8(cb_1 - da_1)}{(b_1 + d)(b_1 + 9d)}.$$

Знаменатели дробей $\frac{cb_1 - da_1}{b_1(b_1 + d)}$ и $\frac{8(cb_1 - da_1)}{(b_1 + d)(b_1 + 9d)}$ положительны,

а числители этих дробей имеют одинаковый знак. Значит, числа $\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_2}{b_2}$ имеют одинаковый знак, то есть либо $1 \leq \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_{10}}{b_{10}}$, либо $1 \leq \frac{a_{10}}{b_{10}} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1}$. В обоих случаях получаем, что $\frac{a_2}{b_2} \geq 2$.

Если прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ являются прогрессиями 9, 32, ..., 216,... и 9, 16, ..., 72,... соответственно, то $\frac{a_1}{b_1} = 1, \frac{a_2}{b_2} = 2$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}} = 3$.

Этот пример показывает, что наименьшее возможное значение дроби $\frac{a_2}{b_2}$ равно 2.

Ответ: а) Да, например, 1, 6, 11, 16,... и 1, 2, 3, 4, ... соответственно; б) нет; в) 2.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. а, – обоснованное решение в п. б, – искомая оценка в п. в, – пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $(\sqrt{2} \sin x + 1)\sqrt{-5 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$.

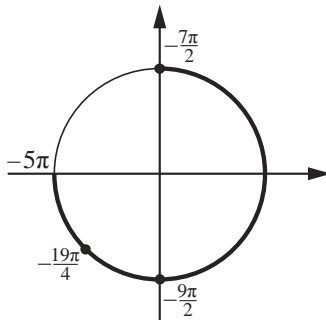
Решение.

а) Имеем

$$(\sqrt{2} \sin x + 1)\sqrt{-5 \cos x} = 0; \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sqrt{2} \sin x + 1 = 0, \\ \cos x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \leq 0; \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $-\frac{19\pi}{4}, -\frac{9\pi}{2}$ и $-\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{4}, -\frac{9\pi}{2}$ и $-\frac{7\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.
- б) Найдите площадь сечения.

Решение.

а) Пусть треугольник MAB — искомое сечение, перпендикулярное образующей MK , и пусть T — точка его пересечения с диаметром, проходящим через точку K . В треугольнике MTK угол K равен 30° . Следовательно, $MT = 2, TK = 4$.

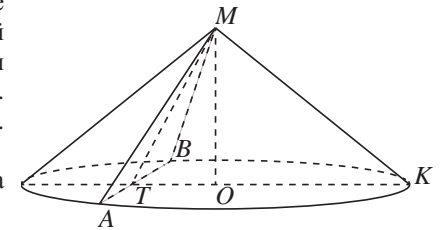
В треугольнике MTB образующая конуса $MB = 2\sqrt{3}, TB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Получаем, что угол TMB больше угла MVT , то есть больше 45° . Следовательно, $\angle AMB = 2\angle TMB$ больше 90° .

б) Площадь треугольника MBA равна

$$S_{MBA} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MT = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $4\sqrt{2}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство $\log_{x^2+1}(x-3) \cdot \log_{x^2+1} \frac{(x-3)^2}{(x^2+1)^3} \leq -2$.

Решение.

Сделаем замену $y = \log_{x^2+1}(x-3)^2$. Тогда данное неравенство принимает вид $y(y-3) \leq -2$; $(y-1)(y-2) \leq 0$; $1 \leq y \leq 2$.

Сделаем обратную замену: $1 \leq \log_{x^2+1}(x-3)^2 \leq 2$. Поскольку при всех $x \neq 0$ справедливо неравенство $x^2+1 > 1$, получаем систему

$$x^2+1 \leq (x-3)^2 \leq (x^2+1)^2,$$

равносильную данному неравенству, поскольку число 0 не является её решением.

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} x^2+1 \leq (x-3)^2, & \begin{cases} x^2+1-x^2+6x-9 \leq 0, \\ (x-3)^2 \leq (x^2+1)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} (x-3+ x^2+1)(x-3-x^2-1) \leq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-8 \leq 0, & \begin{cases} x \leq \frac{4}{3}, \\ (x^2+x-2)(-x^2+x-4) \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} (x^2+x-2)(x^2-x+4) \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{4}{3}, \\ x \geq 1, \\ x \leq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

16

В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN , причём $AM : CM = 2 : 3$ и $\cos \angle BAC = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

а) Докажите, что угол ABC тупой.

б) Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC .

Решение.

а) Поскольку $\cos \angle BAC > 0$, точки C и M лежат по одну сторону от точки A , а так как $AM < CM$, точка M лежит на отрезке AC .

Положим $AM = 2x$, $CM = 3x$. Из прямоугольного треугольника ABM находим, что

$$AB = \frac{AM}{\cos \angle BAC} = \frac{2x}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = x\sqrt{5}.$$

По теореме Пифагора

$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = 5x^2 - 4x^2 = x^2,$$

$$BC = \sqrt{CM^2 + BM^2} = \sqrt{9x^2 + x^2} = x\sqrt{10}.$$

По теореме косинусов

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{5x^2 + 10x^2 - 25x^2}{2AB \cdot BC} = -\frac{10x^2}{2AB \cdot BC} < 0.$$

Следовательно, $\angle ABC > 90^\circ$.

б) Из прямоугольных треугольников ANC и BNC находим, что

$$CN = AC \cdot \sin \angle BAC = 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = x\sqrt{5},$$

$$BN = \sqrt{BC^2 - CN^2} = \sqrt{10x^2 - 5x^2} = x\sqrt{5},$$

значит, B — середина AN .

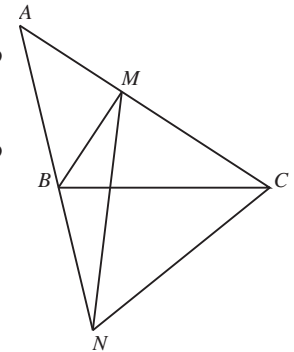
Обозначим $S_{ANC} = S$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S, \quad S_{AMN} = \frac{AM}{AC} \cdot S_{ANC} = \frac{2}{5}S, \quad S_{BMN} = \frac{1}{2}S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}S = \frac{1}{5}S.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{5}S}{\frac{1}{2}S} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $\frac{2}{5}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн.

Решение.

Обозначим через S размер кредита. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по $0,1S$ млн. Всего $0,3S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1,1S$ млн. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1,1S - x$, а в середине 5-го года он равен $1,1(1,1S - x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, т. е. последняя выплата равна $1,1(1,1S - x)$ и по условию равна x . Значит,

$$1,1(1,1S - x) = x, \quad 2,1x = 1,21S, \quad x = \frac{121}{210}S,$$

и общий размер выплат равен $0,3S + \frac{242}{210}S = \frac{305}{210}S = \frac{61}{42}S$. По условию

$$\frac{61}{42}S < 8, \quad 61S < 336.$$

При $S = 5$ это неравенство верно, а при $S = 6$ оно неверно, как и при больших S .

Ответ: 5 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18 Найдите все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x+y)\sin \alpha + 8\sin^2 \alpha = 2\sin \alpha - 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sin \alpha + 4\sin^2 \alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Обозначим $a = \sin \alpha$. Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4a(x+y) + 8a^2 = 2a - 1, \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2a + 4a^2. \end{cases}$$

Если пара $(x; y)$ — решение системы, то пара $(y; x)$ тоже решение.

Следовательно, единственное решение может иметь вид $(x; x)$, где $x \neq 0$.

Пусть $(x; x)$, где $x \neq 0$, — решение системы. Тогда

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 4a(x+x) + 8a^2 = 2a - 1, & \begin{cases} 2(x-2a)^2 = 2a - 1, \\ (2a-1)(a+1) = 0. \end{cases} \\ \frac{x}{x} + \frac{x}{x} = 2a + 4a^2; \end{cases}$$

Отсюда видим, что если $a = -1$, то система решений не имеет, а при $a = \frac{1}{2}$ система имеет единственное решение.

Решим уравнение $\frac{1}{2} = \sin \alpha$, $0 < \alpha < \pi$. Получим $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения α	2
Задача верно сведена к решению системы двух уравнений с одной неизвестной	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

- а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?
 б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?
 в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3 , если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leq 300$?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$. Для этих прогрессий имеем $a_1b_1 + a_3b_3 = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 36 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3a_2b_2$.

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} a_1b_1 + 2a_4b_4 &= a_1b_1 + 2(a_1 + 3c)(b_1 + 3d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 18cd, \\ 3a_3b_3 &= 3(a_1 + 2c)(b_1 + 2d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 12cd \\ &\text{и } a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd. \end{aligned}$$

Если $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$, то $cd = 0$. Пришли к противоречию, ведь по условию $c > 0$ и $d > 0$.

в) Как и ранее, обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ соответственно. Тогда по условию $c \geq 1$ и $d \geq 1$. По доказанному в пункте б) имеем $a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd$. Значит,

$$a_3b_3 = \frac{a_1b_1 + 2a_4b_4 - 6cd}{3} \leq \frac{300 - 6}{3} = 98.$$

Если прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ являются прогрессиями $5, 6, 7, 8, \dots$ и $12, 13, 14, 15, \dots$ соответственно, то

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = 5 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 15 = 300 \text{ и } a_3b_3 = 7 \cdot 14 = 98.$$

Этот пример показывает, что наименьшее возможное значение произведения a_3b_3 равно 98.

Ответ: а) Да, например $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$; б) нет; в) 98.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. <i>a</i> , – обоснованное решение в п. <i>б</i> , – искомая оценка в п. <i>в</i> , – пример в п. <i>в</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

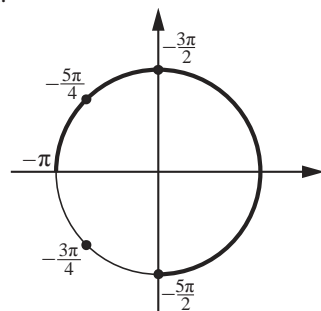
Решение.

а) Имеем

$$\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x; \quad \sqrt{2} \cos^2 x = -\cos x, \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или в пункте <i>b</i> . ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

- а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

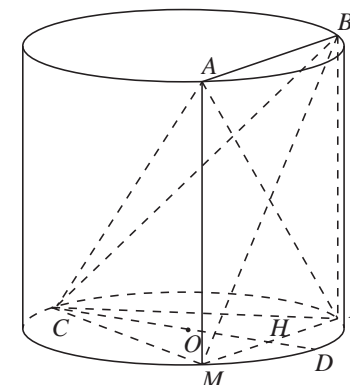
Решение.

а) Для построения сечения опустим перпендикуляры AM и BN на второе основание цилиндра. Отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB , параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны, что и требовалось доказать.

б) Площадь прямоугольника $ABNM$ равна $12 \cdot 6 = 72$. Отрезок OH равен $\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$. Высота CH пирамиды $CABNM$ равна $6 + 3\sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $CABNM$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot 72 \cdot (6 + 3\sqrt{3}) = 144 + 72\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $144 + 72\sqrt{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	2
Верно доказан пункт <i>a</i> . ИЛИ Верно решён пункт <i>b</i> при отсутствии обоснований в пункте <i>a</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство $2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}, \quad 2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{x}{x+1}+3} + 8 \leq 2^{\frac{x}{x+1}}.$$

Сделаем замену $y = 2^{\frac{x}{x+1}}$. Тогда данное неравенство принимает вид

$$y - 8y^2 + 8 \leq y^2, \quad 9y^2 - y - 8 \geq 0, \quad (y-1)(9y+8) \geq 0; \quad y \leq -\frac{9}{8} \text{ или } y \geq 1.$$

Сделаем обратную замену:

$$2^{\frac{x}{x+1}} \geq 1, \quad \frac{x}{x+1} \geq 0, \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x < -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$.

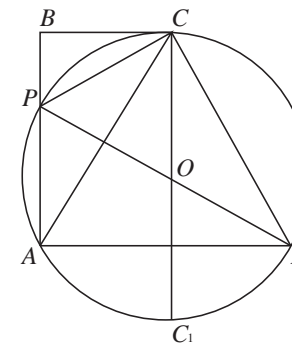
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

Окружность, проходящая через вершины A , C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC . Известно, что $AD = CD$.

- а) Докажите, что CP — биссектриса угла ACB .
 б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?

Решение.



а) Пусть O — центр окружности. Прямая OC перпендикулярна касательной BC , а так как хорда AD параллельна BC , прямая OC перпендикулярна прямой AD . Диаметр CC_1 перпендикулярен хорде AD , а значит, делит её пополам. Высота треугольника ACD является его медианой, значит, треугольник равнобедренный, $AC = CD$, а так как $AD = CD$, треугольник равносторонний. Тогда $\angle ACB = \angle CAD = 60^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ - \angle CAD = 30^\circ$.

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle BCP = \angle PAC = \angle BAC = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle ACB$.

Следовательно, CP — биссектриса угла ACB .

б) Пусть $AC = AD = a$. Тогда $AB = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BC = \frac{1}{2} AC = \frac{a}{2}$, значит,

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, значит,

$$AP = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Поэтому}$$

$$S_{APD} = \frac{1}{2} AD \cdot AP = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6},$$

$$S_{BCDP} = S_{ABCD} - S_{APD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{a^2\sqrt{3}}{6} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{APD}}{S_{BCDP}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{6}}{\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: 4:5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

Решение.

Обозначим через S размер кредита. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по $0,2S$ млн. Всего $0,6S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1,2S$ млн. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1,2S - x$, а в середине 5-го года он равен $1,2(1,2S - x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, т. е. последняя выплата равна $1,2(1,2S - x)$ и по условию равна x . Значит,

$$1,2(1,2S - x) = x, \quad 2,2x = 1,44S, \quad x = \frac{144}{220}S = \frac{36}{55}S,$$

и общий размер выплат равен $0,6S + \frac{72}{55}S = \frac{105}{55}S = \frac{21}{11}S$. По условию

$$\frac{21}{11}S > 10, \quad 21S > 110.$$

При $S = 6$ это неравенство верно, а при $S = 5$ оно неверно, как и при меньших S .

Ответ: 6 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

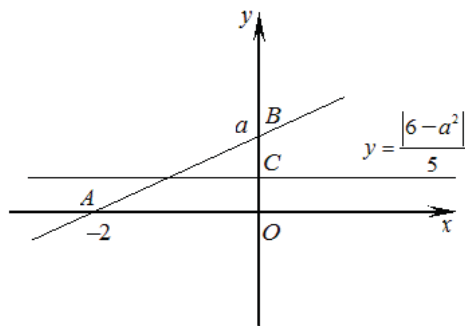
18 Найдите все неотрицательные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = \sqrt{4+a^2}, \\ 5y = |6-a^2| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первому уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x; y)$, которые лежат на отрезке AB прямой, соединяющей точки $A(-2; 0)$ и $B(0; a)$, где $a \geq 0$, поскольку уравнение задаёт множество точек $(x; y)$, сумма расстояний от каждой из которых до точек A и B равна $\sqrt{4+a^2}$, что равно длине отрезка AB .



Второму уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x; y)$, которые лежат на прямой $y = \frac{|6-a^2|}{5}$, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $C\left(0; \frac{|6-a^2|}{5}\right)$.

Отсюда следует, что условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда точка C лежит между точками O и B , причём если точка C совпадает с точкой A или с точкой B , то условие задачи выполнено.

Решим неравенство $0 \leq \frac{|6-a^2|}{5} \leq a$. Имеем

$$0 \leq \frac{|6-a^2|}{5} \leq a; \quad |6-a^2| \leq 5a; \quad \begin{cases} 6-a^2 \leq 5a, \\ 6-a^2 \geq -5a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)(a+6) \geq 0, & \begin{cases} a \geq 1, \\ a \leq 6; \end{cases} \\ (a+1)(a-6) \leq 0; & 1 \leq a \leq 6. \end{cases}$$

Ответ: $1 \leq a \leq 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и отрезка (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}, \frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии 1, 6, 11, 16, ... и 1, 2, 3, 4, ... соответственно. Для этих прогрессий имеем $\frac{a_1}{b_1} = 1, \frac{a_2}{b_2} = 3$ и $\frac{a_4}{b_4} = 4$.

б) Предположим, что такие прогрессии существуют. Тогда одно из чисел $\frac{a_1}{b_1}$ или $\frac{b_2}{a_2}$ не меньше 1, а второе больше 1. Значит, либо $a_1 \geq b_1$ и $a_2 < b_2$, либо $a_1 > b_1$ и $a_2 \leq b_2$, и, следовательно, $a_2 - a_1 < b_2 - b_1$. Отсюда, используя свойства арифметической прогрессии, получаем

$$a_4 = a_2 + 2(a_2 - a_1) < b_2 + 2(b_2 - b_1) = b_4 \text{ и } \frac{a_4}{b_4} < 1.$$

Пришли к противоречию.

в) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ соответственно. Из условия следует, что числа c и d натуральные, а $\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_2}{b_2}$ целые и не равные нулю.

Имеем

$$\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + c}{b_1 + d} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{cb_1 - da_1}{b_1(b_1 + d)} \text{ и}$$

$$\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + 9c}{b_1 + 9d} - \frac{a_1 + c}{b_1 + d} = \frac{8(cb_1 - da_1)}{(b_1 + d)(b_1 + 9d)}.$$

Знаменатели дробей $\frac{cb_1 - da_1}{b_1(b_1 + d)}$ и $\frac{8(cb_1 - da_1)}{(b_1 + d)(b_1 + 9d)}$ положительны,

а числители этих дробей имеют одинаковый знак. Значит, числа $\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_2}{b_2}$ имеют одинаковый знак, то есть либо $1 \leq \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_{10}}{b_{10}}$, либо $1 \leq \frac{a_{10}}{b_{10}} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1}$. В обоих случаях получаем, что $\frac{a_2}{b_2} \geq 2$.

Если прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ являются прогрессиями 9, 32, ..., 216, ... и 9, 16, ..., 72, ... соответственно, то $\frac{a_1}{b_1} = 1, \frac{a_2}{b_2} = 2$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}} = 3$.

Этот пример показывает, что наименьшее возможное значение дроби $\frac{a_2}{b_2}$

равно 2.

Ответ: а) Да, например, 1, 6, 11, 16, ... и 1, 2, 3, 4, ... соответственно; б) нет; в) 2.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. а, – обоснованное решение в п. б, – искомая оценка в п. в, – пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $(\sqrt{2} \sin x + 1)\sqrt{-5 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$.

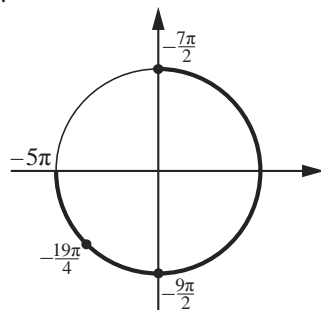
Решение.

а) Имеем

$$(\sqrt{2} \sin x + 1)\sqrt{-5 \cos x} = 0; \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sqrt{2} \sin x + 1 = 0, \\ \cos x \leq 0; \end{cases} \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \leq 0; \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $-\frac{19\pi}{4}, -\frac{9\pi}{2}$ и $-\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{4}, -\frac{9\pi}{2}$ и $-\frac{7\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.
б) Найдите площадь сечения.

Решение.

а) Пусть треугольник MAB — искомое сечение, перпендикулярное образующей MK , и пусть T — точка его пересечения с диаметром, проходящим через точку K . В треугольнике MTK угол K равен 30° . Следовательно, $MT = 2, TK = 4$.

В треугольнике MTB образующая конуса

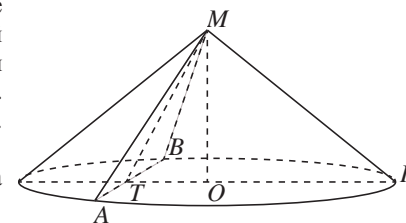
$$MB = 2\sqrt{3}, TB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Получаем, что угол TMB больше угла MBT , то есть больше 45° . Следовательно, $\angle AMB = 2\angle TMB$ больше 90° .

б) Площадь треугольника MBA равна

$$S_{MBA} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MT = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $4\sqrt{2}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство $\log_{x^2+1}(x-3)^2 \cdot \log_{x^2+1} \frac{(x-3)^2}{(x^2+1)^3} \leq -2$.

Решение.

Сделаем замену $y = \log_{x^2+1}(x-3)^2$. Тогда данное неравенство принимает вид $y(y-3) \leq -2$; $(y-1)(y-2) \leq 0$; $1 \leq y \leq 2$.

Сделаем обратную замену: $1 \leq \log_{x^2+1}(x-3)^2 \leq 2$. Поскольку при всех $x \neq 0$ справедливо неравенство $x^2+1 > 1$, получаем систему

$$x^2+1 \leq (x-3)^2 \leq (x^2+1)^2,$$

равносильную данному неравенству, поскольку число 0 не является её решением.

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} x^2+1 \leq (x-3)^2, & \begin{cases} x^2+1-x^2+6x-9 \leq 0, \\ (x-3)^2 \leq (x^2+1)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} (x-3+x^2+1)(x-3-x^2-1) \leq 0; \\ 6x-8 \leq 0, \end{cases} & \begin{cases} x \leq \frac{4}{3}, \\ (x^2+x-2)(-x^2+x-4) \leq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{4}{3}, \\ (x^2+x-2)(-x^2+x-4) \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq \frac{4}{3}, \\ (x^2+x-2)(x^2-x+4) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{4}{3}, \\ x \geq 1, \\ x \leq -2; \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN , причём $AM : CM = 2 : 3$ и $\cos \angle BAC = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

- а) Докажите, что угол ABC тупой.
б) Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC .

Решение.

а) Поскольку $\cos \angle BAC > 0$, точки C и M лежат по одну сторону от точки A , а так как $AM < CM$, точка M лежит на отрезке AC .

Положим $AM = 2x$, $CM = 3x$. Из прямоугольного треугольника ABM находим, что

$$AB = \frac{AM}{\cos \angle BAC} = \frac{2x}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = x\sqrt{5}.$$

По теореме Пифагора

$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = 5x^2 - 4x^2 = x^2,$$

$$BC = \sqrt{CM^2 + BM^2} = \sqrt{9x^2 + x^2} = x\sqrt{10}.$$

По теореме косинусов

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{5x^2 + 10x^2 - 25x^2}{2AB \cdot BC} = -\frac{10x^2}{2AB \cdot BC} < 0.$$

Следовательно, $\angle ABC > 90^\circ$.

б) Из прямоугольных треугольников ANC и BNC находим, что

$$CN = AC \cdot \sin \angle BAC = 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = x\sqrt{5},$$

$$BN = \sqrt{BC^2 - NC^2} = \sqrt{10x^2 - 5x^2} = x\sqrt{5},$$

значит, B — середина AN .

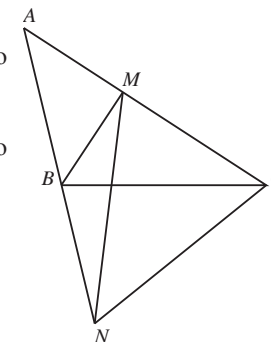
Обозначим $S_{ANC} = S$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S, \quad S_{AMN} = \frac{AM}{AC} \cdot S_{ANC} = \frac{2}{5}S, \quad S_{BMN} = \frac{1}{2}S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}S = \frac{1}{5}S.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{5}S}{\frac{1}{2}S} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $\frac{2}{5}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн.

Решение.

Обозначим через S размер кредита. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по $0,1S$ млн. Всего $0,3S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1,1S$ млн. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1,1S - x$, а в середине 5-го года он равен $1,1(1,1S - x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, т. е. последняя выплата равна $1,1(1,1S - x)$ и по условию равна x . Значит,

$$1,1(1,1S - x) = x, \quad 2,1x = 1,21S, \quad x = \frac{121}{210}S,$$

и общий размер выплат равен $0,3S + \frac{242}{210}S = \frac{305}{210}S = \frac{61}{42}S$. По условию

$$\frac{61}{42}S < 8, \quad 61S < 336.$$

При $S = 5$ это неравенство верно, а при $S = 6$ оно неверно, как и при больших S .

Ответ: 5 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 18** Найдите все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x+y)\sin\alpha + 8\sin^2\alpha = 2\sin\alpha - 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Обозначим $a = \sin\alpha$. Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4a(x+y) + 8a^2 = 2a - 1, \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2a + 4a^2. \end{cases}$$

Если пара $(x; y)$ — решение системы, то пара $(y; x)$ тоже решение.

Следовательно, единственное решение может иметь вид $(x; x)$, где $x \neq 0$.

Пусть $(x; x)$, где $x \neq 0$, — решение системы. Тогда

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 4a(x+x) + 8a^2 = 2a - 1, & \begin{cases} 2(x-2a)^2 = 2a - 1, \\ (2a-1)(a+1) = 0. \end{cases} \\ \frac{x}{x} + \frac{x}{x} = 2a + 4a^2; \end{cases}$$

Отсюда видим, что если $a = -1$, то система решений не имеет, а при $a = \frac{1}{2}$

система имеет единственное решение.

Решим уравнение $\frac{1}{2} = \sin\alpha$, $0 < \alpha < \pi$. Получим $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения α	2
Задача верно сведена к решению системы двух уравнений с одной неизвестной	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

- 19** Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

- а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?
 б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?
 в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3 , если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leq 300$?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$. Для этих прогрессий имеем $a_1b_1 + a_3b_3 = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 36 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3a_2b_2$.

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} a_1b_1 + 2a_4b_4 &= a_1b_1 + 2(a_1 + 3c)(b_1 + 3d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 18cd, \\ 3a_3b_3 &= 3(a_1 + 2c)(b_1 + 2d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 12cd \\ &\text{и } a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd. \end{aligned}$$

Если $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$, то $cd = 0$. Пришли к противоречию, ведь по условию $c > 0$ и $d > 0$.

в) Как и ранее, обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ соответственно. Тогда по условию $c \geq 1$ и $d \geq 1$. По доказанному в пункте б) имеем $a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd$. Значит,

$$a_3b_3 = \frac{a_1b_1 + 2a_4b_4 - 6cd}{3} \leq \frac{300 - 6}{3} = 98.$$

Если прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ являются прогрессиями $5, 6, 7, 8, \dots$ и $12, 13, 14, 15, \dots$ соответственно, то

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = 5 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 15 = 300 \text{ и } a_3b_3 = 7 \cdot 14 = 98.$$

Этот пример показывает, что наименьшее возможное значение произведения a_3b_3 равно 98.

Ответ: а) Да, например $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$; б) нет; в) 98.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. <i>a</i> , – обоснованное решение в п. <i>б</i> , – искомая оценка в п. <i>в</i> , – пример в п. <i>в</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4