

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

3 марта 2016 года
 Вариант МА10401
 (базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Найдите значение выражения $36 \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{36} - \frac{9}{12} \right)$.

Ответ: _____.

- 2** Найдите значение выражения $\frac{6^{-4}}{(6^3)^{-2}}$.

Ответ: _____.

- 3** Городской бюджет составляет 76 млн рублей, а расходы на одну из его статей составили 20%. Сколько миллионов рублей потрачено на эту статью бюджета?

Ответ: _____.

- 4** Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура тела (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 412$ К, $c = 300 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $m = 3$ кг и $t_1 = 407$ К.

Ответ: _____.

- 5** Найдите значение выражения $26 \sin 750^\circ$.

Ответ: _____.

- 6** В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 700 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 8 недель?

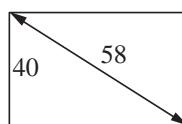
Ответ: _____.

- 7** Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(5x - 36) = 2$.

Ответ: _____.

- 8** Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 58 см, а высота экрана — 40 см. Найдите ширину экрана. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____.



- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) рост жирафа
Б) толщина лезвия бритвы
В) радиус Земли
Г) ширина футбольного поля

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 6400 км
2) 500 см
3) 0,08 мм
4) 68 м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

A	Б	В	Г

Ответ: _____.

- 10** Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

Ответ: _____.

- 11** На игре КВН судьи поставили следующие оценки командам за конкурсы.

Команда	Баллы за конкурс «Приветствие»	Баллы за конкурс «СТЭМ»	Баллы за музыкальный конкурс
«АТОМ»	28	22	25
«Шумы»	29	20	23
«Топчан»	26	21	27
«Лёлек и Болек»	24	24	29

Для каждой команды баллы по всем конкурсам суммируются, победителем считается команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов.

Какое место заняла команда «Шумы»?

Ответ: _____.

- 12** На соревнованиях по прыжкам в воду судьи выставили оценки от 0 до 10 трём спортсменам. Результаты приведены в таблице.

Номер спортсмена	k	I судья	II судья	III судья	IV судья	V судья	VI судья	VII судья
1	8	7,0	7,7	6,8	8,4	6,2	5,5	6,5
2	7,5	8,4	6,9	5,1	8,3	7,3	7,6	6,7
3	9	5,5	7,2	5,0	7,2	5,2	5,9	7,0

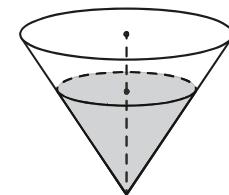
Итоговый балл вычисляется следующим образом: две наибольшие и две наименьшие оценки отбрасываются, а три оставшиеся складываются, и результат умножается на коэффициент сложности k .

В ответе укажите номера спортсменов, итоговый балл которых больше 165, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

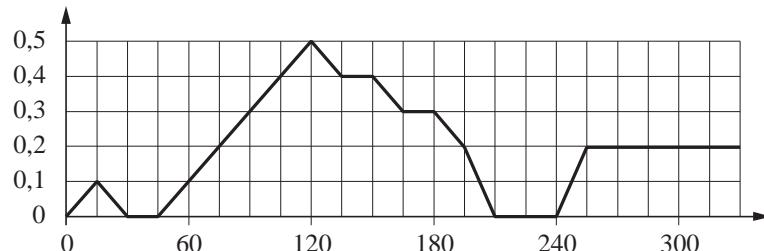
- 13** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{4}{5}$ высоты. Объём сосуда 2000 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.

Ответ: _____.



14

На графике изображена зависимость скорости погружения батискафа от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в м/с, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала погружения.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику погружения батискафа на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

- А) 60–150 с
Б) 150–180 с
В) 180–240 с
Г) 240–300 с

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- 1) Батискаф 45 секунд погружался с постоянной скоростью.
- 2) Скорость погружения уменьшалась, а затем произошла остановка на полминуты.
- 3) Скорость погружения достигла максимума за всё время.
- 4) Скорость погружения не увеличивалась на всём интервале, но батискаф не останавливался.

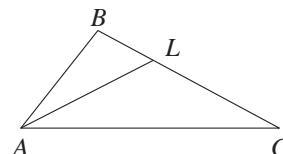
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	Б	В	Г

15

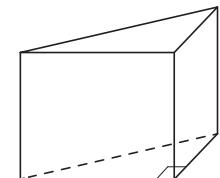
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 140° , угол ABC равен 123° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

16

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4, а гипотенуза равна $4\sqrt{2}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 3.



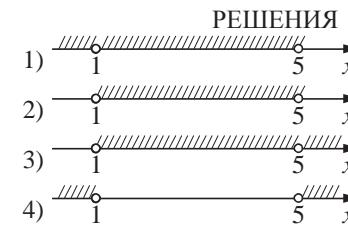
Ответ: _____.

17

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $(x-1)^2(x-5) < 0$
Б) $(x-1)(x-5) < 0$
В) $\frac{x-1}{x-5} > 0$
Г) $\frac{(x-5)^2}{x-1} > 0$



Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:	А	Б	В	Г

18

В классе учится 20 человек, из них 13 человек посещают кружок по истории, а 10 — кружок по математике. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Каждый ученик этого класса посещает оба кружка.
- 2) Найдутся хотя бы двое из этого класса, кто посещает оба кружка.
- 3) Если ученик из этого класса ходит на кружок по истории, то он обязательно ходит на кружок по математике.
- 4) Не найдётся 11 человек из этого класса, которые посещают оба кружка.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19

Найдите трёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 5;
- сумма цифр числа $(A+4)$ делится на 5;
- число A больше 350 и меньше 400.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20

Список заданий викторины состоял из 25 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 10 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 42 очка, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

3 марта 2016 года
 Вариант МА10402
 (базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Найдите значение выражения $27 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{9} - \frac{5}{27} \right)$.

Ответ: _____.

- 2** Найдите значение выражения $\frac{4^{-10}}{(4^4)^{-3}}$.

Ответ: _____.

- 3** Городской бюджет составляет 82 млн рублей, а расходы на одну из его статей составили 15 %. Сколько миллионов рублей потрачено на эту статью бюджета?

Ответ: _____.

- 4** Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура тела (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 409$ К, $c = 450 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $m = 4$ кг и $t_1 = 405$ К.

Ответ: _____.

- 5** Найдите значение выражения $-17 \operatorname{tg} 765^\circ$.

Ответ: _____.

- 6** В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 7 недель?

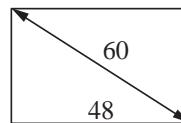
Ответ: _____.

- 7** Найдите корень уравнения $\log_3(-2x - 7) = 3$.

Ответ: _____.

8

Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 60 см, а ширина экрана — 48 см. Найдите высоту экрана. Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: _____.

9

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) высота горы Эверест
Б) длина реки Волги
В) ширина окна
Г) диаметр монеты

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 3530 км
2) 120 см
3) 20 мм
4) 8848 м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

A	Б	В	Г

10

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,15. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

Ответ: _____.

11

На игре КВН судьи поставили следующие оценки командам за конкурсы.

Команда	Баллы за конкурс «Приветствие»	Баллы за конкурс «СТЭМ»	Баллы за музыкальный конкурс
«АТОМ»	30	21	26
«Шумы»	27	24	24
«Топчан»	28	23	25
«Лёлек и Болек»	30	22	27

Для каждой команды баллы по всем конкурсам суммируются, победителем считается команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов.

Какое место заняла команда «АТОМ»?

Ответ: _____.

12

На соревнованиях по прыжкам в воду судьи выставили оценки от 0 до 10 трём спортсменам. Результаты приведены в таблице.

Номер спортсмена	k	I судья	II судья	III судья	IV судья	V судья	VI судья	VII судья
1	7	8,5	7,0	7,7	5,4	7,7	8,1	5,8
2	9,5	6,3	5,4	6,6	8,5	6,3	7,7	6,5
3	8	8,3	7,8	7,1	7,7	6,8	7,5	5,4

Итоговый балл вычисляется следующим образом: две наибольшие и две наименьшие оценки отбрасываются, а три оставшиеся складываются, и результат умножается на коэффициент сложности k .

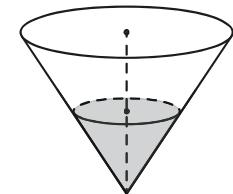
В ответе укажите номера спортсменов, итоговый балл которых больше 170, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

13

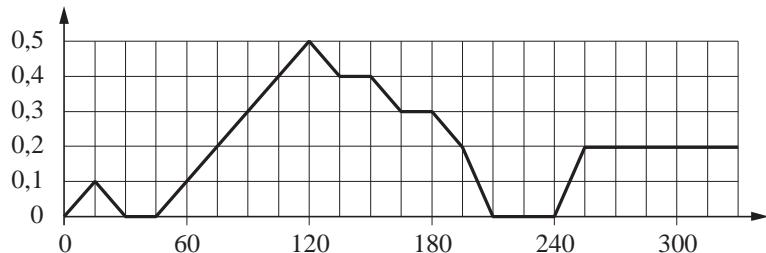
В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём сосуда 1400 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.

Ответ: _____.



14

На графике изображена зависимость скорости погружения батискафа от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в м/с, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала погружения.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику погружения батискафа на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

- | | |
|--------------|---|
| A) 0–60 с | 1) В течение 30 секунд батискаф не двигался. |
| Б) 60–120 с | 2) Скорость погружения не больше 0,1 м/с на всём интервале. |
| В) 120–180 с | 3) Скорость погружения не меньше 0,3 м/с на всём интервале. |
| Г) 180–240 с | 4) Скорость погружения постоянно росла. |

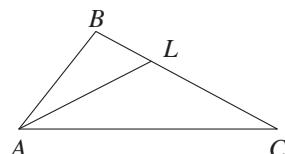
ХАРАКТЕРИСТИКИ

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:	A	Б	В	Г

15

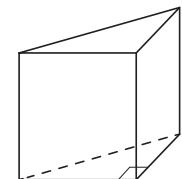
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 145° , угол ABC равен 113° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

16

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4, а гипотенуза равна $\sqrt{41}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 6.



Ответ: _____.

17

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $(x-2)^2(x-4) < 0$
- Б) $\frac{(x-4)^2}{x-2} > 0$
- В) $(x-2)(x-4) < 0$
- Г) $\frac{x-2}{x-4} > 0$



Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:	А	Б	В	Г

18

В классе учится 30 человек, из них 20 человек посещают кружок по биологии, а 16 — кружок по географии. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Найдутся хотя бы двое из этого класса, кто посещает оба кружка.
- 2) Если ученик из этого класса ходит на кружок по биологии, то он обязательно ходит на кружок по географии.
- 3) Каждый ученик из этого класса посещает оба кружка.
- 4) Не найдётся 17 человек из этого класса, которые посещают оба кружка.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19 Найдите трёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 4;
- сумма цифр числа $(A+2)$ делится на 4;
- число A больше 200 и меньше 400.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 11 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 84 очка, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

3 марта 2016 года
 Вариант МА10403
 (базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Найдите значение выражения $15 \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{15} - \frac{1}{3} \right)$.

Ответ: _____.

- 2** Найдите значение выражения $\frac{3^{-13}}{(3^5)^{-3}}$.

Ответ: _____.

- 3** Городской бюджет составляет 27 млн рублей, а расходы на одну из его статей составили 10 %. Сколько миллионов рублей потрачено на эту статью бюджета?

Ответ: _____.

- 4** Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура тела (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 657\text{ K}$, $c = 500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $m = 4\text{ кг}$ и $t_1 = 653\text{ K}$.

Ответ: _____.

- 5** Найдите значение выражения $14\sqrt{3} \cos 750^\circ$.

Ответ: _____.

- 6** В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 600 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 6 недель?

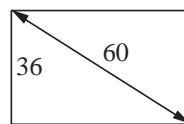
Ответ: _____.

- 7** Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 5) = 2$.

Ответ: _____.

- 8** Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 60 см, а высота экрана — 36 см. Найдите ширину экрана. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____.



- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) рост новорождённого ребёнка
Б) длина реки Енисей
В) толщина лезвия бритвы
Г) высота горы Эльбрус

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 4300 км
2) 50 см
3) 5642 м
4) 0,08 мм

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

	A	Б	В	Г
Ответ:				

- 10** Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,25. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

Ответ: _____.

- 11** На игре КВН судьи поставили следующие оценки командам за конкурсы.

Команда	Баллы за конкурс «Приветствие»	Баллы за конкурс «СТЭМ»	Баллы за музыкальный конкурс
«АТОМ»	24	20	28
«Шумы»	25	21	27
«Топчан»	26	23	25
«Лёлек и Болек»	23	24	24

Для каждой команды баллы по всем конкурсам суммируются, победителем считается команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов. Какое место заняла команда «Топчан»?

Ответ: _____.

- 12** На соревнованиях по прыжкам в воду судьи выставили оценки от 0 до 10 трём спортсменам. Результаты приведены в таблице.

Номер спортсмена	k	I судья	II судья	III судья	IV судья	V судья	VI судья	VII судья
1	9	6,4	7,0	5,9	6,6	6,0	8,5	5,9
2	8,5	6,4	6,6	6,2	5,5	6,8	7,4	6,0
3	7,5	8,4	8,5	8,3	6,9	7,7	6,6	7,0

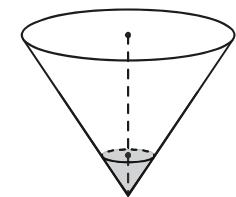
Итоговый балл вычисляется следующим образом: две наибольшие и две наименьшие оценки отбрасываются, а три оставшиеся складываются, и результат умножается на коэффициент сложности k .

В ответе укажите номера спортсменов, итоговый балл которых больше 170, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

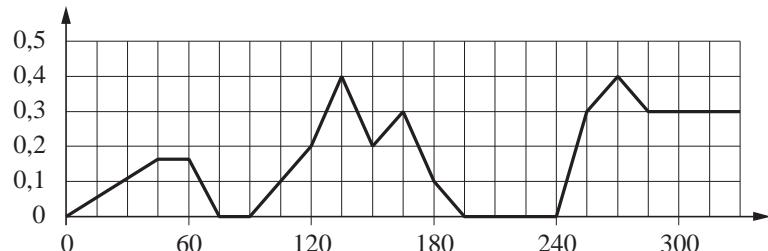
- 13** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{5}$ высоты. Объём сосуда 250 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.

Ответ: _____.



14

- На графике изображена зависимость скорости погружения батискафа от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в м/с, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала погружения.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику погружения батискафа на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ
ВРЕМЕНИ

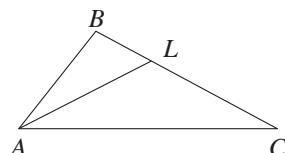
- A) 60–120 с 1) Батискаф ровно 15 секунд не двигался.
 Б) 120–180 с 2) Скорость погружения не росла на всём интервале.
 В) 180–240 с 3) Батискаф 15 секунд погружался с постоянной ненулевой скоростью.
 Г) 240–300 с 4) Батискаф дважды сбрасывал скорость погружения.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:	A	Б	В	Г

15

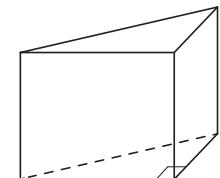
- В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 155° , угол ABC равен 139° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

16

- В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4, а гипотенуза равна $2\sqrt{13}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 2.



Ответ: _____.

17

- Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $(x-3)(x-4) < 0$
 Б) $\frac{x-3}{x-4} > 0$
 В) $(x-3)^2(x-4) < 0$
 Г) $\frac{(x-4)^2}{x-3} > 0$

РЕШЕНИЯ

- 1)
 2)
 3)
 4)

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

А	Б	В	Г

Ответ:

18

- В фирме N работает 50 сотрудников, из них 40 человек знают английский язык, а 20 — немецкий. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) В фирме N хотя бы три сотрудника знают и английский, и немецкий языки.
 2) В этой фирме нет ни одного сотрудника, знающего и английский, и немецкий языки.
 3) Если сотрудник этой фирмы знает английский язык, то он знает и немецкий.
 4) Не более 20 сотрудников этой фирмы знают и английский, и немецкий языки.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19 Найдите четырёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 8;
- сумма цифр числа $(A+2)$ делится на 8;
- число A больше 1500 и меньше 1700.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 12 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 70 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

3 марта 2016 года
Вариант МА10404
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Найдите значение выражения $35 \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{35} - \frac{3}{5} \right)$.

Ответ: _____.

- 2** Найдите значение выражения $\frac{7^{-4}}{(7^3)^{-2}}$.

Ответ: _____.

- 3** Городской бюджет составляет 16 млн рублей, а расходы на одну из его статей составили 25 %. Сколько миллионов рублей потрачено на эту статью бюджета?

Ответ: _____.

- 4** Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура тела (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 608$ К, $c = 600 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $m = 3$ кг и $t_1 = 603$ К.

Ответ: _____.

- 5** Найдите значение выражения $-27\sqrt{2} \sin 765^\circ$.

Ответ: _____.

- 6** В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1100 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 4 недели?

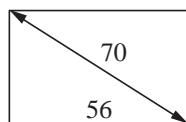
Ответ: _____.

- 7** Найдите корень уравнения $\log_5(-2x+9)=2$.

Ответ: _____.

- 8** Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 70 см, а ширина экрана — 56 см. Найдите высоту экрана. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____.



- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) диаметр монеты
Б) рост жирафа
В) высота Эйфелевой башни
Г) радиус Земли

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 6400 км
2) 324 м
3) 20 мм
4) 5 м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

A	Б	В	Г

Ответ: _____.

- 10** Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,08. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

Ответ: _____.

- 11** На игре КВН судьи поставили следующие оценки командам за конкурсы.

Команда	Баллы за конкурс «Приветствие»	Баллы за конкурс «СТЭМ»	Баллы за музыкальный конкурс
«АТОМ»	30	21	26
«Шумы»	27	24	24
«Топчан»	28	23	25
«Лёлек и Болек»	30	22	27

Для каждой команды баллы по всем конкурсам суммируются, победителем считается команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов. Какое место заняла команда «АТОМ»?

Ответ: _____.

- 12** На соревнованиях по прыжкам в воду судьи выставили оценки от 0 до 10 трём спортсменам. Результаты приведены в таблице.

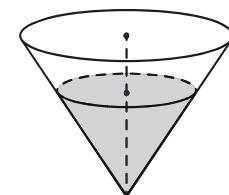
Номер спортсмена	k	I судья	II судья	III судья	IV судья	V судья	VI судья	VII судья
1	7	6,3	7,1	6,9	7,6	5,7	7,7	8,4
2	8	7,2	6,3	8,5	7,8	7,2	7,0	8,4
3	9	6,1	7,5	5,4	7,3	7,9	7,0	5,6

Итоговый балл вычисляется следующим образом: две наибольшие и две наименьшие оценки отбрасываются, а три оставшиеся складываются, и результат умножается на коэффициент сложности k .

В ответе укажите номера спортсменов, итоговый балл которых больше 160, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

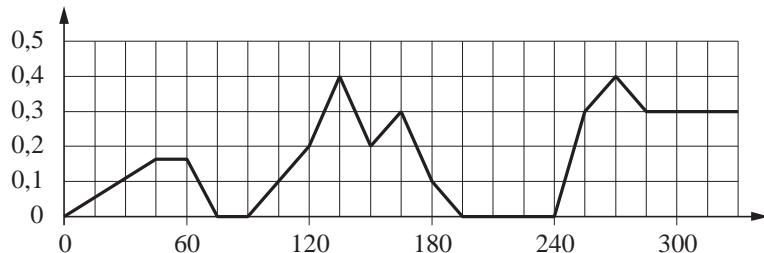
- 13** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{4}{5}$ высоты. Объём сосуда 1500 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Ответ: _____.

14

На графике изображена зависимость скорости погружения батискафа от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в м/с, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала погружения.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику погружения батискафа на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

- А) 0–60 с
Б) 60–120 с
В) 120–180 с
Г) 180–240 с

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- 1) Скорость погружения не увеличивалась на всём интервале.
- 2) Скорость погружения впервые достигала максимума за всё время.
- 3) Погружение производилось без замедления на всём интервале.
- 4) Батискаф остановился ровно на 15 секунд.

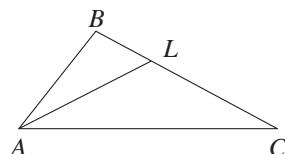
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	Б	В	Г

Ответ:

15

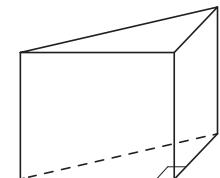
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 160° , угол ABC равен 148° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

16

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 5, а гипотенуза равна $\sqrt{74}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 2.



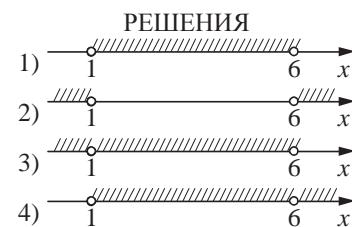
Ответ: _____.

17

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $(x-1)^2(x-6) < 0$
Б) $\frac{x-1}{x-6} > 0$
В) $(x-1)(x-6) < 0$
Г) $\frac{(x-6)^2}{x-1} > 0$



Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

A	Б	В	Г

Ответ:

18

В фирме N работает 60 сотрудников, из них 50 человек знают английский язык, а 15 — французский. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Если сотрудник этой фирмы знает английский язык, то он знает и французский.
- 2) Хотя бы три сотрудника этой фирмы знают и английский, и французский языки.
- 3) Не более 15 сотрудников этой фирмы знают и английский, и французский языки.
- 4) В этой фирме нет ни одного человека, знающего и английский, и французский языки.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

19 Найдите трёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 7;
- сумма цифр числа $(A+2)$ делится на 7;
- число A больше 300 и меньше 350.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 13 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 56 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

3 марта 2016 года
 Вариант МА10405
 (базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1

Найдите значение выражения $36 \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{36} - \frac{9}{12} \right)$.

Ответ: _____.

2

Найдите значение выражения $\frac{4^{-10}}{(4^4)^{-3}}$.

Ответ: _____.

3

Городской бюджет составляет 27 млн рублей, а расходы на одну из его статей составили 10 %. Сколько миллионов рублей потрачено на эту статью бюджета?

Ответ: _____.

4

Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура тела (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 608 \text{ К}$, $c = 600 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $m = 3 \text{ кг}$ и $t_1 = 603 \text{ К}$.

Ответ: _____.

5

Найдите значение выражения $26\sin 750^\circ$.

Ответ: _____.

6

В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 7 недель?

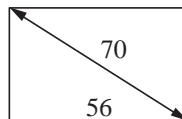
Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 5) = 2$.

Ответ: _____.

8 Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 70 см, а ширина экрана — 56 см. Найдите высоту экрана. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____.



9 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

- | | |
|----------|--------------------|
| ВЕЛИЧИНЫ | ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ |
|----------|--------------------|
- А) рост жирафа
Б) ширина футбольного поля
В) толщина лезвия бритвы
Г) радиус Земли

- | | |
|----------|--------------------|
| ВЕЛИЧИНЫ | ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ |
|----------|--------------------|
- 1) 500 см
2) 68 м
3) 0,08 мм
4) 6400 км

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

A	Б	В	Г

Ответ:

10 Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,15. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

Ответ: _____.

11 На игре КВН судьи поставили следующие оценки командам за конкурсы.

Команда	Баллы за конкурс «Приветствие»	Баллы за конкурс «СТЭМ»	Баллы за музыкальный конкурс
«АТОМ»	24	20	28
«Шумы»	25	21	27
«Топчан»	26	23	25
«Лёлек и Болек»	23	24	24

Для каждой команды баллы по всем конкурсам суммируются, победителем считается команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов. Какое место заняла команда «Топчан»?

Ответ: _____.

12 На соревнованиях по прыжкам в воду судьи выставили оценки от 0 до 10 трём спортсменам. Результаты приведены в таблице.

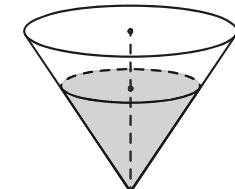
Номер спортсмена	k	I судья	II судья	III судья	IV судья	V судья	VI судья	VII судья
1	7	6,3	7,1	6,9	7,6	5,7	7,7	8,4
2	8	7,2	6,3	8,5	7,8	7,2	7,0	8,4
3	9	6,1	7,5	5,4	7,3	7,9	7,0	5,6

Итоговый балл вычисляется следующим образом: две наибольшие и две наименьшие оценки отбрасываются, а три оставшиеся складываются и умножаются на коэффициент сложности k .

В ответе укажите номера спортсменов, итоговый балл которых больше 160, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

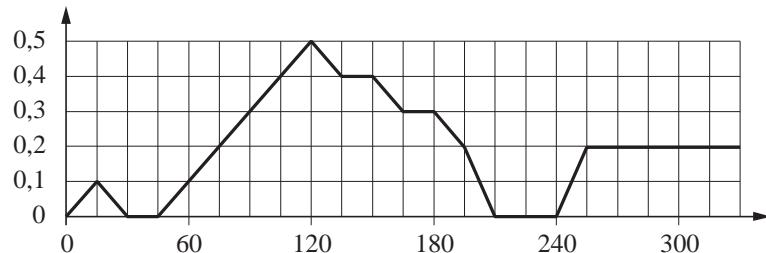
13 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{4}{5}$ высоты. Объём сосуда 2000 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Ответ: _____.

14

На графике изображена зависимость скорости погружения батискафа от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в м/с, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала погружения.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику погружения батискафа на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

- А) 0–60 с
Б) 60–120 с
В) 120–180 с
Г) 180–240 с

ХАРАКТЕРИСТИКИ

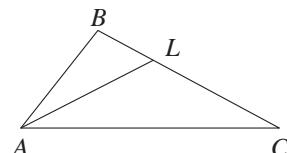
- 1) Скорость погружения не меньше 0,3 м/с на всём интервале.
2) В течение 30 секунд батискаф не двигался.
3) Скорость погружения не больше 0,1 м/с на всём интервале.
4) Скорость погружения постоянно росла.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

	А	Б	В	Г
Ответ:				

15

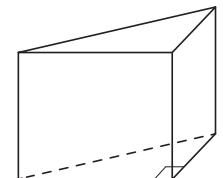
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 155° , угол ABC равен 139° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

16

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 5, а гипотенуза равна $\sqrt{74}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 2.



Ответ: _____.

17

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $(x-1)(x-5) < 0$
Б) $\frac{(x-5)^2}{x-1} > 0$
В) $(x-1)^2(x-5) < 0$
Г) $\frac{x-1}{x-5} > 0$

РЕШЕНИЯ

- 1)
2)
3)
4)

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:	А	Б	В	Г

18

В классе учится 30 человек, из них 20 человек посещают кружок по биологии, а 16 — кружок по географии. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Найдутся хотя бы двое из этого класса, кто посещает оба кружка.
2) Каждый ученик из этого класса посещает оба кружка.
3) Если ученик из этого класса ходит на кружок по биологии, то он обязательно ходит на кружок по географии.
4) Не найдётся 17 человек из этого класса, которые посещают оба кружка.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------	--------------------------	--------------------------

19 Найдите четырёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 8;
- сумма цифр числа $(A + 2)$ делится на 8;
- число A больше 1500 и меньше 1700.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 13 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 56 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

3 марта 2016 года
 Вариант МА10406
 (базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Найдите значение выражения $27 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{9} - \frac{5}{27} \right)$.

Ответ: _____.

- 2** Найдите значение выражения $\frac{3^{-13}}{(3^5)^{-3}}$.

Ответ: _____.

- 3** Городской бюджет составляет 16 млн рублей, а расходы на одну из его статей составили 25 %. Сколько миллионов рублей потрачено на эту статью бюджета?

Ответ: _____.

- 4** Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура тела (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 412$ К, $c = 300 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $m = 3$ кг и $t_1 = 407$ К.

Ответ: _____.

- 5** Найдите значение выражения $-17 \operatorname{tg} 765^\circ$.

Ответ: _____.

- 6** В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 600 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 6 недель?

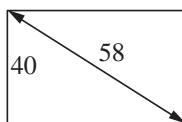
Ответ: _____.

- 7** Найдите корень уравнения $\log_5(-2x+9)=2$.

Ответ: _____.

- 8** Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 58 см, а высота экрана — 40 см. Найдите ширину экрана. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____.



- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) длина реки Волги
Б) высота горы Эверест
В) ширина окна
Г) диаметр монеты

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 3530 км
2) 20 мм
3) 120 см
4) 8848 м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

A	Б	В	Г

Ответ: _____.

- 10** Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,25. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

Ответ: _____.

- 11** На игре КВН судьи поставили следующие оценки командам за конкурсы.

Команда	Баллы за конкурс «Приветствие»	Баллы за конкурс «СТЭМ»	Баллы за музыкальный конкурс
«АТОМ»	30	21	26
«Шумы»	27	24	24
«Топчан»	28	23	25
«Лёлек и Болек»	30	22	27

Для каждой команды баллы по всем конкурсам суммируются, победителем считается команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов.

Какое место заняла команда «АТОМ»?

Ответ: _____.

- 12** На соревнованиях по прыжкам в воду судьи выставили оценки от 0 до 10 трём спортсменам. Результаты приведены в таблице.

Номер спортсмена	k	I судья	II судья	III судья	IV судья	V судья	VI судья	VII судья
1	8	7,0	7,7	6,8	8,4	6,2	5,5	6,5
2	7,5	8,4	6,9	5,1	8,3	7,3	7,6	6,7
3	9	5,5	7,2	5,0	7,2	5,2	5,9	7,0

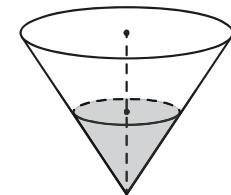
Итоговый балл вычисляется следующим образом: две наибольшие и две наименьшие оценки отбрасываются, а три оставшиеся складываются, и результат умножается на коэффициент сложности k .

В ответе укажите номера спортсменов, итоговый балл которых больше 165, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

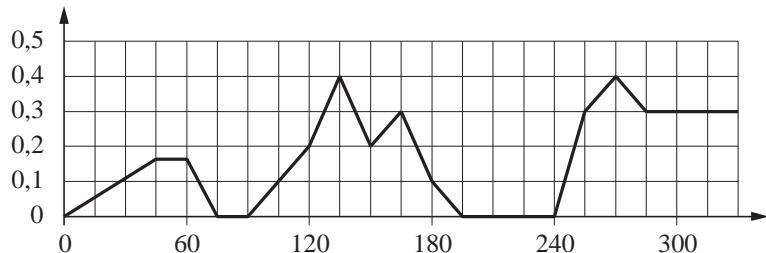
- 13** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём сосуда 1400 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.

Ответ: _____.



14

На графике изображена зависимость скорости погружения батискафа от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в м/с, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала погружения.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику погружения батискафа на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

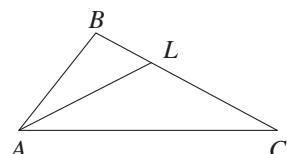
- | | |
|--------------|--|
| A) 60–120 с | 1) Батискаф ровно 15 секунд не двигался. |
| Б) 120–180 с | 2) Батискаф 15 секунд погружался с постоянной ненулевой скоростью. |
| В) 180–240 с | 3) Скорость погружения не росла на всём интервале. |
| Г) 240–300 с | 4) Батискаф дважды сбрасывал скорость погружения. |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:	A	Б	В	Г

15

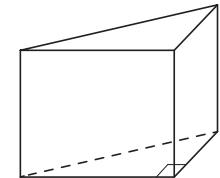
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 160° , угол ABC равен 148° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

16

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4, а гипотенуза равна $4\sqrt{2}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 3.



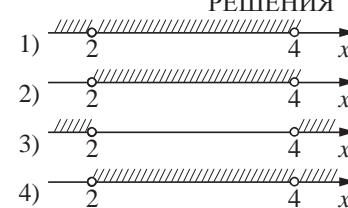
Ответ: _____.

17

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $\frac{x-2}{x-4} > 0$
 Б) $(x-2)^2(x-4) < 0$
 В) $\frac{(x-4)^2}{x-2} > 0$
 Г) $(x-2)(x-4) < 0$



Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

А	Б	В	Г

Ответ:

18

В фирме N работает 50 сотрудников, из них 40 человек знают английский язык, а 20 — немецкий. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Не более 20 сотрудников этой фирмы знают и английский, и немецкий языки.
 2) Если сотрудник этой фирмы знает английский язык, то он знает и немецкий.
 3) В этой фирме нет ни одного сотрудника, знающего и английский, и немецкий языки.
 4) В фирме N хотя бы три сотрудника знают и английский, и немецкий языки.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------	--------------------------	--------------------------

19 Найдите трёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 7;
- сумма цифр числа $(A + 2)$ делится на 7;
- число A больше 300 и меньше 350.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Список заданий викторины состоял из 25 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 10 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 42 очка, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

3 марта 2016 года
 Вариант МА10407
 (базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1

Найдите значение выражения $15 \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{15} - \frac{1}{3} \right)$.

Ответ: _____.

2

Найдите значение выражения $\frac{7^{-4}}{(7^3)^{-2}}$.

Ответ: _____.

3

Городской бюджет составляет 76 млн рублей, а расходы на одну из его статей составили 20%. Сколько миллионов рублей потрачено на эту статью бюджета?

Ответ: _____.

4

Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура тела (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 409$ К, $c = 450 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $m = 4$ кг и $t_1 = 405$ К.

Ответ: _____.

5

Найдите значение выражения $14\sqrt{3} \cos 750^\circ$.

Ответ: _____.

6

В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1100 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 4 недели?

Ответ: _____.

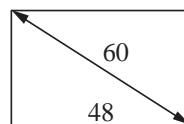
7

Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(5x - 36) = 2$.

Ответ: _____.

- 8** Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 60 см, а ширина экрана — 48 см. Найдите высоту экрана. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____.



- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) высота горы Эльбрус
Б) длина реки Енисей
В) толщина лезвия бритвы
Г) рост новорождённого ребёнка

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 5642 м
2) 50 см
3) 0,08 мм
4) 4300 км

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

	A	Б	В	Г
Ответ:				

- 10** Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,08. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

Ответ: _____.

- 11** На игре КВН судьи поставили следующие оценки командам за конкурсы.

Команда	Баллы за конкурс «Приветствие»	Баллы за конкурс «СТЭМ»	Баллы за музыкальный конкурс
«АТОМ»	28	22	25
«Шумы»	29	20	23
«Топчан»	26	21	27
«Лёлек и Болек»	24	24	29

Для каждой команды баллы по всем конкурсам суммируются, победителем считается команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов.

Какое место заняла команда «Шумы»?

Ответ: _____.

- 12** На соревнованиях по прыжкам в воду судьи выставили оценки от 0 до 10 трём спортсменам. Результаты приведены в таблице.

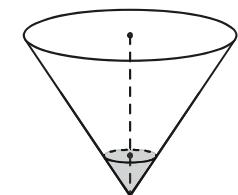
Номер спортсмена	k	I судья	II судья	III судья	IV судья	V судья	VI судья	VII судья
1	7	8,5	7,0	7,7	5,4	7,7	8,1	5,8
2	9,5	6,3	5,4	6,6	8,5	6,3	7,7	6,5
3	8	8,3	7,8	7,1	7,7	6,8	7,5	5,4

Итоговый балл вычисляется следующим образом: две наибольшие и две наименьшие оценки отбрасываются, а три оставшиеся складываются, и результат умножается на коэффициент сложности k .

В ответе укажите номера спортсменов, итоговый балл которых больше 170, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

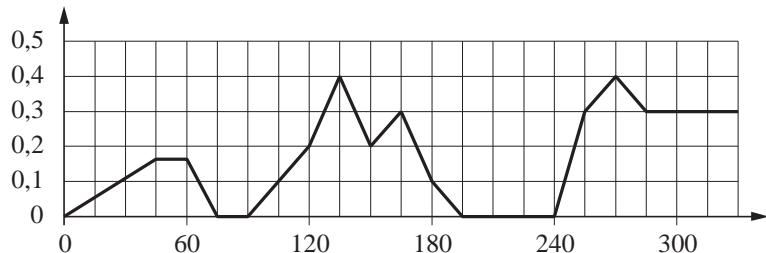
- 13** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{5}$ высоты. Объём сосуда 250 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Ответ: _____.

14

На графике изображена зависимость скорости погружения батискафа от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в м/с, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала погружения.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику погружения батискафа на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

- А) 0–60 с
Б) 60–120 с
В) 120–180 с
Г) 180–240 с

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- 1) Скорость погружения не увеличивалась на всём интервале.
- 2) Погружение производилось без замедления на всём интервале.
- 3) Скорость погружения впервые достигала максимума за всё время.
- 4) Батискаф остановился ровно на 15 секунд.

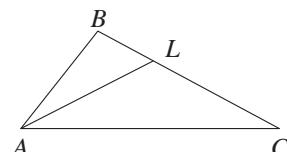
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	Б	В	Г

Ответ:

15

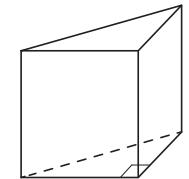
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 140° , угол ABC равен 123° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

16

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4, а гипотенуза равна $\sqrt{41}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 6.



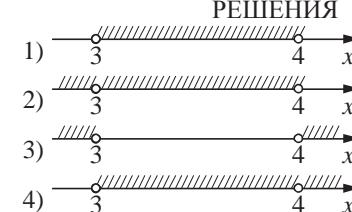
Ответ: _____.

17

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $\frac{x-3}{x-4} > 0$
Б) $\frac{(x-4)^2}{x-3} > 0$
В) $(x-3)(x-4) < 0$
Г) $(x-3)^2(x-4) < 0$



Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

A	Б	В	Г

Ответ:

18

В фирме N работает 60 сотрудников, из них 50 человек знают английский язык, а 15 — французский. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) В этой фирме нет ни одного человека, знающего и английский, и французский языки.
- 2) Не более 15 сотрудников этой фирмы знают и английский, и французский языки.
- 3) Хотя бы три сотрудника этой фирмы знают и английский, и французский языки.
- 4) Если сотрудник этой фирмы знает английский язык, то он знает и французский.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

--	--

Ответ:

19 Найдите трёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 5;
- сумма цифр числа $(A + 4)$ делится на 5;
- число A больше 350 и меньше 400.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 11 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 84 очка, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

3 марта 2016 года
Вариант МА10408
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Математика. 11 класс. Вариант МА10408 (Запад, базовый уровень)

2

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1

Найдите значение выражения $35 \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{35} - \frac{3}{5} \right)$.

Ответ: _____.

2

Найдите значение выражения $\frac{6^{-4}}{(6^3)^{-2}}$.

Ответ: _____.

3

Городской бюджет составляет 82 млн рублей, а расходы на одну из его статей составили 15 %. Сколько миллионов рублей потрачено на эту статью бюджета?

Ответ: _____.

4

Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура тела (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 657$ К, $c = 500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $m = 4$ кг и $t_1 = 653$ К.

Ответ: _____.

5

Найдите значение выражения $-27\sqrt{2} \sin 765^\circ$.

Ответ: _____.

6

В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 700 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 8 недель?

Ответ: _____.

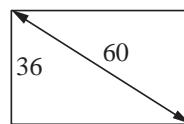
7

Найдите корень уравнения $\log_3(-2x - 7) = 3$.

Ответ: _____.

- 8** Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 60 см, а высота экрана — 36 см. Найдите ширину экрана. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____.



- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) рост жирафа
Б) высота Эйфелевой башни
В) диаметр монеты
Г) радиус Земли

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 324 м
2) 5 м
3) 20 мм
4) 6400 км

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

A	Б	В	Г

- 10** Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

Ответ: _____.

- 11** На игре КВН судьи поставили следующие оценки командам за конкурсы.

Команда	Баллы за конкурс «Приветствие»	Баллы за конкурс «СТЭМ»	Баллы за музыкальный конкурс
«АТОМ»	30	21	26
«Шумы»	27	24	24
«Топчан»	28	23	25
«Лёлек и Болек»	30	22	27

Для каждой команды баллы по всем конкурсам суммируются, победителем считается команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов.

Какое место заняла команда «АТОМ»?

Ответ: _____.

- 12** На соревнованиях по прыжкам в воду судьи выставили оценки от 0 до 10 трём спортсменам. Результаты приведены в таблице.

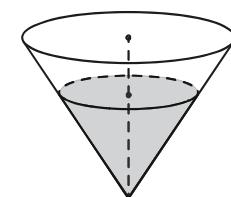
Номер спортсмена	k	I судья	II судья	III судья	IV судья	V судья	VI судья	VII судья
1	9	6,4	7,0	5,9	6,6	6,0	8,5	5,9
2	8,5	6,4	6,6	6,2	5,5	6,8	7,4	6,0
3	7,5	8,4	8,5	8,3	6,9	7,7	6,6	7,0

Итоговый балл вычисляется следующим образом: две наибольшие и две наименьшие оценки отбрасываются, а три оставшиеся складываются, и результат умножается на коэффициент сложности k .

В ответе укажите номера спортсменов, итоговый балл которых больше 170, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.

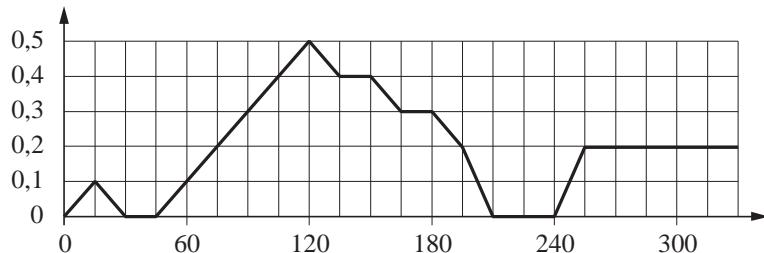
- 13** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{4}{5}$ высоты. Объём сосуда 1500 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Ответ: _____.

14

На графике изображена зависимость скорости погружения батискафа от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в м/с, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала погружения.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику погружения батискафа на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

- А) 60–150 с
Б) 150–180 с
В) 180–240 с
Г) 240–300 с

ХАРАКТЕРИСТИКИ

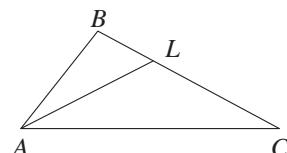
- 1) Скорость погружения достигла максимума за всё время.
- 2) Скорость погружения не увеличивалась на всём интервале, но батискаф не останавливался.
- 3) Батискаф 45 секунд погружался с постоянной скоростью.
- 4) Скорость погружения уменьшалась, а затем произошла остановка на полминуты.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:	A	Б	В	Г

15

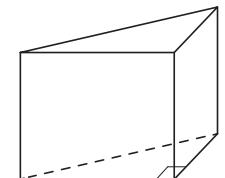
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 145° , угол ABC равен 113° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

16

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4, а гипотенуза равна $2\sqrt{13}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 2.



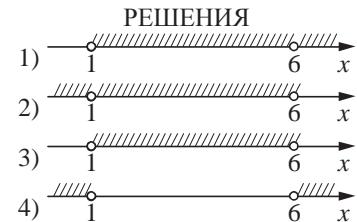
Ответ: _____.

17

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

- А) $(x-1)^2(x-6) < 0$
Б) $\frac{x-1}{x-6} > 0$
В) $(x-1)(x-6) < 0$
Г) $\frac{(x-6)^2}{x-1} > 0$



Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

A	Б	В	Г
Ответ:			

18

В классе учится 20 человек, из них 13 человек посещают кружок по истории, а 10 — кружок по математике. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Найдутся хотя бы двое из этого класса, кто посещает оба кружка.
- 2) Каждый ученик этого класса посещает оба кружка.
- 3) Если ученик из этого класса ходит на кружок по истории, то он обязательно ходит на кружок по математике.
- 4) Не найдётся 11 человек из этого класса, которые посещают оба кружка.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------	--------------------------	--------------------------

19 Найдите трёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 4;
- сумма цифр числа $(A + 2)$ делится на 4;
- число A больше 200 и меньше 400.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20 Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 12 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 70 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

3 марта 2016 года

Вариант МА10409

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

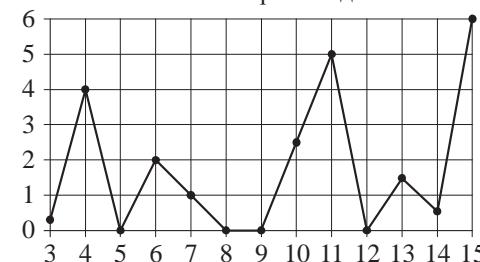
1

Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3500 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1700 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1100 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Ответ: _____.

2

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало не менее 3 миллиметров осадков.

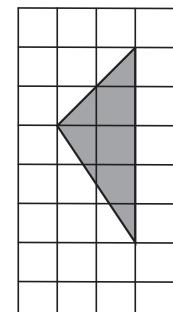


Ответ: _____.

3

Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: _____.



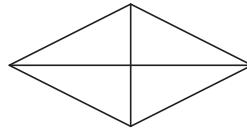
- 4** На олимпиаде по физике 450 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 180 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: _____.

- 5** Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{3x-5}$.

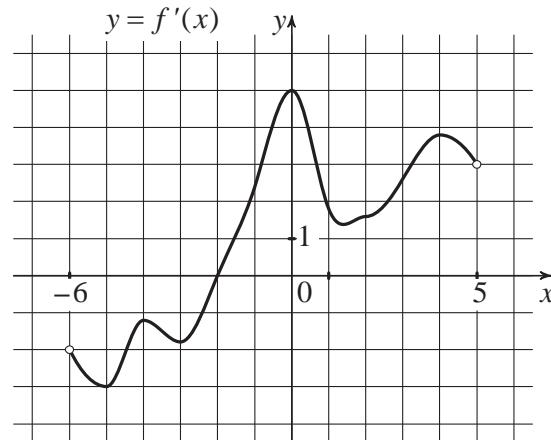
Ответ: _____.

- 6** Площадь ромба равна 52. Одна из его диагоналей равна 4. Найдите другую диагональ.



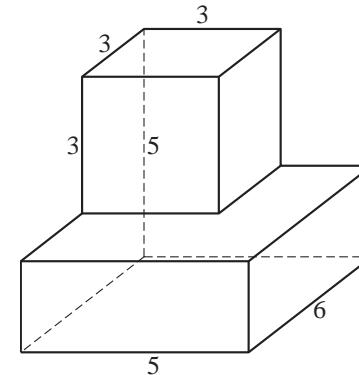
Ответ: _____.

- 7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: _____.

- 8** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

- 9** Найдите значение выражения $\frac{18(\sin^2 24^\circ - \cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ}$.

Ответ: _____.

- 10** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 50 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- 11** На изготовление 780 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 840 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: _____.

12

Найдите наименьшее значение функции $y = 15x - 6\sin x + 8$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{5\sin^2 x - 3\sin x}{5\cos x + 4} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14

Дана правильная треугольная призма $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

15

Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} (5 - 2^x).$$

16

Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .

- а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
б) Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

17

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удваиваются, а за четыре года как минимум утройствуются.

18

Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $x^3 + 2x^2 - x \log_2(b-1) + 4 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

19

Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

- а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 100?
б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{49} ровно 11 чисел делятся на 100?
в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$?

**Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс**

3 марта 2016 года
Вариант МА10410
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

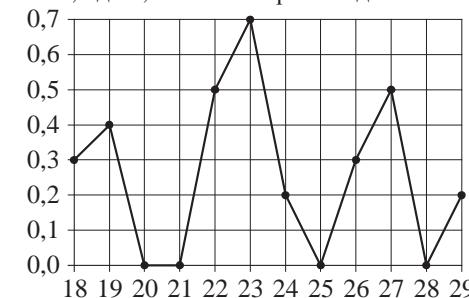
1

Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2500 рублей. До установки счётчиков за воду платили 800 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 600 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Ответ: _____.

2

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Якутске с 18 по 29 октября 1986 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало от 0,1 до 0,6 миллиметров осадков.

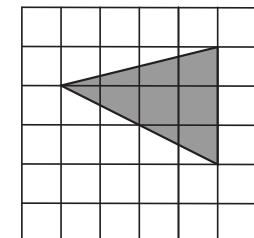


Ответ: _____.

3

Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: _____.



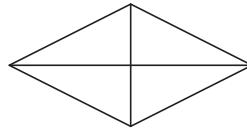
- 4** На олимпиаде по истории 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 150 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: _____.

- 5** Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x-15} = \frac{1}{4x+3}$.

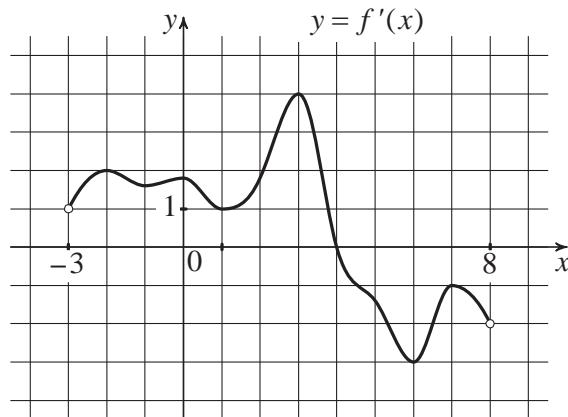
Ответ: _____.

- 6** Площадь ромба равна 27. Одна из его диагоналей равна 6. Найдите другую диагональ.



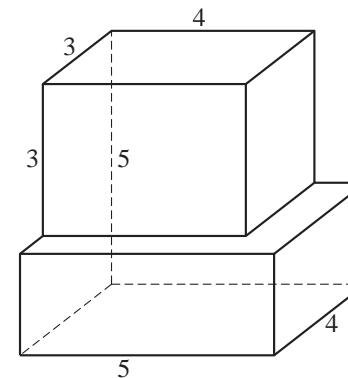
Ответ: _____.

- 7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: _____.

- 8** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

- 9** Найдите значение выражения $\frac{7(\sin^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ)}{\cos 22^\circ}$.

Ответ: _____.

- 10** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 130$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 120 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- 11** На изготовление 575 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: _____.

- 12** Найдите наименьшее значение функции $y = 16x - 6\sin x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\frac{13\sin^2 x - 5\sin x}{13\cos x + 12} = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

- 14** Данна правильная треугольная призма $ABC A_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.
 а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
 б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

- 15** Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} 5 \geq \log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} (7 - 2^x).$$

- 16** Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .
 а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
 б) Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 6$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

- 17** По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удваиваются, а за четыре года как минимум утройятся.

- 18** Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $x^3 + 4x^2 - x \log_2(b-3) + 6 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[-2; 2]$.
- 19** Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.
 а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 36?
 б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} ровно 9 чисел делятся на 36?
 в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} больше кратных 36, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$?

**Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс**

3 марта 2016 года
Вариант МА10411
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

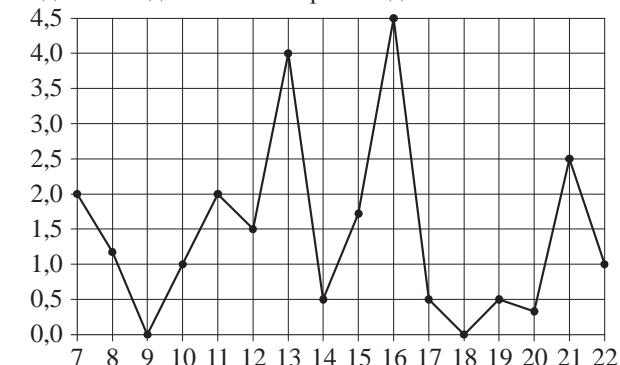
1

Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3900 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1000 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 800 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Ответ: _____.

2

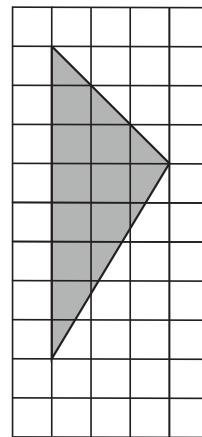
На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало от 3 до 5 миллиметров осадков.



Ответ: _____.

- 3** Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: _____.



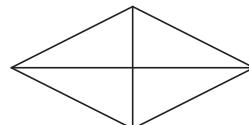
- 4** На олимпиаде по математике 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 180 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: _____.

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x+16} = \frac{1}{8x+11}$.

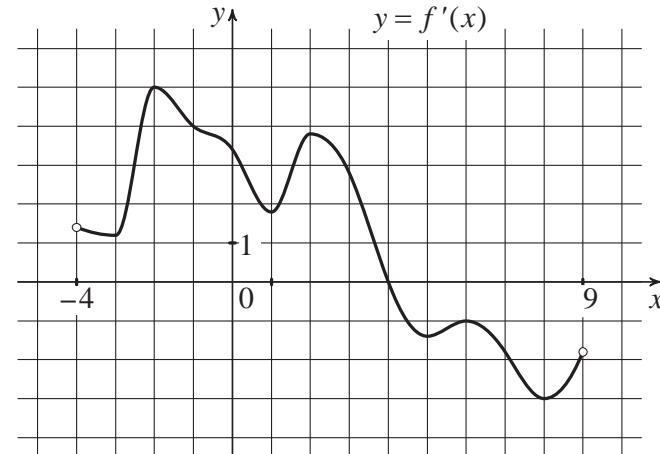
Ответ: _____.

- 6** Площадь ромба равна 63. Одна из его диагоналей равна 6. Найдите другую диагональ.



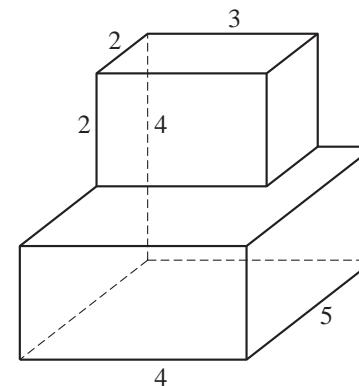
Ответ: _____.

- 7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: _____.

- 8** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2**9**

Найдите значение выражения $\frac{15(\sin^2 69^\circ - \cos^2 69^\circ)}{\cos 138^\circ}$.

Ответ: _____.

10

К источнику с ЭДС $\varepsilon = 115$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,6$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 100 В?

Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

11

На изготовление 399 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 420 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: _____.

12

Найдите наименьшее значение функции $y = 15x - 7\sin x + 3$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{5\sin^2 x - 3\sin x}{5\cos x + 4} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14

- Дана правильная треугольная призма $ABC A_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.
- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

15

Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} (5 - 2^x).$$

16

- Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .
- Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
 - Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

17

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: **целое** число n млн рублей в первый и второй годы, а также **целое** число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удваиваются, а за четыре года как минимум утроятся.

18

- Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $x^3 + 2x^2 - x \log_2(b-1) + 4 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

19

- Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.
- Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 100?
 - Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{49} ровно 11 чисел делятся на 100?
 - Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$?

**Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс**

3 марта 2016 года
Вариант МА10412
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Часть 1
Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

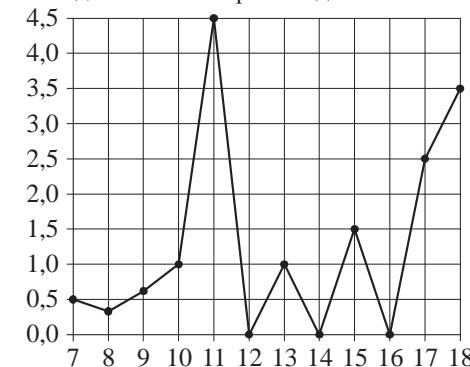
1

Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2400 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1800 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1300 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Ответ: _____.

2

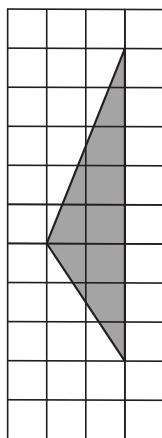
На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало от 2 до 3 миллиметров осадков.



Ответ: _____.

- 3** Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: _____.



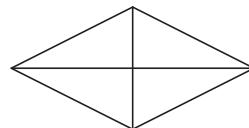
- 4** На олимпиаде по физике 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 170 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: _____.

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{5x+6} = \frac{1}{6x-3}$.

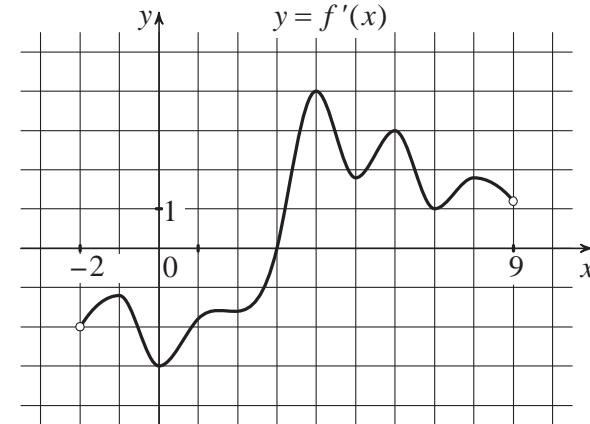
Ответ: _____.

- 6** Площадь ромба равна 68. Одна из его диагоналей равна 4. Найдите другую диагональ.



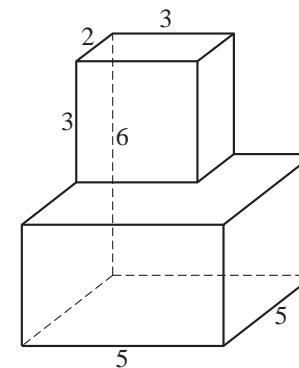
Ответ: _____.

- 7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[3; 8]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: _____.

- 8** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2**9**

Найдите значение выражения $\frac{23(\sin^2 88^\circ - \cos^2 88^\circ)}{\cos 176^\circ}$.

Ответ: _____.

10

К источнику с ЭДС $\varepsilon = 65$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 60 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

11

На изготовление 832 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 928 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: _____.

12

Найдите наименьшее значение функции $y = 17x - 7\sin x + 4$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{13\sin^2 x - 5\sin x}{13\cos x + 12} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14

Дана правильная треугольная призма $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.

- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

15

Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} 5 \geq \log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} (7 - 2^x).$$

16

Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .

- Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
- Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 6$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

17

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удваиваются, а за четыре года как минимум утройствуются.

18

Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $x^3 + 4x^2 - x\log_2(b-3) + 6 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[-2; 2]$.

19

Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

- Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 36?
- Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} ровно 9 чисел делятся на 36?
- Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} больше кратных 36, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$?

**Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс**

3 марта 2016 года
Вариант МА10421
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

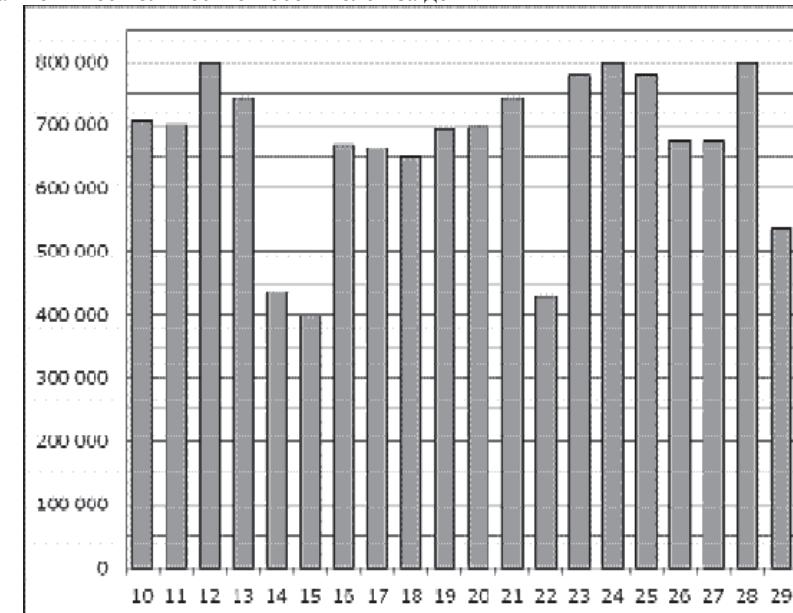
1

Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 390 рублей, а стоимость одного номера журнала — 23 рубля. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

Ответ: _____.

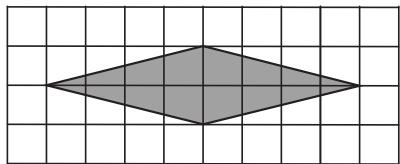
2

На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей больше, чем наименьшее количество посетителей за день.



Ответ: _____.

- 3** Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

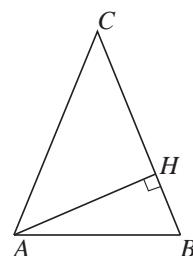
- 4** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 24 пассажиров, равна 0,86. Вероятность того, что окажется меньше 11 пассажиров, равна 0,63. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 11 до 23.

Ответ: _____.

- 5** Найдите корень уравнения $(x - 9)^2 = -36x$.

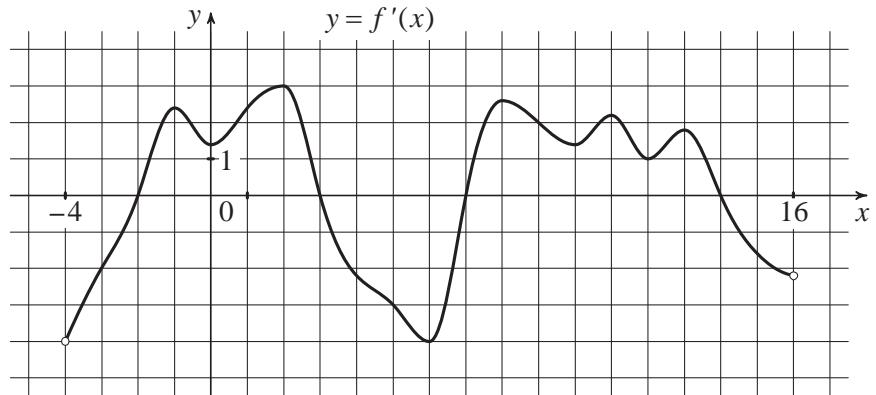
Ответ: _____.

- 6** В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 25, угол C равен 30° . Найдите AC .



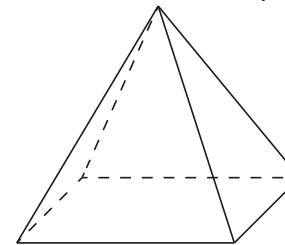
Ответ: _____.

- 7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 16)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[0; 13]$.



Ответ: _____.

- 8** Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: _____.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $46 \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \operatorname{tg} 83^\circ$.

Ответ: _____.

10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a \text{ км/ч}^2$. Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 километра, приобрести скорость 120 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2 .

Ответ: _____.

11 Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Ответ: _____.

12 Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 5x + 5)e^{7-x}$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{5 \sin x - 3}{5 \cos x - 4} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi\right]$.

14 В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 4. Через такую точку T ребра AD , что $AT : TD = 3 : 1$, параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- Найдите площадь сечения.

15 Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 3^{2x+1} - 6^x - 4^{x+1} - 9}{9^x - 3} \leq 3.$$

16 Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ с параллельными основаниями AD и BC разбивает его на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC .

- Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .
- Найдите CD , если известны диагонали четырёхугольника $BD = 5$ и $AC = 8$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллион рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 150 млн рублей, а за четыре года станут больше 250 млн рублей.

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-3)^2 + (y+4)^2 - 17)((2x+7)^2 + (2y-9)^2) \leq 0, \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

19 Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ при всех натуральных $n \geq 2$.

- Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 100S_1$?
- Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 50S_2$?
- Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 S_{10}}$?

**Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс**

3 марта 2016 года
Вариант МА10422
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

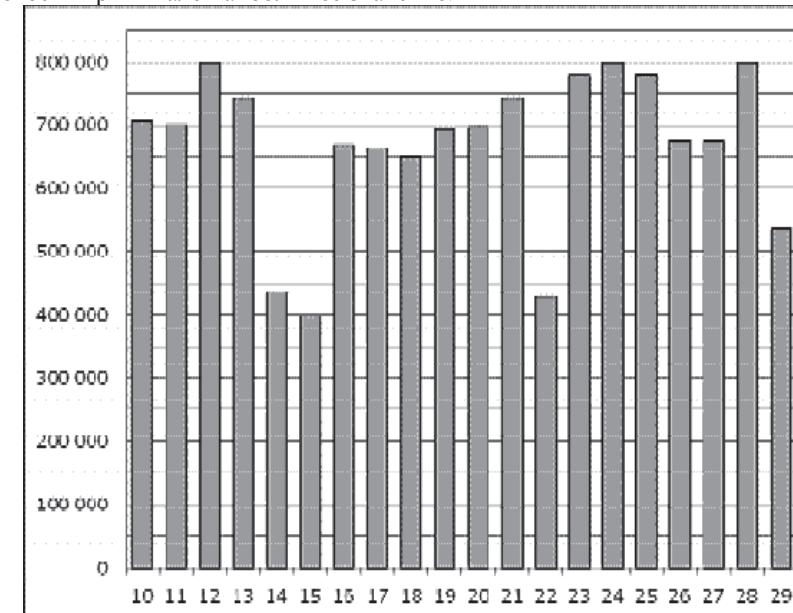
1

Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 810 рублей, а стоимость одного номера журнала — 39 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

Ответ: _____.

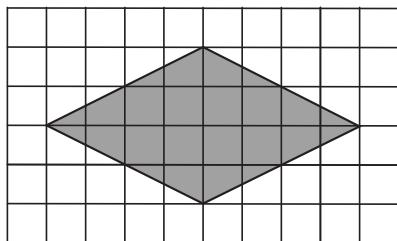
2

На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, сколько раз за данный период количество посетителей сайта РИА Новости принимало наибольшее значение.



Ответ: _____.

- 3** Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

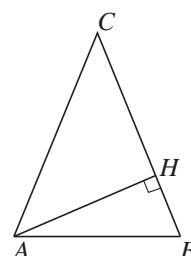
- 4** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 22 пассажиров, равна 0,9. Вероятность того, что окажется меньше 13 пассажиров, равна 0,57. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 13 до 21.

Ответ: _____.

- 5** Найдите корень уравнения $(x+11)^2 = 44x$.

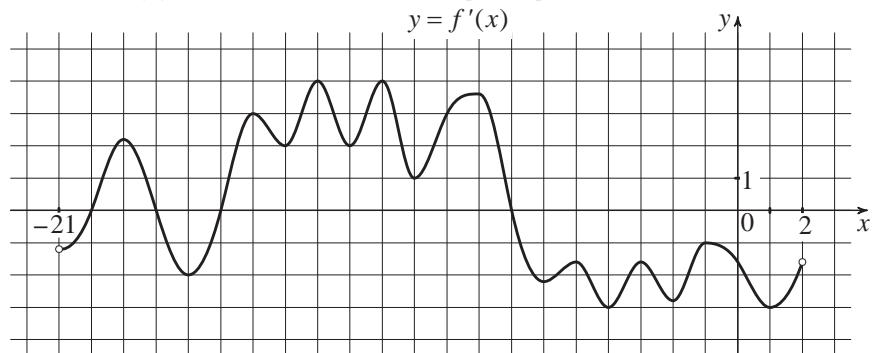
Ответ: _____.

- 6** В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 12, угол C равен 30° . Найдите AC .



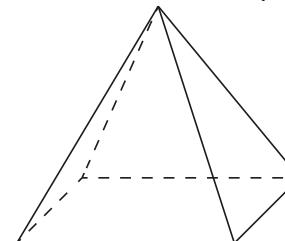
Ответ: _____.

- 7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-21; 2)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-19; 1]$.



Ответ: _____.

- 8** Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: _____.

Часть 2

- 9** Найдите значение выражения $28 \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ$.

Ответ: _____.

- 10** Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч 2 . Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1 километр, приобрести скорость 120 км/ч. Ответ выразите в км/ч 2 .

Ответ: _____.

- 11** Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 45 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Ответ: _____.

- 12** Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 8x + 8)e^{6-x}$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\frac{17\sin x - 8}{17\cos x - 15} = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi]$.

- 14** В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 8. Боковое ребро пирамиды равно 5. Через такую точку T ребра AD , что $AT:TD=4$, параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.
 а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
 б) Найдите площадь сечения.

- 15** Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 5^{2x+1} - 10^x - 6 \cdot 4^x - 25}{25^x - 5} \leq 5.$$

- 16** Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ с параллельными основаниями AD и BC разбивает его на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC .

- а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .
 б) Найдите CD , если известны диагонали четырёхугольника $BD = 4$ и $AC = 4\sqrt{3}$.

- 17** По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 200 млн рублей, а за четыре года станут больше 270 млн рублей.

- 18** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
- $$\begin{cases} ((x-3)^2 + (y+3)^2 - 32)((2x+3)^2 + (2y-13)^2) \leq 0, \\ ax + y = 2 \end{cases}$$
- не имеет решений.

- 19** Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ при всех натуральных $n \geq 2$.
 а) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_8 = 50S_1$?
 б) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_8 = 30S_2$?
 в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_4^2}{S_1 S_8}$?

**Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс**

3 марта 2016 года
Вариант МА10423
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

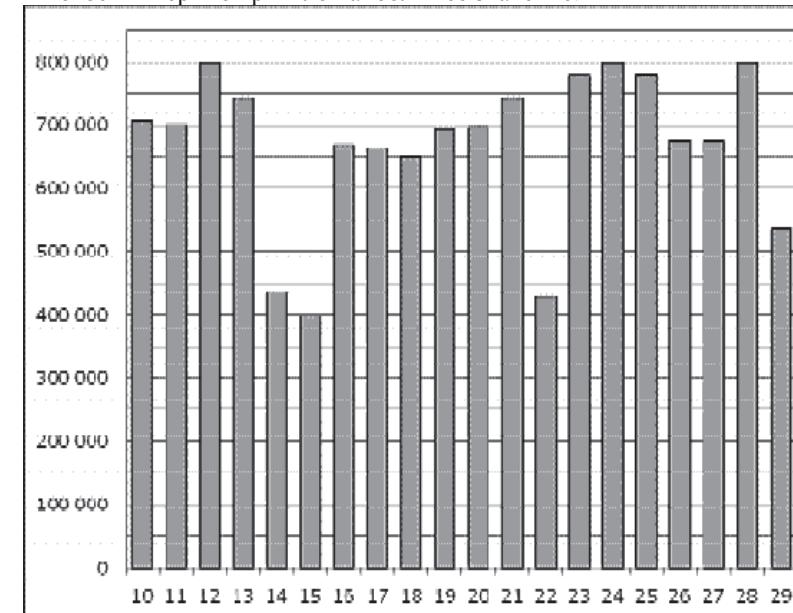
1

Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 640 рублей, а стоимость одного номера журнала — 29 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

Ответ: _____.

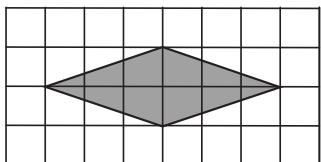
2

На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа в указанный период количество посетителей сайта РИА Новости впервые приняло наибольшее значение.



Ответ: _____.

- 3** Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

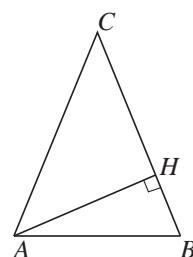
- 4** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,83. Вероятность того, что окажется меньше 11 пассажиров, равна 0,64. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 11 до 17.

Ответ: _____.

- 5** Найдите корень уравнения $(x+15)^2 = 60x$.

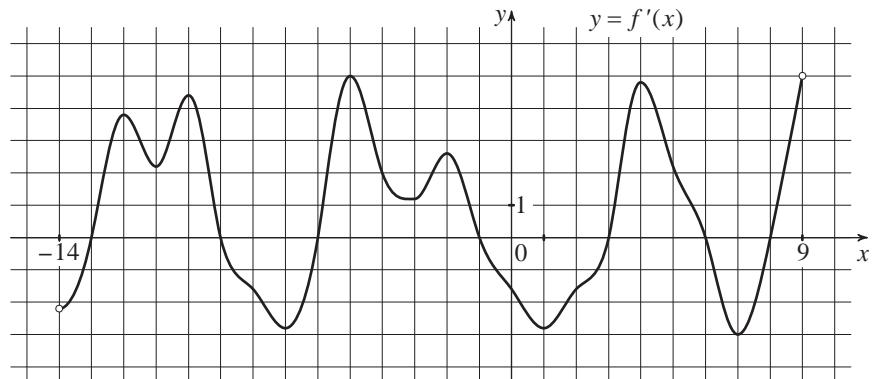
Ответ: _____.

- 6** В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 22, угол C равен 30° . Найдите AC .



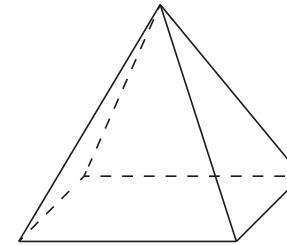
Ответ: _____.

- 7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-12; 7]$.



Ответ: _____.

- 8** Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 6, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: _____.

Часть 2

- 9** Найдите значение выражения $23 \operatorname{tg} 26^\circ \cdot \operatorname{tg} 64^\circ$.

Ответ: _____.

- 10** Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч 2 . Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость 150 км/ч. Ответ выразите в км/ч 2 .

Ответ: _____.

- 11** Лодка в 5:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 23:00 того же дня. Определите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что собственная скорость лодки равна 4 км/ч.

Ответ: _____.

- 12** Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 17x + 17)e^{9-x}$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\frac{5\sin x - 3}{5\cos x - 4} = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi\right]$.

- 14** В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 4. Через такую точку T ребра AD , что $AT:TD = 3:1$, параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.
 а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
 б) Найдите площадь сечения.

- 15** Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 3^{2x+1} - 6^x - 4^{x+1} - 9}{9^x - 3} \leq 3.$$

- 16** Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ с параллельными основаниями AD и BC разбивает его на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC .
 а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .
 б) Найдите CD , если известны диагонали четырёхугольника $BD = 5$ и $AC = 8$.

- 17** По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллион рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 150 млн рублей, а за четыре года станут больше 250 млн рублей.

- 18** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
- $$\begin{cases} ((x-3)^2 + (y+4)^2 - 17)((2x+7)^2 + (2y-9)^2) \leq 0, \\ ax + y = 1 \end{cases}$$
- не имеет решений.

- 19** Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ при всех натуральных $n \geq 2$.
 а) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 100S_1$?
 б) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 50S_2$?
 в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 S_{10}}$?

**Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс**

3 марта 2016 года
Вариант МА10424
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

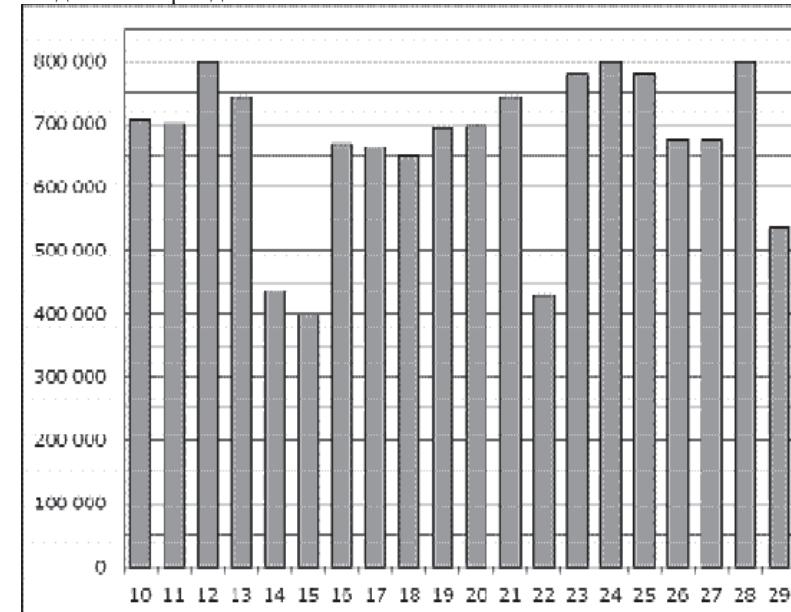
1

Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 830 рублей, а стоимость одного номера журнала — 38 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

Ответ: _____.

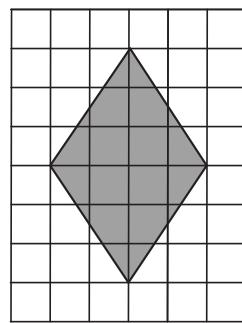
2

На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме разность наибольшего и наименьшего количества посетителей за день в данный период.



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

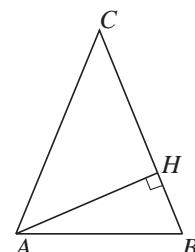
- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,95. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,48. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $(x - 7)^2 = -28x$.

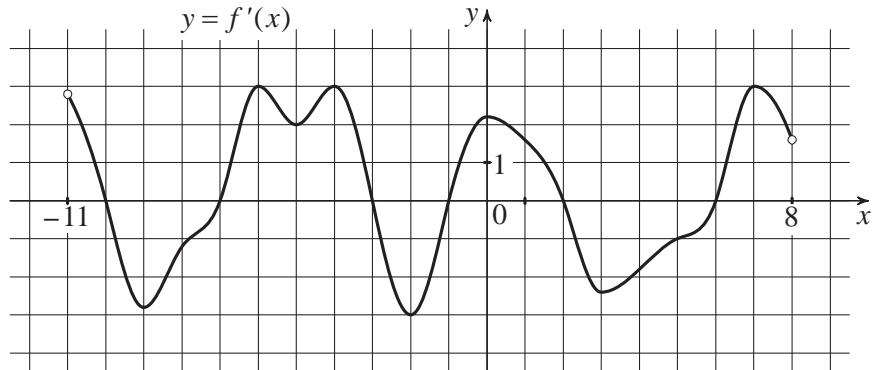
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 31, угол C равен 30° . Найдите AC .



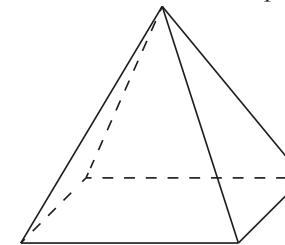
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 7]$.



Ответ: _____.

- 8 Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 12, боковые рёбра равны 10. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: _____.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $-6 \operatorname{tg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 72^\circ$.

Ответ: _____.

- 10** Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч 2 . Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость 90 км/ч. Ответ выразите в км/ч 2 .

Ответ: _____.

- 11** Моторная лодка в 11:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 21:00 того же дня. Определите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что собственная скорость лодки равна 9 км/ч.

Ответ: _____.

- 12** Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{19-x}$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\frac{17\sin x - 8}{17\cos x - 15} = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

- 14** В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 8. Боковое ребро пирамиды равно 5. Через такую точку T ребра AD , что $AT:TD=4$, параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.
 а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
 б) Найдите площадь сечения.

- 15** Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 5^{2x+1} - 10^x - 6 \cdot 4^x - 25}{25^x - 5} \leq 5.$$

- 16** Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ с параллельными основаниями AD и BC разбивает его на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC .

- а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .
 б) Найдите CD , если известны диагонали четырёхугольника $BD = 4$ и $AC = 4\sqrt{3}$.

- 17** По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 200 млн рублей, а за четыре года станут больше 270 млн рублей.

- 18** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
- $$\begin{cases} ((x-3)^2 + (y+3)^2 - 32)((2x+3)^2 + (2y-13)^2) \leq 0, \\ ax + y = 2 \end{cases}$$
- не имеет решений.

- 19** Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ при всех натуральных $n \geq 2$.
 а) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_8 = 50S_1$?
 б) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_8 = 30S_2$?
 в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_4^2}{S_1 S_8}$?

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**13**

а) Решите уравнение $\frac{5\sin^2 x - 3\sin x}{5\cos x + 4} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

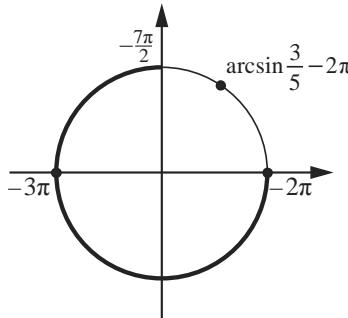
Решение.

а) Имеем

$$\frac{5\sin^2 x - 3\sin x}{5\cos x + 4} = 0; \quad \frac{\sin x \left(\sin x - \frac{3}{5}\right)}{\cos x + \frac{4}{5}} = 0; \quad \begin{cases} \sin x = \frac{3}{5}, \\ \sin x = 0, \\ \cos x \neq -\frac{4}{5}, \end{cases}$$

откуда $x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ или $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем -3π ; -2π .

Ответ: а) $\arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; πn , $n \in \mathbb{Z}$; б) -3π ; -2π .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б.	1
ИЛИ	
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

Дана правильная треугольная призма $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

Решение.а) Найдём стороны треугольника ATC_1 :

$$AT = \sqrt{16+4} = \sqrt{20},$$

$$TC_1 = \sqrt{16-4} = \sqrt{12},$$

$$AC_1 = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}.$$

Заметим, что

$$AC_1^2 = 32 = 12 + 20 = AT^2 + TC_1^2.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ATC_1 является прямоугольным.

б) Так как прямая $C_1 T$ перпендикулярна прямым $A_1 T$ и AT , угол $A_1 TA$ искомый. Тангенс угла $A_1 TA$ равен

$$\operatorname{tg} A_1 TA = \frac{AA_1}{A_1 T} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 2$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Верно доказан пункт а.	1
ИЛИ	
Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} (5 - 2^x).$$

Решение.

Заметим, что $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5} > 1$, поскольку равносильны следующие неравенства

$$5 - \sqrt{2} < \sqrt{13}; \quad 27 - 10\sqrt{2} < 13; \quad 14 < 10\sqrt{2}; \quad 49 < 50.$$

С учётом этого имеем

$$\begin{aligned} \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 &\geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} (5 - 2^x); \\ 4 &\geq 5 - 2^x > 0; \quad \begin{cases} 2^x \geq 1, & x \geq 0, \\ 2^x < 5; & x < \log_2 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $[0; \log_2 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16 Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

Решение.

а) Касательная LM параллельна хорде KN , значит, $\angle KNL = \angle MLN$, а так как $\angle MLN = \angle LKN$ как угол между касательной и хордой, треугольник KLN равнобедренный с основанием KN .

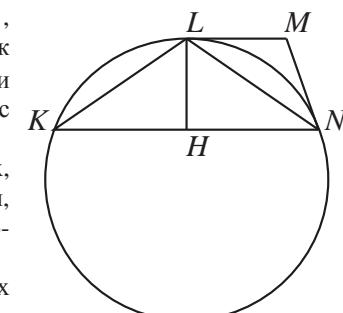
Поскольку $ML = MN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, треугольник LMN также равнобедренный с основанием LN .

Углы при основаниях равнобедренных треугольников LMN и LKN равны, следовательно, эти треугольники подобны.

б) Угол при вершине равнобедренного треугольника KLN равен 120° , значит, его высота LH вдвое меньше боковой стороны $LN = \frac{KN}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, то есть $LH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$S_{KLN} = \frac{1}{2} KN \cdot LH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б.	2
ИЛИ	
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	
Имеется верное доказательство утверждения пункта а.	1
ИЛИ	
При обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	
ИЛИ	
Обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удваиваются, а за четыре года как минимум утроятся.

Решение.

К началу 2-го года получится $1,15 \cdot 10 + n = 11,5 + n$ млн вложений, а к началу 3-го года —

$$1,15(11,5 + n) + n = 13,225 + 2,15n.$$

По условию $13,225 + 2,15n \geq 20$. Наименьшее целое решение $n = 4$. Тогда к началу 3-го года получится

$$13,225 + 8,6 = 21,825 \text{ млн.}$$

К началу 4-го года имеем $1,15 \cdot 21,825 + m$ млн, а в конце проекта

$$1,15(1,15 \cdot 21,825 + m) + m = 1,3225 \cdot 21,825 + 2,15m > 28 + 2,15m.$$

По условию $28 + 2,15m \geq 30$. Получаем, что $m = 1$ — наименьшее целое решение.

Ответ: 4 и 1 млн руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
ИЛИ	
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 2x^2 - x \log_2(b-1) + 4 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

Решение.

Пусть $\log_2(b-1) = a$. Рассмотрим уравнение

$$x^3 + 2x^2 - ax + 4 = 0.$$

Число $x=0$ не является корнем этого уравнения ни при каком значении параметра a . Поэтому это уравнение равносильно уравнению

$$a = x^2 + 2x + \frac{4}{x}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 + 2x + \frac{4}{x}, \quad -1 \leq x \leq 2, \quad x \neq 0$$

и определим число корней и их расположение для каждого значения параметра a .

Найдём производную $f'(x) = 2x + 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+2x+2)}{x^2}$. Отсюда следует, что на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0; 1]$ функция убывает, а на промежутке $[1; +\infty)$ — возрастает. Следовательно, точка $x=1$ — точка минимума, а минимум равен 7. Из полученных свойств функции $f(x)$ следует, что при любом значении a данное уравнение имеет ровно один отрицательный корень, и поскольку $f(-1) = -5$, то при $a \leq -5$ уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[-1; 2]$; при $-5 < a < 7$ уравнение не имеет корней на $[-1; 2]$. При $a = 7$ уравнение имеет единственный корень $x=1$ на отрезке $[-1; 2]$. Поскольку $f(2) = 10$, то при $7 < a \leq 10$ на отрезке $[-1; 2]$ уравнение имеет ровно два корня. При $a > 10$ уравнение также имеет единственный корень на отрезке $[-1; 2]$.

Решим два неравенства и уравнение:

$$\log_2(b-1) \leq -5, \quad \log_2(b-1) = 7, \quad \log_2(b-1) > 10.$$

Получим:

$$1 < b \leq \frac{33}{32}; \quad b = 129; \quad b > 1025.$$

Ответ: $1 < b \leq \frac{33}{32}; b = 129; b > 1025$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения b , но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения b	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и прямой (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

- а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 100?
 б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{49} ровно 11 чисел делятся на 100?
 в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$?

Решение.

а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 50 и разностью 50. Среди первых семи её членов (50, 100, 150, 200, 250, 300, 350) ровно три делятся на 100.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Из условия следует, что d — натуральное число. Пусть m и n — натуральные числа, $m > n$, $\text{НОД}(d, 100)$ обозначает наибольший общий делитель чисел d и 100. Имеем

$$a_m - a_n = (a_1 + (m-1)d) - (a_1 + (n-1)d) = (m-n)d.$$

Следовательно, разность $a_m - a_n$ делится на 100 тогда и только тогда, когда разность $m-n$ делится на $k = \frac{100}{\text{НОД}(d, 100)}$. Значит, если среди членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ есть кратные 100, то это члены с номерами вида $kp+q$, где q — номер первого члена, кратного 100 ($q \leq k$), а p пробегает все неотрицательные целые числа. Поэтому среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ровно один будет делиться на 100.

Если $k \leq 4$, то $12 < \frac{49}{k}$, и среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{49} будет по крайней мере 12 чисел, кратных 100. Если же $k \geq 5$, то $10 > \frac{49}{k}$, и среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{49} будет не более 10 чисел, кратных 100. Значит, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{49} ровно 11 чисел делятся на 100.

в) Обозначим через $[x]$ целую часть числа x — наименьшее целое число, не превосходящее x . По доказанному в пункте б) среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ровно один будет делиться на 100, где $k = \frac{100}{\text{НОД}(d, 100)}$, d — разность арифметической прогрессии.

Значит, среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} кратными 100 будут не более $\left[\frac{2n}{k} \right] + 1$ чисел. Аналогично, среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$ кратными 100 будут не менее $\left[\frac{3n}{k} \right]$ чисел. Неравенство $\left[\frac{2n}{k} \right] + 1 > \left[\frac{3n}{k} \right]$ выполнено тогда и только тогда, когда $\left[\frac{2n}{k} \right] = \left[\frac{3n}{k} \right]$. Пусть это равенство выполнено. Тогда разность между числами $\frac{3n}{k}$ и $\frac{2n}{k}$ меньше 1. Получаем, что $\frac{n}{k} < 1$ и $\frac{2n}{k} < 2$. Значит, $\left[\frac{3n}{k} \right] = \left[\frac{2n}{k} \right] < 2$, $\frac{3n}{k} < 2$ и $n < \frac{2k}{3}$. Поскольку число k не превосходит 100, отсюда следует, что $n \leq 66$.

Рассмотрим прогрессию с первым членом 69 и разностью 1. Тогда среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{132} ровно два делятся на 100 ($a_{32} = 100$ и $a_{132} = 200$). Среди чисел $a_{133}, a_{134}, \dots, a_{330}$ ровно одно делится на 100 ($a_{232} = 300$). Этот пример показывает, что n может равняться 66.

Ответ: а) Да, например, прогрессия 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, ...; б) нет; в) 66.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а, — обоснованное решение в п. б, — искомая оценка в п. в, — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**13**

а) Решите уравнение $\frac{13\sin^2 x - 5\sin x}{13\cos x + 12} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

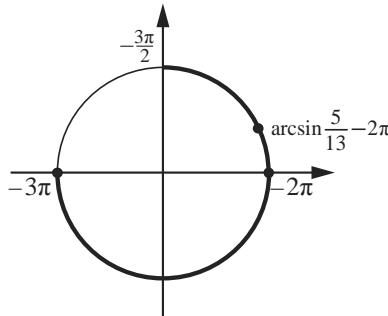
Решение.

а) Имеем

$$\frac{13\sin^2 x - 5\sin x}{13\cos x + 12} = 0; \quad \frac{\sin x(\sin x - \frac{5}{13})}{\cos x + \frac{12}{13}} = 0; \quad \begin{cases} \sin x = \frac{5}{13}, \\ \sin x = 0, \\ \cos x \neq -\frac{12}{13}, \end{cases}$$

откуда $x = \arcsin \frac{5}{13} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $-3\pi; -2\pi; \arcsin \frac{5}{13} - 2\pi$.

Ответ: а) $\arcsin \frac{5}{13} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; πn , $n \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -2\pi; \arcsin \frac{5}{13} - 2\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б.	1
ИЛИ	
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

Дана правильная треугольная призма $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

Решение.а) Найдём стороны треугольника ATC_1 :

$$AT = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}, \\ TC_1 = \sqrt{36-9} = \sqrt{27}, \\ AC_1 = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}.$$

Заметим, что

$$AC_1^2 = 72 = 45 + 27 = AT^2 + TC_1^2.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ATC_1 является прямоугольным.

б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT , угол A_1TA искомый. Тангенс угла A_1TA равен

$$\operatorname{tg} A_1TA = \frac{AA_1}{A_1T} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 2$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Верно доказан пункт а.	1
ИЛИ	
Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} 5 \geq \log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} (7 - 2^x).$$

Решение.

Заметим, что $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6} > 1$, поскольку равносильны следующие неравенства

$$6 - \sqrt{3} < \sqrt{19}; \quad 39 - 12\sqrt{3} < 19; \quad 20 < 12\sqrt{3}; \quad 5 < 3\sqrt{3}; \quad 25 < 27.$$

С учётом этого имеем

$$\begin{aligned} \log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} 5 &\geq \log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} (7 - 2^x); \\ 5 &\geq 7 - 2^x > 0; \quad \begin{cases} 2^x \geq 2, & x \geq 1, \\ 2^x < 7; & x < \log_2 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $[1; \log_2 7]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16 Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 6$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

Решение.

а) Касательная LM параллельна хорде KN , значит, $\angle KNL = \angle MLN$, а так как $\angle MLN = \angle LKN$ как угол между касательной и хордой, треугольник KLN равнобедренный с основанием KN .

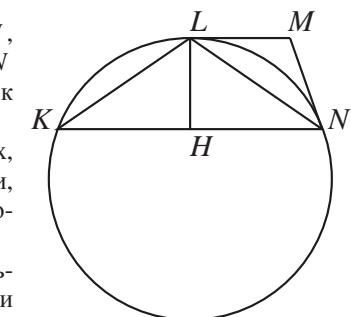
Поскольку $ML = MN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, треугольник LMN также равнобедренный с основанием LN .

Углы при основаниях равнобедренных треугольников LMN и KLN равны, следовательно, эти треугольники подобны.

б) Угол при вершине равнобедренного треугольника KLN равен 120° , значит, его высота LH вдвое меньше боковой стороны $LN = \frac{KN}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, то есть $LH = \sqrt{3}$. Следовательно,

$$S_{KLN} = \frac{1}{2} KN \cdot LH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $3\sqrt{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> .	2
ИЛИ	
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> .	1
ИЛИ	
При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	
ИЛИ	
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удваиваются, а за четыре года как минимум утроятся.

Решение.

К началу 2-го года получится $1,13 \cdot 20 + n = 22,6 + n$ млн вложений, а к началу 3-го года —

$$1,13(22,6 + n) + n = 25,538 + 2,13n.$$

По условию $25,538 + 2,13n \geq 40$. Наименьшее целое решение $n = 7$, так как при $n = 6$ неравенство уже не выполняется.

К началу 4-го года имеем $1,13 \cdot 40,448 + m$ млн, а в конце проекта

$$1,13(1,13 \cdot 40,448 + m) + m = 1,2769 \cdot 40,448 + 2,13m > 51,6 + 2,13m.$$

По условию $51,6 + 2,13m \geq 60$. Наименьшее целое решение $m = 4$.

Ответ: 7 и 4 млн руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
ИЛИ	
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - x \log_2(b-3) + 6 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-2; 2]$.

Решение.

Пусть $\log_2(b-3) = a$. Рассмотрим уравнение

$$x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0.$$

Число $x=0$ не является корнем этого уравнения ни при каком значении параметра a . Поэтому это уравнение равносильно уравнению

$$a = x^2 + 4x + \frac{6}{x}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 + 4x + \frac{6}{x}, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad x \neq 0$$

и определим число корней и их расположение для каждого значения параметра a .

Найдём производную $f'(x) = 2x + 4 - \frac{6}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+3x+3)}{x^2}$. Отсюда следует, что на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0; 1]$ функция убывает, а на промежутке $[1; +\infty)$ — возрастает. Следовательно, точка $x=1$ — точка минимума, а минимум равен 11. Из полученных свойств функции $f(x)$ следует, что при любом значении a данное уравнение имеет ровно один отрицательный корень, и поскольку $f(-2) = -7$, то при $a \leq -7$ уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[-2; 2]$; при $-7 < a < 11$ уравнение не имеет корней на $[-2; 2]$. При $a = 11$ уравнение имеет единственный корень $x=1$ на отрезке $[-2; 2]$. Поскольку $f(2) = 15$, то при $11 < a \leq 15$ на отрезке $[-2; 2]$ уравнение имеет ровно два корня. При $a > 15$ уравнение также имеет единственный корень на отрезке $[-2; 2]$.

Решим два неравенства и уравнение:

$$\log_2(b-3) \leq -7, \quad \log_2(b-3) = 11, \quad \log_2(b-3) > 15.$$

Получим:

$$3 < b \leq \frac{385}{128}; \quad b = 2051; \quad b > 32771.$$

$$\text{Ответ: } 3 < b \leq \frac{385}{128}; \quad b = 2051; \quad b > 32771.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения b , но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения b	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и прямой (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

- Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 36?
- Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} ровно 9 чисел делятся на 36?
- Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} больше кратных 36, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$?

Решение.

а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 18 и разностью 18. Среди первых семи её членов (18, 36, 54, 72, 90, 108, 126) ровно три делятся на 36.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Из условия следует, что d — натуральное число. Пусть m и n — натуральные числа, $m > n$, $\text{НОД}(d, 36)$ обозначает наибольший общий делитель чисел d и 36. Имеем

$$a_m - a_n = (a_1 + (m-1)d) - (a_1 + (n-1)d) = (m-n)d.$$

Следовательно, разность $a_m - a_n$ делится на 36 тогда и только тогда, когда разность $m-n$ делится на $k = \frac{36}{\text{НОД}(d, 36)}$. Значит, если среди членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ есть кратные 36, то это члены с номерами вида $kp+q$, где q — номер первого члена, кратного 36 ($q \leq k$), а p пробегает все неотрицательные целые числа. Поэтому среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ровно один будет делиться на 36.

Если $k \leq 3$, то $10 \leq \frac{30}{k}$, и среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} будет по крайней мере 10 чисел, кратных 36. Если же $k \geq 4$, то $8 > \frac{30}{k}$, и среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30}

будет не более 8 чисел, кратных 36. Значит, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} ровно 9 чисел делятся на 36.

в) Обозначим через $[x]$ целую часть числа x — наименьшее целое число, не превосходящее x . По доказанному в пункте б) среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ровно один будет делиться на 36, где $k = \frac{36}{\text{НОД}(d, 36)}$, d — разность арифметической прогрессии.

Значит, среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} кратными 36 будут не более $\left[\frac{2n}{k} \right] + 1$ чисел. Аналогично среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$ кратными 36 будут не менее $\left[\frac{3n}{k} \right]$ чисел. Неравенство $\left[\frac{2n}{k} \right] + 1 > \left[\frac{3n}{k} \right]$ выполнено тогда и только тогда, когда $\left[\frac{2n}{k} \right] = \left[\frac{3n}{k} \right]$. Пусть это равенство выполнено. Тогда разность между числами $\frac{3n}{k}$ и $\frac{2n}{k}$ меньше 1. Получаем, что $\frac{n}{k} < 1$ и $\frac{2n}{k} < 2$. Значит, $\left[\frac{3n}{k} \right] = \left[\frac{2n}{k} \right] < 2$, $\frac{3n}{k} < 2$ и $n < \frac{2k}{3}$. Поскольку число k не превосходит 36, отсюда следует, что $n \leq 23$.

Рассмотрим прогрессию с первым членом 27 и разностью 1. Тогда среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{46} ровно два делятся на 36 ($a_{10} = 36$ и $a_{46} = 72$). Среди чисел $a_{47}, a_{48}, \dots, a_{115}$ ровно одно делится на 36 ($a_{82} = 108$). Этот пример показывает, что n может равняться 23.

Ответ: а) Да, например, прогрессия 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, ...; б) нет; в) 23.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а, — обоснованное решение в п. б, — искомая оценка в п. в, — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

a) Решите уравнение $\frac{5\sin x - 3}{5\cos x - 4} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi]$.

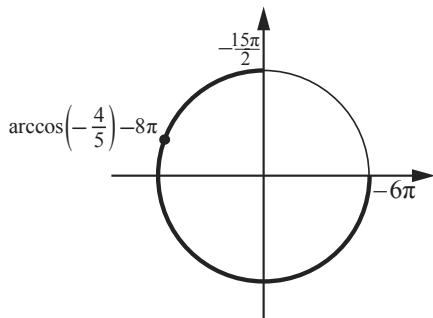
Решение.

а) Имеем

$$\frac{5\sin x - 3}{5\cos x - 4} = 0; \quad \begin{cases} \sin x = \frac{3}{5}, \\ \cos x \neq \frac{4}{5}, \end{cases}$$

откуда $x = \pi - \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k = \arccos \left(-\frac{4}{5} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\arccos \left(-\frac{4}{5} \right) - 8\pi$.

Ответ: а) $\arccos \left(-\frac{4}{5} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\arccos \left(-\frac{4}{5} \right) - 8\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б.	1
ИЛИ	
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 4. Через такую точку T ребра AD , что $AT:TD = 3:1$, параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

Решение.

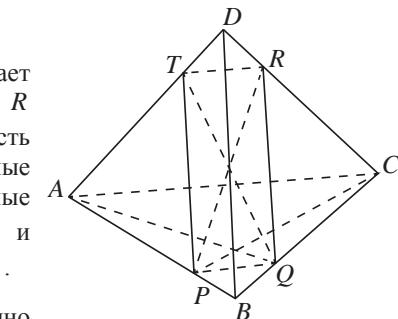
а) Пусть указанная плоскость пересекает стороны AB , BC и CD в точках P , Q и R соответственно. Так как плоскость параллельна сторонам AC и BD , прямые TR и PQ параллельны прямой AC , прямые RQ и TP параллельны прямой BD , и $AT:TD = AP:PB = CQ:QB = CR:RD = 3:1$.

Значит, $TR = \frac{1}{4}AC = PQ = 1,5$, и аналогично

$TP = \frac{3}{4}BD = RQ = 3$, следовательно, $TRQP$ — параллелограмм. Треугольники CBP и ABQ равны по двум сторонам и углу между ними, треугольники ATQ и CRP также равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $TQ = RP$. Значит, треугольники TPQ и RQP равны по трём сторонам, поэтому, углы TPQ и RQP равны, следовательно, $TPQR$ — прямоугольник.

б) Стороны прямоугольника равны 3 и 1,5, значит, его площадь равна $3 \cdot 1,5 = 4,5$.

Ответ: б) 4,5.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Верно доказан пункт а.	1
ИЛИ	
Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 3^{2x+1} - 6^x - 4^{x+1} - 9}{9^x - 3} \leq 3.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{6 \cdot 9^x - 6^x - 4 \cdot 2^{2x} - 9 - 3 \cdot 9^x + 9}{9^x - 3} \leq 0; \\ & \frac{3 \cdot 3^{2x} - 6^x - 4 \cdot 2^{2x}}{9^x - 3} \leq 0; \\ & \frac{3 \cdot 1,5^{2x} - 1,5^x - 4}{9^x - 3} \leq 0; \\ & \frac{(1,5^x + 1)(1,5^x - \frac{4}{3})}{3^{2x} - 3} \leq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $1,5^x + 1 > 0$ при любом значении x ,

$3^{2x} - 3 < 0$ при $x < 0,5$ и $3^{2x} - 3 > 0$ при $x > 0,5$,

$1,5^x - \frac{4}{3} \leq 0$ при $x \leq \log_{1,5} \frac{4}{3} = \log_{1,5} \frac{2}{1,5} = \log_{1,5} 2 - \log_{1,5} 1,5 = \log_{1,5} 2 - 1$ и

$1,5^x - \frac{4}{3} > 0$ при $x > \log_{1,5} 2 - 1$.

Заметим, что $\log_{1,5} 2 - 1 > 0,5$, поскольку равносильны следующие неравенства

$$\begin{aligned} & \log_{1,5} 2 - 1 > 0,5; \quad \log_{1,5} 2 > 1,5; \quad 2 > 1,5^2; \\ & 4 > 1,5^3; \quad 4 > \frac{27}{8}; \quad 32 > 27. \end{aligned}$$

С учётом этого исходное неравенство будет выполняться при $0,5 < x \leq \log_{1,5} 2 - 1$.

Ответ: $(0,5; \log_{1,5} 2 - 1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ с параллельными основаниями AD и BC разбивает его на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC .

- а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .
 б) Найдите CD , если известны диагонали четырёхугольника $BD = 5$ и $AC = 8$.

Решение.

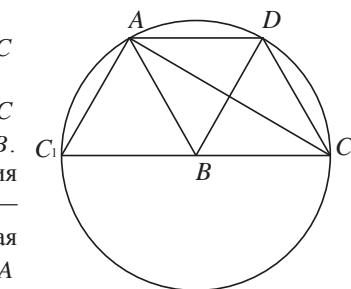
а) Так как $\angle BAC = \angle ACB = \angle CAD$, получаем, что AC — биссектриса угла BAD .

б) Поскольку $BA = BD = BC = 5$, точки A , D и C лежат на окружности радиуса 5 с центром B . Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке C_1 . Тогда CC_1 — диаметр окружности, а $ADCC_1$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $AC_1 = CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CC_1 , получаем, что $\angle CAC_1 = 90^\circ$. Из прямоугольного треугольника ACC_1 находим, что

$$AC_1 = \sqrt{CC_1^2 - AC^2} = \sqrt{100 - 64} = 6.$$

Следовательно, $CD = AC_1 = 6$.

Ответ: б) 6.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллион рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 150 млн рублей, а за четыре года станут больше 250 млн рублей.

Решение.

Пусть S млн — первоначальные вложения. К началу 2-го года получится $1,2S + 20$ млн, а к началу 3-го года — $1,2(1,2S + 20) + 20 = 1,44S + 44$. По условию $1,44S + 44 > 150$, откуда $S > \frac{106}{1,44} > 73,6$.

К началу 4-го года имеем $1,2(1,44S + 44) + 10$, а в конце проекта

$$1,2(1,2(1,44S + 44) + 10) + 10 = 2,0736S + 63,36 + 22 = 2,0736S + 85,36.$$

По условию $2,0736S + 85,36 > 250$, откуда $S > \frac{164,64}{2,0736} > 79,3$.

А значит, минимальное возможное целое $S = 80$.

Ответ: 80 млн. руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
ИЛИ	
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

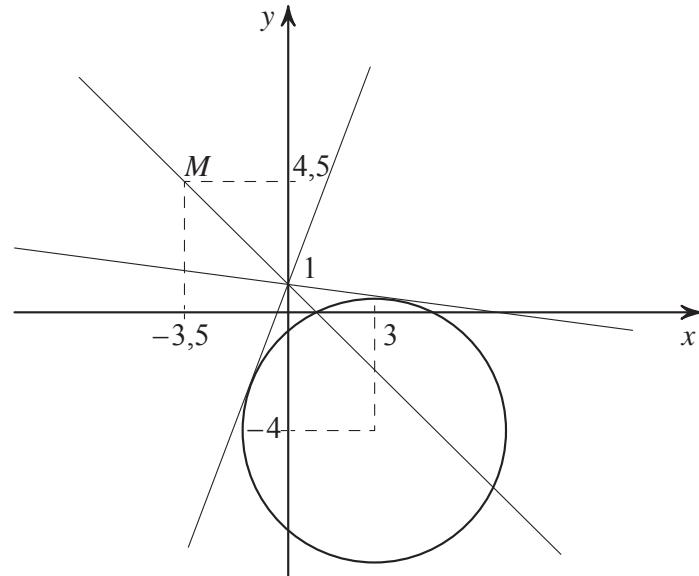
Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-3)^2 + (y+4)^2 - 17)((2x+7)^2 + (2y-9)^2) \leq 0, \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Неравенство системы задаёт объединение круга $(x-3)^2 + (y+4)^2 \leq 17$ и точки $M(-3,5; 4,5)$. Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая $y = 1 - ax$ не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M .



Составим систему:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+4)^2 = 17, \\ y = 1 - ax; \\ (x-3)^2 + (5-ax)^2 = 17; \\ (1+a^2)x^2 - (6+10a)x + 17 = 0. \end{cases}$$

Чтобы найти a , при которых прямая не имеет общих точек с кругом, рассмотрим следующее ограничение на дискриминант:

$$\frac{D}{4} = (3+5a)^2 - 17(1+a^2) < 0;$$

$$4a^2 + 15a - 4 < 0,$$

откуда $-4 < a < 0,25$.

Через точку M прямая $y = 1 - ax$ проходит, только если $4,5 = 1 + 3,5a$, то есть $a = 1$. Следовательно, значения $-4 < a < 0,25$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $-4 < a < 0,25$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ при всех натуральных $n \geq 2$.

- Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 100S_1$?
- Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 50S_2$?
- Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 S_{10}}$?

Решение.

а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 1 и разностью 2. Имеем $S_{10} = 1 + 3 + \dots + 19 = \frac{1+19}{2} \cdot 10 = 100 = 100S_1$.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тогда $S_2 = 2a_1 + d$ и $S_{10} = 10a_1 + 45d$. Если $S_{10} = 50S_2$, то $10a_1 + 45d = 100a_1 + 50d$ и $-5d = 90a_1$. Поскольку число a_1 натуральное, отсюда получаем, что число d отрицательное. Это противоречит условию задачи, так как убывающая бесконечная арифметическая прогрессия не может состоять только из натуральных чисел. Значит, такой арифметической прогрессии, состоящей из различных натуральных чисел, для которой $S_{10} = 50S_2$, не существует.

в) Пусть $k = \frac{S_5^2}{S_1 S_{10}}$, d — разность арифметической прогрессии. Из условия следует, что $d > 0$. Найдём наименьшее возможное значение k . Имеем

$$\begin{aligned} S_5^2 &= (5a_1 + 10d)^2 = 25a_1^2 + 100a_1d + 100d^2 = kS_1 S_{10} = \\ &= ka_1(10a_1 + 45d) = 10ka_1^2 + 45ka_1d. \end{aligned}$$

Отсюда

$$25a_1^2 + 100a_1d + 100d^2 = 10ka_1^2 + 45ka_1d,$$

или, что равносильно,

$$(5-2k)a_1^2 + (20-9k)a_1d + 20d^2 = 0.$$

Поделим обе части последнего равенства на d^2 и положим $x = \frac{a_1}{d}$.

Получаем равенство $(5-2k)x^2 + (20-9k)x + 20 = 0$.

Уравнение $(5-2k)x^2 + (20-9k)x + 20 = 0$ должно иметь хотя бы один корень и при $k \neq \frac{5}{2}$ должно иметь дискриминант $D \geq 0$.

Имеем $D = (20-9k)^2 - 80(5-2k) = 81k^2 - 200k \geq 0$. Поскольку число k положительно, отсюда следует, что $k \geq \frac{200}{81}$.

Рассмотрим прогрессию с первым членом 18 и разностью 1. Тогда $S_1 = 18$,

$S_5 = 5 \cdot 18 + 10 \cdot 1 = 100$, $S_{10} = 10 \cdot 18 + 45 \cdot 1 = 225$ и $\frac{S_5^2}{S_1 S_{10}} = \frac{100^2}{18 \cdot 225} = \frac{200}{81}$. Этот

пример показывает, что наименьшее возможное значение дроби $\frac{S_5^2}{S_1 S_{10}}$ равно $\frac{200}{81}$.

Ответы: а) Да, например, прогрессия 1, 3, 5, ..., 19, ...; б) нет; в) $\frac{200}{81}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. а, – обоснованное решение в п. б, – искомая оценка в п. в, – пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**13**

а) Решите уравнение $\frac{17\sin x - 8}{17\cos x - 15} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi]$.

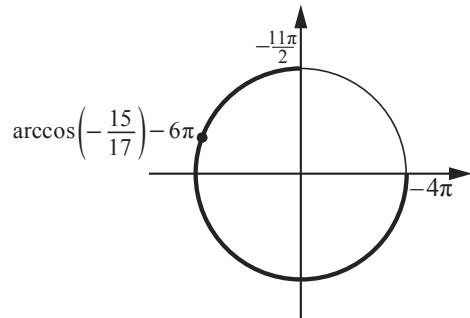
Решение.

а) Имеем

$$\frac{17\sin x - 8}{17\cos x - 15} = 0; \quad \begin{cases} \sin x = \frac{8}{17}, \\ \cos x \neq \frac{15}{17}, \end{cases}$$

откуда $x = \pi - \arcsin \frac{8}{17} + 2\pi k = \arccos \left(-\frac{15}{17} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\arccos \left(-\frac{15}{17} \right) - 6\pi$.

Ответ: а) $\arccos \left(-\frac{15}{17} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\arccos \left(-\frac{15}{17} \right) - 6\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б.	1
ИЛИ	
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
2	

14

В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 8. Боковое ребро пирамиды равно 5. Через такую точку T ребра AD , что $AT:TD=4$, параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

Решение.

а) Пусть указанная плоскость пересекает стороны AB , BC и CD в точках P , Q и R соответственно. Так как плоскость параллельна сторонам AC и BD , прямые TR и PQ параллельны прямой AC , прямые RQ и TP параллельны прямой BD , и $AT:TD=AP:PB=CQ:QB=CR:RD=4$.

Значит, $TR=\frac{1}{5}AC=PQ=1,6$, и аналогично

$TP=\frac{4}{5}BD=RQ=4$, следовательно, $TRQP$ — параллелограмм. Треугольники CBP и ABQ равны по двум сторонам и углу между ними, треугольники ATQ и CRP также равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $TQ=RP$. Значит, треугольники RPQ равны по трём сторонам, поэтому, углы TPQ и RQP равны, следовательно, $TPQR$ — прямоугольник.

б) Стороны прямоугольника равны 4 и 1,6, значит, его площадь равна $4 \cdot 1,6 = 6,4$.

Ответ: б) 6,4.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Верно доказан пункт а.	1
ИЛИ	
Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
2	

15 Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 5^{2x+1} - 10^x - 6 \cdot 4^x - 25}{25^x - 5} \leq 5.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{10 \cdot 25^x - 10^x - 6 \cdot 2^{2x} - 25 - 5 \cdot 25^x + 25}{25^x - 5} \leq 0;$$

$$\frac{5 \cdot 5^{2x} - 10^x - 6 \cdot 2^{2x}}{25^x - 5} \leq 0;$$

$$\frac{5 \cdot 2 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 6}{25^x - 5} \leq 0;$$

$$\frac{(2 \cdot 5^x + 1)(2 \cdot 5^x - \frac{6}{5})}{5^{2x} - 5} \leq 0.$$

Заметим, что $2 \cdot 5^x + 1 > 0$ при любом значении x ,

$5^{2x} - 5 < 0$ при $x < 0,5$ и $5^{2x} - 5 > 0$ при $x > 0,5$,

$2 \cdot 5^x - \frac{6}{5} \leq 0$ при $x \leq \log_{2,5} \frac{6}{5} = \log_{2,5} \frac{3}{2,5} = \log_{2,5} 3 - \log_{2,5} 2,5 = \log_{2,5} 3 - 1$ и

$2 \cdot 5^x - \frac{6}{5} > 0$ при $x > \log_{2,5} 3 - 1$.

Заметим, что $\log_{2,5} 3 - 1 < 0,5$, поскольку равносильны следующие неравенства

$$\log_{2,5} 3 - 1 < 0,5; \quad \log_{2,5} 3 < 1,5; \quad 3 < 2 \cdot 5^{\frac{3}{2}};$$

$$9 < 2 \cdot 5^3; \quad 9 < \frac{125}{8}; \quad 72 < 125.$$

С учётом этого исходное неравенство будет выполняться, когда $\log_{2,5} 3 - 1 \leq x < 0,5$.

Ответ: $[\log_{2,5} 3 - 1; 0,5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ с параллельными основаниями AD и BC разбивает его на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC .

- Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .
- Найдите CD , если известны диагонали четырёхугольника $BD = 4$ и $AC = 4\sqrt{3}$.

Решение.

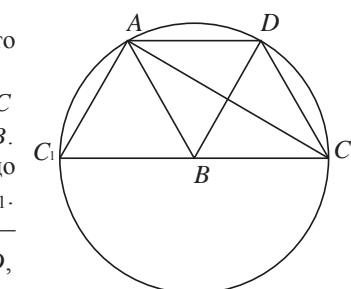
а) Так как $\angle BAC = \angle ACB = \angle CAD$, получаем, что AC — биссектриса угла BAD .

б) Поскольку $BA = BD = BC = 4$, точки A , D и C лежат на окружности радиуса 4 с центром B . Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке C_1 . Тогда CC_1 — диаметр окружности, а $ADCC_1$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $AC_1 = CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CC_1 , получаем, что $\angle CAC_1 = 90^\circ$. Из прямоугольного треугольника ACC_1 находим, что

$$AC_1 = \sqrt{CC_1^2 - AC^2} = \sqrt{64 - 48} = 4.$$

Следовательно, $CD = AC_1 = 4$.

Ответ: б) 4.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> .	2
ИЛИ	
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> .	1
ИЛИ	
При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	
ИЛИ	
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаютсяложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 200 млн рублей, а за четыре года станут больше 270 млн рублей.

Решение.

Пусть S млн — первоначальные инвестиции. К началу 2-го года получится $1,1S + 20$ млн, а к началу 3-го года — $1,1(1,1S + 20) + 20 = 1,21S + 42$. По условию $1,21S + 42 > 200$, откуда $S > \frac{158}{1,21} > 130,5$.

К началу 4-го года имеем $1,1(1,21S + 42) + 10$, а в конце проекта

$$1,1(1,1(1,21S + 42) + 10) + 10 = 1,4641S + 50,82 + 21 = 1,4641S + 71,82.$$

По условию $1,4641S + 71,82 > 270$, откуда $S > \frac{198,18}{1,4641} > 135,3$. А значит,

минимальное возможное целое $S = 136$.

Ответ: 136 млн руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
ИЛИ	
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

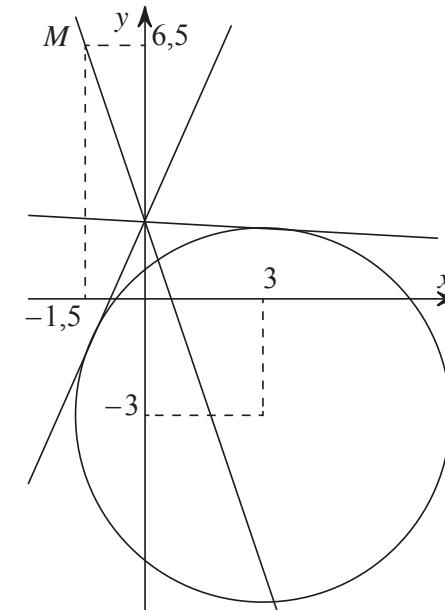
Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-3)^2 + (y+3)^2 - 32)((2x+3)^2 + (2y-13)^2) \leq 0, \\ ax + y = 2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Неравенство задаёт объединение круга $(x-3)^2 + (y+3)^2 \leq 32$ и точки $M(-1,5; 6,5)$. Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая $y = 2 - ax$ не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M .



Составим систему:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+3)^2 = 32, \\ y = 2 - ax; \\ (x-3)^2 + (5-ax)^2 = 32; \\ (1+a^2)x^2 - (6+10a)x + 2 = 0. \end{cases}$$

Чтобы найти a , при которых прямая не имеет общих точек с кругом, рассмотрим следующее ограничение на дискриминант:

$$\frac{D}{4} = (3+5a)^2 - 2(1+a^2) < 0;$$

$$23a^2 + 30a + 7 < 0,$$

$$\text{откуда } -1 < a < -\frac{7}{23}.$$

Через точку M прямая $y = 2 - ax$ проходит, только если $6,5 = 2 + 1,5a$, то есть $a = 3$. Следовательно, значения $-1 < a < -\frac{7}{23}$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $-1 < a < -\frac{7}{23}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ при всех натуральных $n \geq 2$.

- Существует ли такая прогрессия, для которой $S_8 = 50S_1$?
- Существует ли такая прогрессия, для которой $S_8 = 30S_2$?
- Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_4^2}{S_1 S_8}$?

Решение.

а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 2 и разностью 3. Имеем $S_8 = 2 + 5 + \dots + 23 = \frac{2+23}{2} \cdot 8 = 100 = 50S_1$.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тогда $S_2 = 2a_1 + d$ и $S_8 = 8a_1 + 28d$. Если $S_8 = 30S_2$, то $8a_1 + 28d = 60a_1 + 30d$ и $-2d = 52a_1$. Поскольку число a_1 натуральное, отсюда получаем, что число d отрицательное. Это противоречит условию задачи, так как убывающая бесконечная арифметическая прогрессия не может состоять только из натуральных чисел. Значит, такой арифметической прогрессии, состоящей из различных натуральных чисел, для которой $S_8 = 30S_2$, не существует.

в) Пусть $k = \frac{S_4^2}{S_1 S_8}$, d — разность арифметической прогрессии. Из условия следует, что $d > 0$. Найдём наименьшее возможное значение k .

Имеем

$$\begin{aligned} S_4^2 &= (4a_1 + 6d)^2 = 16a_1^2 + 48a_1d + 36d^2 = kS_1 S_8 = \\ &= ka_1(8a_1 + 28d) = 8ka_1^2 + 28ka_1d. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 16a_1^2 + 48a_1d + 36d^2 &= 8ka_1^2 + 28ka_1d, \\ \text{или, что равносильно,} \quad (4-2k)a_1^2 + (12-7k)a_1d + 9d^2 &= 0. \end{aligned}$$

Поделим обе части последнего равенства на d^2 и положим $x = \frac{a_1}{d}$.

Получаем равенство $(4-2k)x^2 + (12-7k)x + 9 = 0$.

Уравнение $(4-2k)x^2 + (12-7k)x + 9 = 0$ должно иметь хотя бы один корень и при $k \neq 2$ должно иметь дискриминант $D \geq 0$.

Имеем $D = (12-7k)^2 - 36(4-2k) = 49k^2 - 96k \geq 0$. Поскольку число k положительно, отсюда следует, что $k \geq \frac{96}{49}$.

Рассмотрим прогрессию с первым членом 21 и разностью 2. Тогда

$$S_1 = 21, S_4 = 4 \cdot 21 + 6 \cdot 2 = 96, S_8 = 8 \cdot 21 + 28 \cdot 2 = 224 \text{ и } \frac{S_4^2}{S_1 S_8} = \frac{96^2}{21 \cdot 224} = \frac{96}{49}.$$

Этот пример показывает, что наименьшее возможное значение дроби $\frac{S_4^2}{S_1 S_8}$ равно $\frac{96}{49}$.

Ответ: а) Да, например, прогрессия 2, 5, 8, ..., 23, ...; б) нет; в) $\frac{96}{49}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а, — обоснованное решение в п. б, — искомая оценка в п. в, — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4