

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

24 сентября 2015 года

Вариант МА10101

(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1

Найдите значение выражения $\frac{9}{5} + 1\frac{1}{8} \cdot 0,8$.

Ответ: _____.

2

Найдите значение выражения $\frac{2^7 \cdot 5^6}{10^5}$.

Ответ: _____.

3

Площадь земель фермерского хозяйства, отведённых под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 36 га и распределена между зерновыми и овощными культурами в отношении 2:7 соответственно. Сколько гектаров занимают зерновые культуры?

Ответ: _____.

4

Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = I^2 R t$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах), t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в джоулях), если $t = 5$ с, $I = 2$ А и $R = 13$ Ом.

Ответ: _____.

5

Найдите значение выражения $(\sqrt{63} - \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7}$.

Ответ: _____.

6

Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 7 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 5 г. Какое наименьшее число пакетиков нужно купить хозяйке для приготовления 7 литров маринада?

Ответ: _____.

- 7** Решите уравнение $x^2 = -x + 20$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Ответ: _____.

- 8** Квартира состоит из комнаты, кухни, коридора и санузла (см. чертёж). Комната имеет размеры $4\text{ м} \times 4\text{ м}$, санузел — $1,5\text{ м} \times 2\text{ м}$, длина коридора $5,5\text{ м}$.

Найдите площадь кухни (в квадратных метрах).

Ответ: _____.



- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) рост жирафа
Б) толщина лезвия бритвы
В) радиус Земли
Г) ширина футбольного поля

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 6400 км
2) 500 см
3) $0,08\text{ мм}$
4) 68 м

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

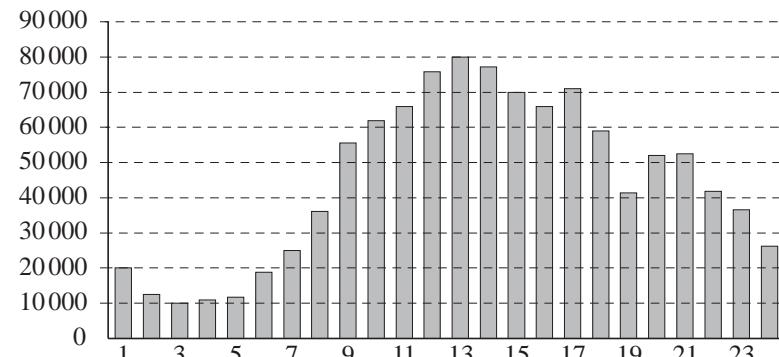
A	B	V	G

Ответ: _____.

- 10** В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

Ответ: _____.

- 11** На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА «Новости» в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается час, по вертикали — количество посетителей сайта на протяжении этого часа. Определите по диаграмме, в течение какого часа на сайте РИА «Новости» побывало минимальное количество посетителей.



Ответ: _____.

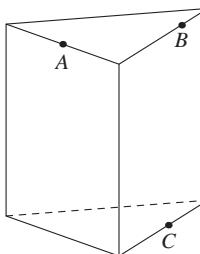
- 12** Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
план «0»	нет	1,5 руб. за 1 Мбайт
план «300»	300 руб. за 300 Мбайт трафика в месяц	2 руб. за 1 Мбайт сверх 300 Мбайт
план «1000»	900 руб. за 1000 Мбайт трафика в месяц	2,5 руб. за 1 Мбайт сверх 1000 Мбайт

Пользователь предполагает, что его трафик составит 650 Мбайт в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 650 Мбайт?

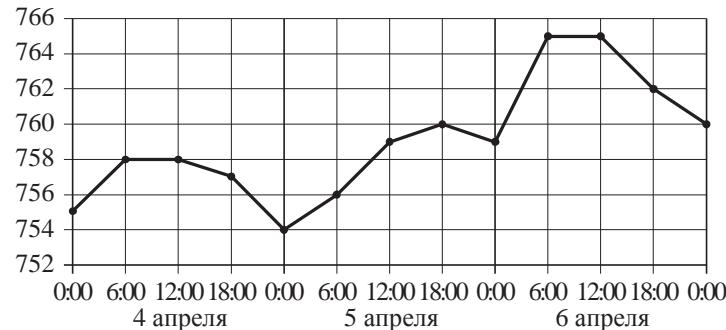
Ответ: _____.

- 13** Плоскость, проходящая через три точки A , B и C , разбивает правильную треугольную призму на два многогранника (см. рисунок). Сколько вершин у многогранника, у которого меньше граней?



Ответ: _____.

- 14** На рисунке точками изображено атмосферное давление в городе N на протяжении трёх суток с 4 по 6 апреля 2013 года. В течение суток давление измеряется 4 раза: ночью (00:00), утром (06:00), днем (12:00) и вечером (18:00). По горизонтали указываются время суток и дата, по вертикали — давление в миллиметрах ртутного столба. Для наглядности точки соединены линиями.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику давления в городе N в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

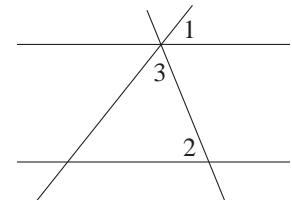
- А) утро 4 апреля
(с 6 до 12 часов)
- Б) утро 5 апреля
(с 6 до 12 часов)
- В) утро 6 апреля
(с 6 до 12 часов)
- Г) день 6 апреля
(с 12 до 18 часов)

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

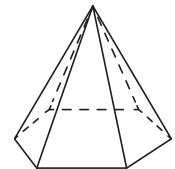
	А	Б	В	Г
Ответ:				

- 15** Прямые m и n параллельны. Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 77^\circ$, $\angle 2 = 88^\circ$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

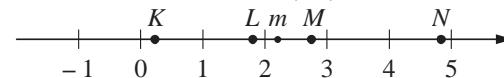


- 16** Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 24, боковые рёбра равны 20. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Ответ: _____.

- 17** На прямой отмечены число m и точки K , L , M и N .



Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца, которые им соответствуют.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
А) K	1) $4 - m$
Б) L	2) m^2
В) M	3) $m - 2$
Г) N	4) $\frac{6}{m}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

	А	Б	В	Г
Ответ:				

18

Когда учитель математики Иван Петрович ведёт урок, он обязательно отключает свой телефон. Выберите утверждения, которые верны при приведённом условии.

- 1) Если телефон Ивана Петровича включён, то, он не ведёт урок.
- 2) Если телефон Ивана Петровича включён, то, он ведёт урок.
- 3) Если Иван Петрович проводит контрольную работу по математике, то, его телефон выключен.
- 4) Если Иван Петрович ведёт урок математики, то, его телефон включён.

Ответ: _____.

19

Найдите семизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делится на 72. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20

В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- за 3 золотые монеты получить 4 серебряные и одну медную;
- за 6 серебряных монет получить 4 золотые и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 35 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

24 сентября 2015 года

Вариант МА10102

(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1

Найдите значение выражения $\frac{2}{1 + \frac{1}{9}}$.

Ответ: _____.

2

Найдите значение выражения $\frac{4^7}{2^7} : 2^3$.

Ответ: _____.

3

Поступивший в продажу в апреле мобильный телефон стоил 2800 рублей. В мае он стал стоить 1820 рублей. На сколько процентов снизилась цена мобильного телефона в период с апреля по май?

Ответ: _____.

4

Среднее гармоническое трёх чисел a , b и c вычисляется по формуле

$$h = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \right)^{-1}. \text{ Найдите среднее гармоническое чисел } \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ и } \frac{1}{10}.$$

Ответ: _____.

5

Найдите значение выражения $(\sqrt{17} - \sqrt{6})(\sqrt{17} + \sqrt{6})$.

Ответ: _____.

6

Летом килограмм клубники стоит 80 рублей. Маша купила 2 кг 500 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна была получить с 1000 рублей?

Ответ: _____.

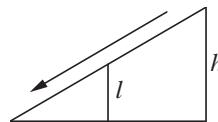
7

Найдите корень уравнения $8 - 5x = 5x - 4$.

Ответ: _____.

8

Стол подпирает детскую горку посередине. Найдите высоту l этого столба, если высота h горки равна 2,2 м. Ответ дайте в метрах.



Ответ: _____.

9

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) площадь балкона в жилом доме
Б) площадь тарелки
В) площадь Ладожского озера
Г) площадь одной стороны монеты

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 300 кв. мм
2) 3 кв. м
3) 17,6 тыс. кв. км
4) 600 кв. см

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	Б	В	Г

Ответ:

10

Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 14 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Ответ: _____.

11

На рисунке изображён график значений атмосферного давления в некотором городе за три дня. По горизонтали указаны дни недели и время, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба. Определите по рисунку значение атмосферного давления во вторник в 18 часов. Ответ дайте в мм рт. ст.



Ответ: _____.

12

Для транспортировки 42 тонн груза на 1200 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей каждого перевозчика указаны в таблице.

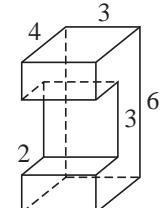
Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность одного автомобиля (тонны)
А	3100	4
Б	4000	5,5
В	7600	10

Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Ответ: _____.

13

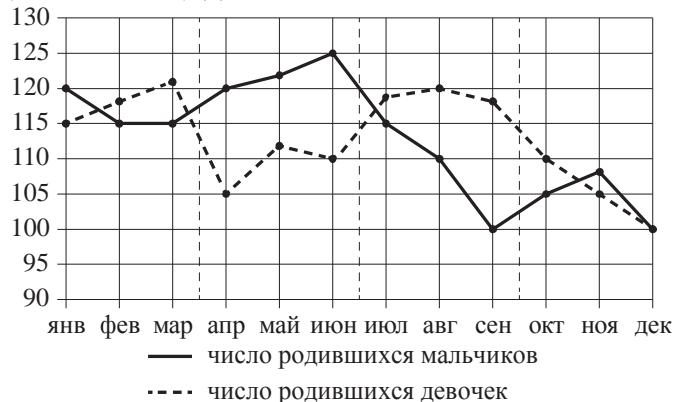
Деталь имеет форму изображённого на рисунке многоугольника (все двугранные углы прямые). Цифры на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

14

На рисунке точками изображено число мальчиков и девочек, родившихся за каждый календарный месяц 2013 года в городском роддоме. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество родившихся мальчиков и девочек (по отдельности). Для наглядности точки соединены линиями.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику рождаемости в этот период.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

- А) январь–март
Б) апрель–июнь
В) июль–сентябрь
Г) октябрь–декабрь

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- 1) Рождаемость мальчиков в течение 2-го и 3-го месяцев периода была одинаковой.
- 2) Рождаемость девочек снижалась.
- 3) В каждом месяце девочек рождалось больше, чем мальчиков.
- 4) В каждом месяце мальчиков рождалось больше, чем девочек.

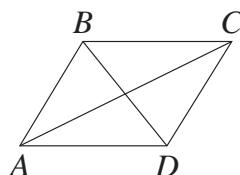
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	Б	В	Г
Ответ:			

15

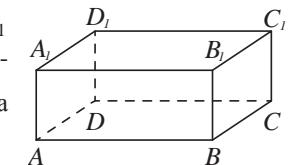
В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в 2 раза больше стороны AB и $\angle ACD = 74^\circ$. Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.



16

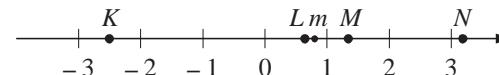
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB , AD и диагональ AB_1 равны соответственно 4, 7 и $\sqrt{41}$. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Ответ: _____.

17

На прямой отмечено число m и точки K , L , M и N .



Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца, которые им соответствуют.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
А) K	1) $4 - m$
Б) L	2) m^2
В) M	3) $\sqrt{m+1}$
Г) N	4) $-\frac{2}{m}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	Б	В	Г
Ответ:			

18

В фирме N работает 50 сотрудников, из них 40 человек знают английский язык, а 20 — немецкий. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) В фирме N хотя бы три сотрудника знают и английский, и немецкий языки.
- 2) В этой фирме нет ни одного сотрудника, знающего и английский, и немецкий языки.
- 3) Если сотрудник этой фирмы знает английский язык, то он знает и немецкий.
- 4) Не более 20 сотрудников этой фирмы знают и английский, и немецкий языки.

Ответ: _____.

19

Найдите четырёхзначное число, которое в 4 раза меньше четвёртой степени некоторого натурального числа. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20

Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, и на всех этажах одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 455 квартир?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

24 сентября 2015 года

Вариант МА10103

(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1

Найдите значение выражения $\left(2\frac{3}{5} - 3,5\right) \cdot 2\frac{2}{9}$.

Ответ: _____.

2

Найдите значение выражения $3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3$.

Ответ: _____.

3

Цена на электрический чайник была提高на на 20% и составила 2400 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Ответ: _____.

4

Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}bc \sin a$, где b и c — две стороны треугольника, а a — угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S , если $b = 16$, $c = 9$ и $\sin a = \frac{1}{3}$.

Ответ: _____.

5

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{648}}{\sqrt{8}}$.

Ответ: _____.

6

На счёте Машиного мобильного телефона было 82 рубля, а после разговора с Леной осталось 40 рублей. Известно, что разговор длился целое число минут, а одна минута разговора стоит 3 рубля 50 копеек. Сколько минут длился разговор с Леной?

Ответ: _____.

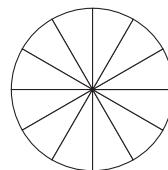
7

Решите уравнение $x^2 + 3x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Ответ: _____.

- 8** Колесо имеет 12 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

Ответ: _____.



- 9** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) масса двухлитрового пакета сока
Б) масса взрослого кита
В) масса косточки персика
Г) масса таблетки лекарства

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 130 т
2) 2 кг
3) 400 мг
4) 8 г

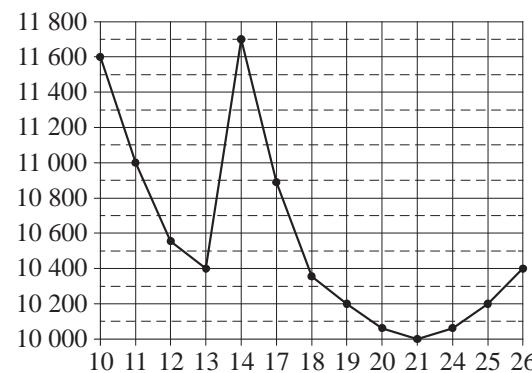
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

	A	Б	В	Г
Ответ:				

- 10** В чемпионате по гимнастике участвуют 75 спортсменок: 15 из Чехии, 30 из Словакии, остальные — из Австрии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Австрии.

Ответ: _____.

- 11** На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена никеля в долларах США за тонну. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену никеля на момент закрытия торгов за данный период. Ответ дайте в долларах США за тонну.



Ответ: _____.

- 12** Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

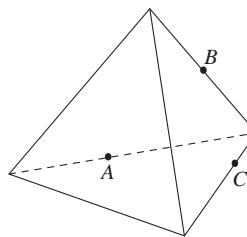
Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за 1 минуту разговора
«Повременный»	нет	2 руб.
«Комбинированный»	290 руб. за 350 мин	1,5 руб. (сверх 350 мин в месяц)
«Безлимитный»	1150 руб.	нет

Абонент предполагает, что общая длительность разговоров составит 600 минут в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц, если общая длительность разговоров действительно будет равна 600 минутам?

Ответ: _____.

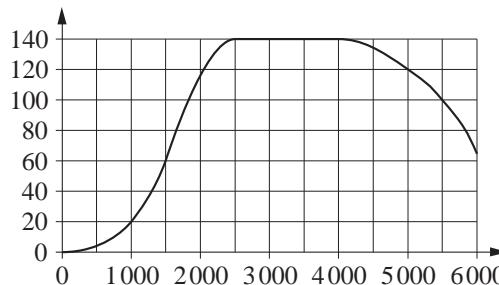
13

- Плоскость, проходящая через три точки A , B и C , рассекает тетраэдр на два многогранника (см. рисунок). Сколько вершин у того многогранника, у которого больше граней?



Ответ: _____.

- 14 На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в $\text{Н}\cdot\text{м}$.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику крутящего момента.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

- А) 0–1000 об./мин
Б) 1500–2000 об./мин
В) 3000–4000 об./мин
Г) 4000–6000 об./мин

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- 1) Крутящий момент рос быстрее всего.
2) Крутящий момент падал.
3) Крутящий момент не менялся.
4) Крутящий момент не превышал 20 $\text{Н}\cdot\text{м}$ на всём интервале.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

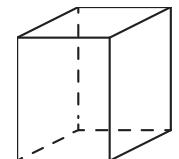
	А	Б	В	Г
Ответ:				

- 15 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 12$, $\cos A = 0,25$. Найдите высоту CH .

Ответ: _____.

16

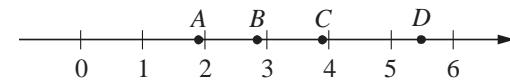
- Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 8 и 5, а объём параллелепипеда равен 280. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.



Ответ: _____.

17

- На координатной прямой отмечены точки A , B , C и D .



Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

- А) A
Б) B
В) C
Г) D

ЧИСЛА

- 1) $\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$
2) $\sqrt{7} : \sqrt{2}$
3) $2\sqrt{7} - \sqrt{2}$
4) $(\sqrt{2})^3$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

	А	Б	В	Г
Ответ:				

18

- При взвешивании животных в зоопарке выяснилось, что жираф тяжелее верблюда, верблюд тяжелее тигра, а леопард легче верблюда. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) леопард тяжелее верблюда
2) жираф тяжелее леопарда
3) жираф легче тигра
4) жираф самый тяжёлый из всех этих животных

Ответ: _____.

19

Найдите трёхзначное натуральное число, большее 400, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: _____.

20

На палке отмечены поперечные линии красного, жёлтого и зелёного цвета. Если распилить палку по красным линиям, получится 15 кусков, если по жёлтым — 5 кусков, а если по зелёным — 7 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

24 сентября 2015 года

Вариант МА10104

(базовый уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Найдите значение выражения $(3,1 + 3,4) \cdot 3,8$.

Ответ: _____.

- 2** Найдите значение выражения $3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^3$.

Ответ: _____.

- 3** Налог на доходы составляет 13 % от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 9000 рублей. Какую сумму он получит после уплаты налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

- 4** Закон Гука можно записать в виде $F = kx$, где F — сила (в ньютонах), с которой сжимают пружину, x — абсолютное удлинение (сжатие) пружины (в метрах), а k — коэффициент упругости. Пользуясь этой формулой, найдите x (в метрах), если $F = 38$ Н и $k = 2$ Н/м.

Ответ: _____.

- 5** Найдите значение выражения $\sqrt{10} \cdot \sqrt{1,6}$.

Ответ: _____.

- 6** Для ремонта требуется 66 рулонов обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно купить для такого ремонта, если 1 пачка клея рассчитана на 7 рулонов?

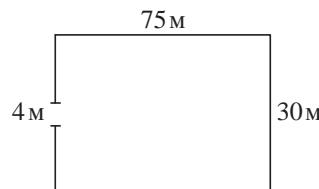
Ответ: _____.

- 7** Решите уравнение $x^2 + 11x = -28$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: _____.

8

- Участок земли имеет прямоугольную форму. Стороны прямоугольника равны 30 м и 75 м. Найдите длину забора (в метрах), которым нужно огородить участок, если в заборе предусмотрен проезд шириной 4 м.



Ответ: _____.

9

- Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) объём комнаты
Б) объём воды в Каспийском море
В) объём ящика для овощей
Г) объём банки сметаны

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) $78\ 200\ \text{км}^3$
2) $75\ \text{м}^3$
3) 50 л
4) 0,5 л

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:	A	Б	В	Г

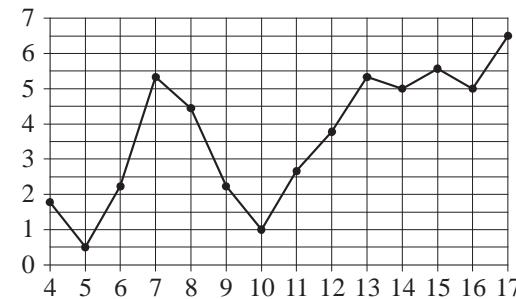
10

- В соревнованиях по толканию ядра участвуют 6 спортсменов из Великобритании, 3 спортсмена из Франции, 6 спортсменов из Германии и 10 — из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Франции.

Ответ: _____.

11

- На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Риге за каждый день с 4 по 17 апреля 1980 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какого числа среднесуточная температура была наименьшей за данный период.



Ответ: _____.

12

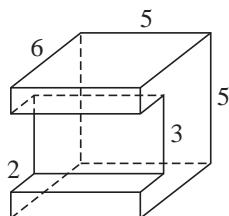
- Для группы иностранных гостей требуется купить 13 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Цена путеводителя и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Интернет-магазин	Цена путеводителя (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	290	200	нет
Б	260	400	доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 3800 руб.
В	300	200	доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 3400 руб.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

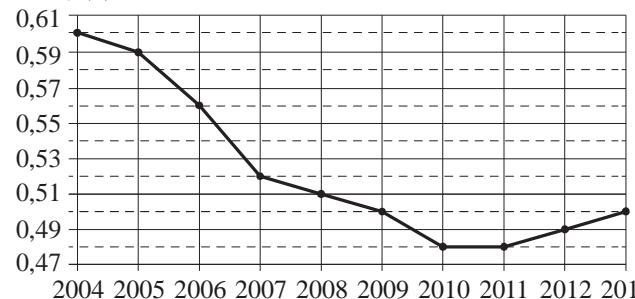
Ответ: _____.

- 13** Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Цифры на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

- 14** На рисунке точками изображён прирост населения Китая в период с 2004 по 2013 годы. По горизонтали указывается год, по вертикали — прирост населения в процентах (увеличение численности населения относительно прошлого года). Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику прироста населения Китая.

- ИНТЕРВАЛЫ**
- А) 2005–2007 гг.
Б) 2007–2009 гг.
В) 2009–2011 гг.
Г) 2011–2013 гг.

ХАРАКТЕРИСТИКИ

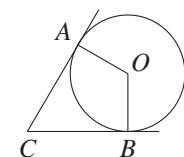
- 1) Падение прироста остановилось.
- 2) Наибольшее падение прироста населения.
- 3) Прирост населения находился в пределах от 0,5 % до 0,52 %.
- 4) Прирост населения увеличивался.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

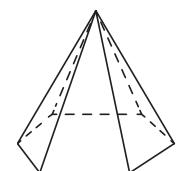
A	Б	В	Г

- 15** В угол C , равный 68° , вписана окружность с центром O , которая касается сторон угла в точках A и B . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



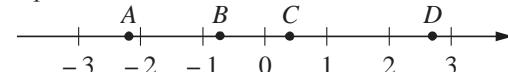
Ответ: _____.

- 16** Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Ответ: _____.

- 17** На координатной прямой отмечены точки A , B , C и D . Про число m известно, что оно равно $\sqrt{2}$.



Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца, которые им соответствуют.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
А) А	1) $2m - 5$
Б) В	2) m^3
В) С	3) $m - 1$
Г) D	4) $-\frac{1}{m}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18

Среди дачников в посёлке есть те, кто выращивает виноград, и есть те, кто выращивает груши. А также есть те, кто не выращивает ни виноград, ни груши. Некоторые дачники в этом посёлке, выращивающие виноград, также выращивают и груши. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Если дачник из этого посёлка не выращивает виноград, то он выращивает груши.
- 2) Среди тех, кто выращивает виноград, есть дачники из этого посёлка.
- 3) Есть хотя бы один дачник в этом посёлке, который выращивает и груши, и виноград.
- 4) Если дачник в этом посёлке выращивает виноград, то он не выращивает груши.

Ответ: _____.

19

Цифры четырёхзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырёхзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 4536. Приведите ровно один пример такого числа.

Ответ: _____.

20

Кузнечик прыгает вдоль координатной прямой в любом направлении на единичный отрезок за один прыжок. Кузнечик начинает прыгать из начала координат. Сколько существует различных точек на координатной прямой, в которых кузнечик может оказаться, сделав ровно 11 прыжков?

Ответ: _____.

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

24 сентября 2015 года

Вариант MA10105

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Ответом к заданиям 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

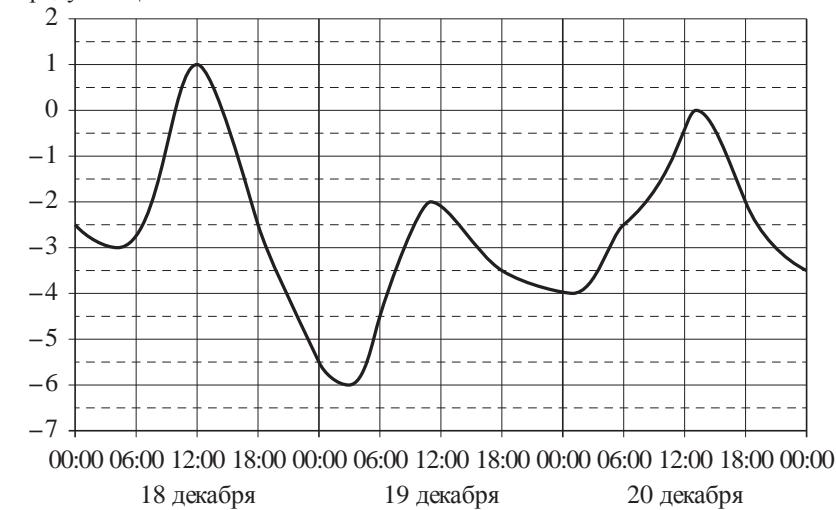
Часть 1**1**

Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее количество таких тетрадей можно будет купить на 250 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ: _____.

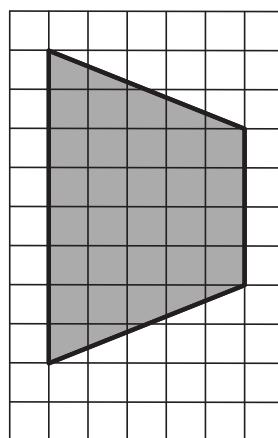
2

На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха 20 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см}\times 1\text{см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

- 4 За круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик.

Ответ: _____.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 9$.

Ответ: _____.

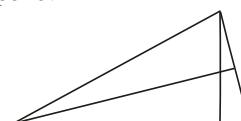
5.2

Найдите корень уравнения $\sqrt{5x-6} = 7$.

Ответ: _____.

6

- В треугольнике со сторонами 6 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

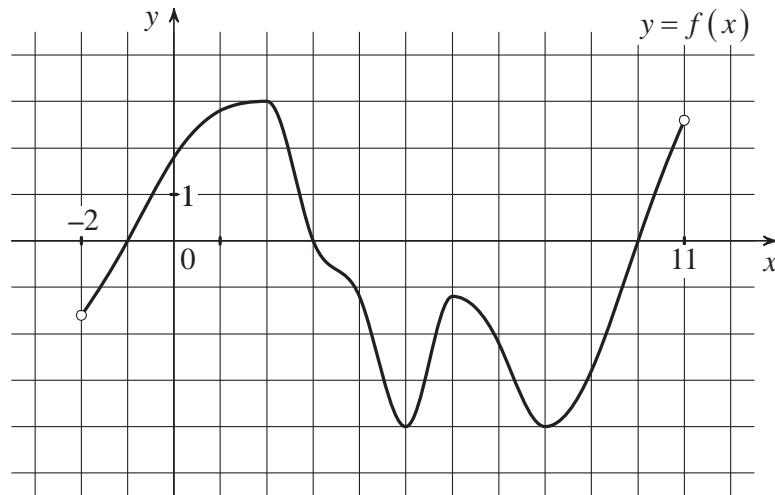


Ответ: _____.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 7.1 или 7.2.

7.1

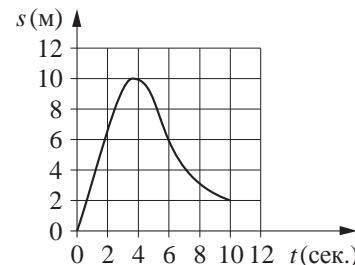
- На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ: _____.

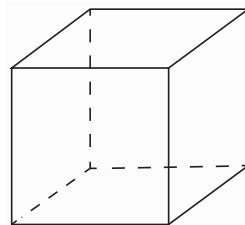
7.2

- Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ: _____.

- 8** Диагональ куба равна 1. Найдите площадь его поверхности.



Ответ: _____.

Часть 2

- 9** Найдите значение выражения $\frac{37 \sin 171^\circ}{\sin 189^\circ}$.

Ответ: _____.

- 10** Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 700$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 500\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 300 000 руб.

Ответ: _____.

- 11** Моторная лодка прошла против течения реки 91 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 10 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 12.1 или 12.2.

- 12.1** Найдите точку минимума функции $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 3x + 49$.

Ответ: _____.

- 12.2** Найдите наименьшее значение функции $y = 7^{x^2+4x+5}$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $(\tan^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

- 14** На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$.
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 .

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 15.1 или 15.2.

- 15.1** Решите неравенство $0,5 \log_{x-2}(x^2 - 10x + 25) + \log_{5-x}(-x^2 + 7x - 10) \geq 3$.

- 15.2** Решите неравенство $\frac{x}{x^2 + 3} \leq (1:4)x^{-1}$.

- 16** Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .
а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

17

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

18

Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 4, \\ x^2 - |a+1|x - 2a^2 = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19

Известно, что a , b , c , и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 8d$?

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

24 сентября 2015 года

Вариант MA10106

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Ответом к заданиям 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

Часть 1

1

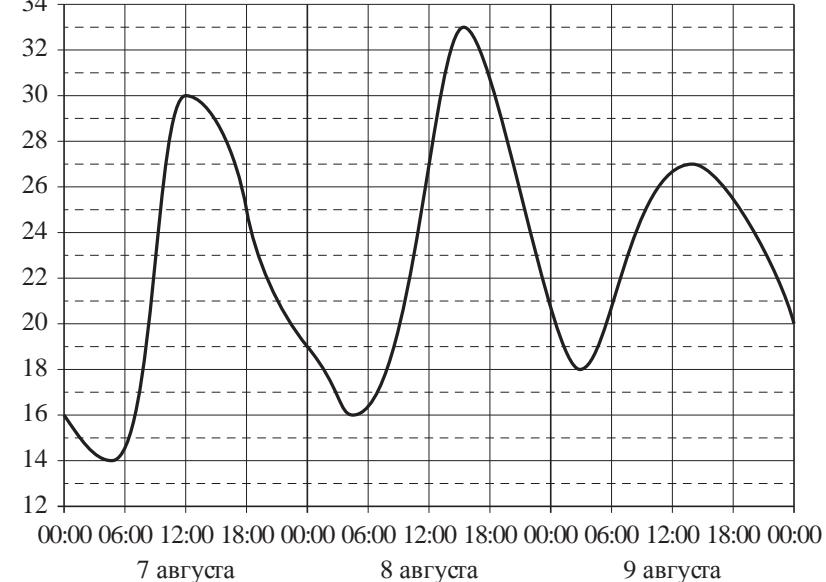
Тетрадь стоит 10 рублей. Какое наибольшее количество таких тетрадей можно будет купить на 650 рублей после понижения цены на 20 %?

Ответ: _____.

2

На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха 7 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.

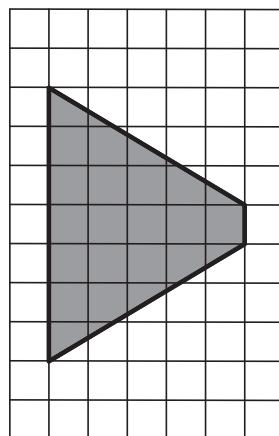
34



Ответ: _____.

- 3** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: _____.



- 4** За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки не будут сидеть рядом.

Ответ: _____.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{14-4x} = 4$.

Ответ: _____.

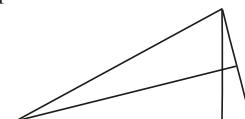
5.2

Найдите корень уравнения $\sqrt{3x-5} = 8$.

Ответ: _____.

6

- В треугольнике со сторонами 10 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

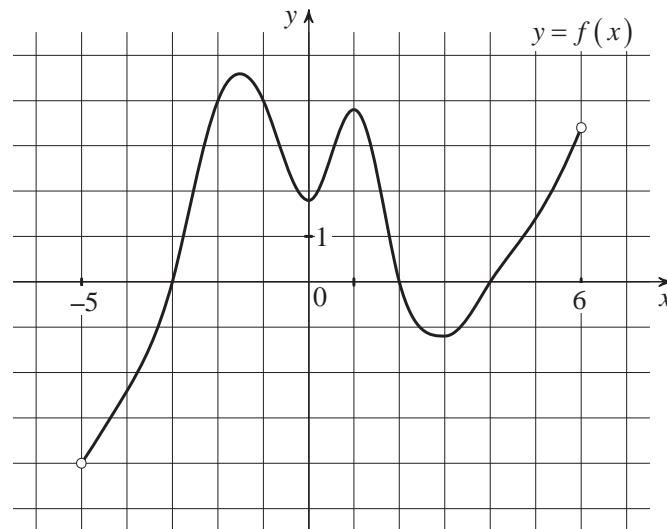


Ответ: _____.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 7.1 или 7.2.

7.1

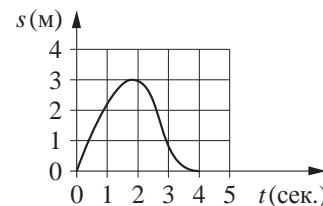
- На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ: _____.

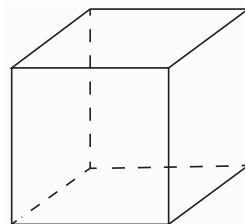
7.2

- Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ: _____.

- 8** Диагональ куба равна 3. Найдите площадь его поверхности.



Ответ: _____.

Часть 2

- 9** Найдите значение выражения $\frac{-51\sin 79^\circ}{\sin 281^\circ}$.

Ответ: _____.

- 10** Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 600$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 200 000 руб.

Ответ: _____.

- 11** Моторная лодка прошла против течения реки 84 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 8 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 10 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 12.1 или 12.2.

- 12.1** Найдите точку минимума функции $y = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 2x + 16$.

Ответ: _____.

- 12.2** Найдите наименьшее значение функции $y = 8^{x^2+6x+10}$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $(\tg^2 x - 3)\sqrt{11\cos x} = 0$.

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

- 14** На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 2 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 4$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$.
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 .

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 15.1 или 15.2.

- 15.1** Решите неравенство $0,5\log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) \geq 3$.

- 15.2** Решите неравенство $\frac{x}{2x^2 + 12} \leq (1:5)x^{-1}$.

- 16** Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

- а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 2$.

- 17** Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 2x + 5$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

18

Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 3, \\ x^2 - |a+2|x - 3a^2 = 5 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19

Известно, что a , b , c , и d — попарно различные положительные двузначные числа.

- а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{6}{23}$?
- б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 4b$ и $c > 7d$?

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

24 сентября 2015 года

Вариант MA10107

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желааем успеха!

Ответом к заданиям 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

Часть 1

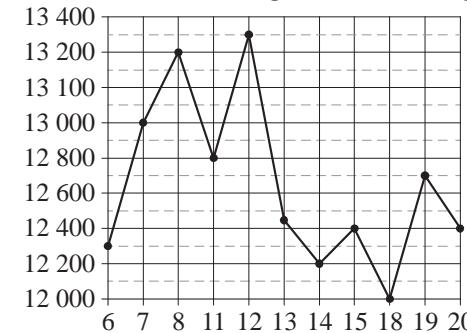
1

В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 февраля составляли 142 куб. м воды, а 1 марта — 156 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за февраль, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 22 руб. 50 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

2

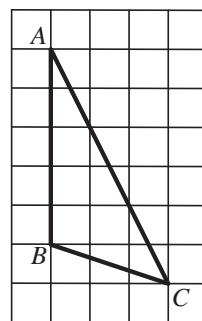
На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период. Ответ дайте в долларах США за тонну.



Ответ: _____.

- 3** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB .

Ответ: _____.



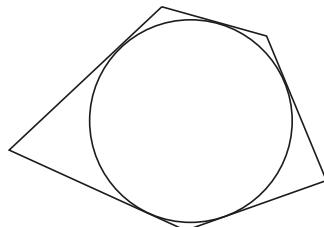
- 4** В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 980 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе.

Ответ: _____.

- 5** Найдите корень уравнения $\sqrt{51 - 5x} = 6$.

Ответ: _____.

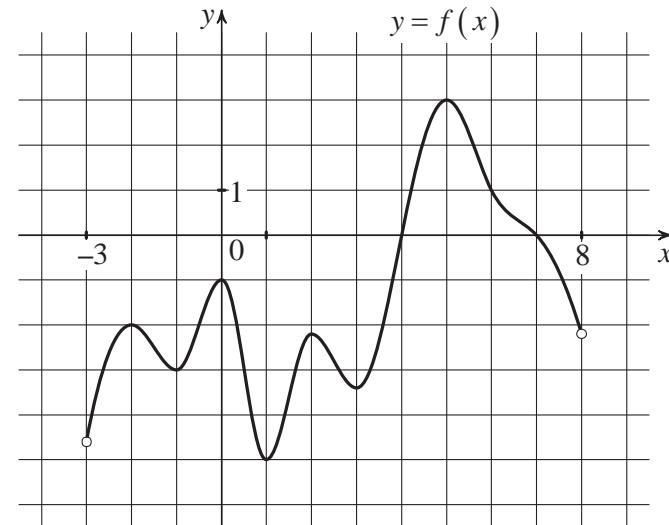
- 6** Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 50. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

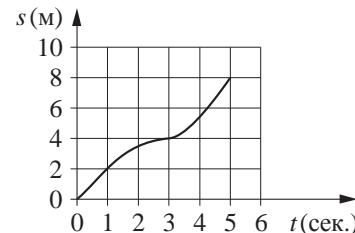
Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 7.1 или 7.2.

- 7.1** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 1$.



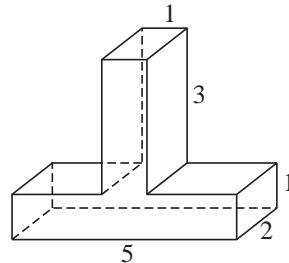
Ответ: _____.

- 7.2** Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ: _____.

- 8** Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

- 9** Найдите значение выражения $\frac{(25b)^{1.5} \cdot b^{0.7}}{b^{2.2}}$ при $b = 5$.

Ответ: _____.

- 10** Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 44,1 см? Ответ выразите в м/с.

Ответ: _____.

- 11** Имеются два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 12% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 12.1 или 12.2.

- 12.1** Найдите наибольшее значение функции $y = 61x - 61 \operatorname{tg} x + 35$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: _____.

- 12.2** Найдите наименьшее значение функции $y = \log_4(x^2 + 6x + 25) - 5$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0$.

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

- 14** На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 .

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 15.1 или 15.2.

- 15.1** Решите неравенство $0,5 \log_{x-2}(x^2 - 10x + 25) + \log_{5-x}(-x^2 + 7x - 10) \geq 3$.

- 15.2** Решите неравенство $\frac{x}{x^2 + 3} \leq (1:4)x^{-1}$.

16

Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

- Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
- Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

17

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

18

Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 4, \\ x^2 - |a+1|x - 2a^2 = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19

Известно, что a , b , c , и d — попарно различные положительные двузначные числа.

- Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{23}$?
- Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?
- Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 8d$?

Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

24 сентября 2015 года

Вариант MA10108

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к заданиям 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

Часть 1

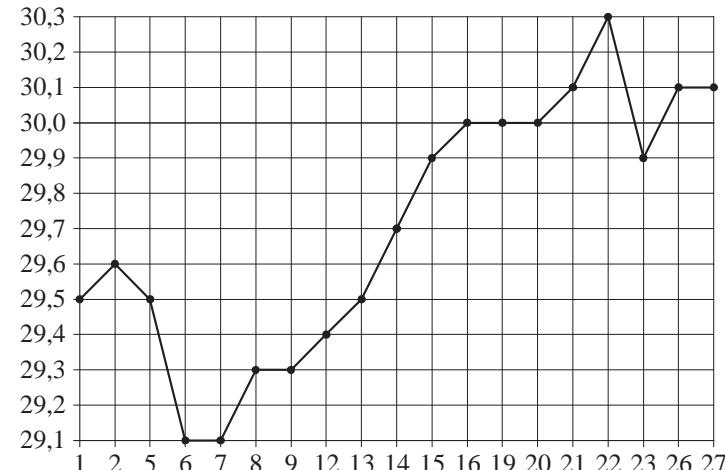
1

В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 марта составляли 128 куб. м воды, а 1 апреля — 136 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за март, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 21 руб. 50 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

2

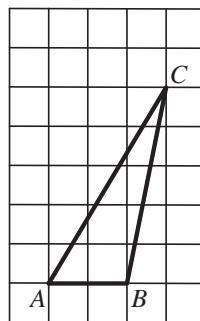
На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни в октябре 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольший курс доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.



Ответ: _____.

- 3** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB .

Ответ: _____.



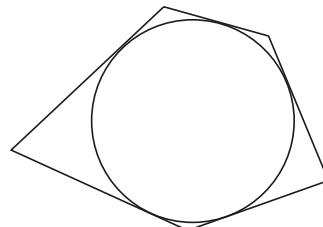
- 4** В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 1080 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе.

Ответ: _____.

- 5** Найдите корень уравнения $\sqrt{64 - 3x} = 7$.

Ответ: _____.

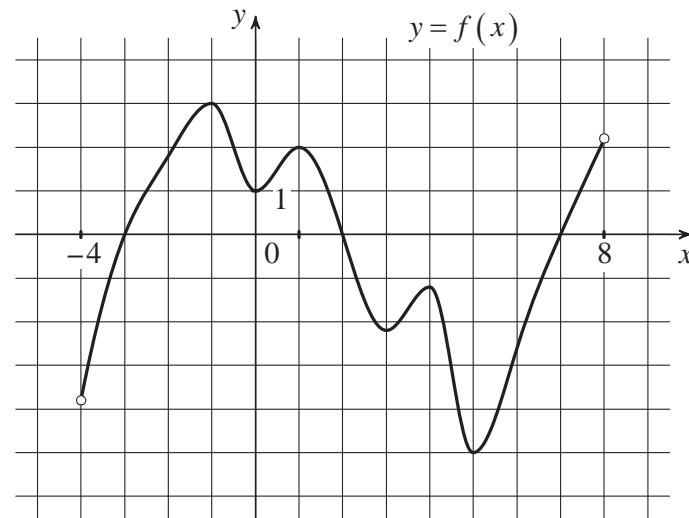
- 6** Около окружности, радиус которой равен 7, описан многоугольник, периметр которого равен 30. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

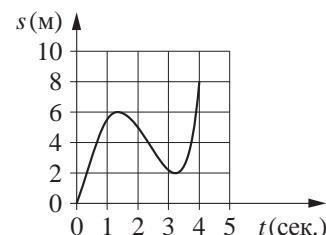
Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 7.1 или 7.2.

- 7.1** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 18$.



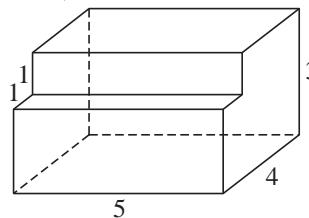
Ответ: _____.

- 7.2** Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ: _____.

- 8** Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

- 9** Найдите значение выражения $\frac{(4b)^{2.5} \cdot b^{0.8}}{b^{3.3}}$ при $b = 7$.

Ответ: _____.

- 10** Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 122,5 см? Ответ выразите в м/с.

Ответ: _____.

- 11** Имеются два сплава. Первый сплав содержит 5 % меди, второй — 14 % меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10 % меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 12.1 или 12.2.

- 12.1** Найдите наибольшее значение функции $y = 7x - 7 \operatorname{tg} x - 4$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4} \right]$.

Ответ: _____.

- 12.2** Найдите наименьшее значение функции $y = \log_5(x^2 + 4x + 29) - 8$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 3)\sqrt{11 \cos x} = 0$.

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$.

- 14** На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 2 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 4$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$.
- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 .

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 15.1 или 15.2.

- 15.1** Решите неравенство $0,5 \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) \geq 3$.

- 15.2** Решите неравенство $\frac{x}{2x^2 + 12} \leq (1:5)x^{-1}$.

16

Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

- Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
- Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 2$.

17

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 2x + 5$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

18

Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 3, \\ x^2 - |a+2|x - 3a^2 = 5 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19

Известно, что a , b , c , и d — попарно различные положительные двузначные числа.

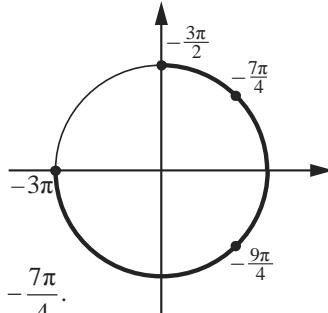
- Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{6}{23}$?
- Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?
- Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 4b$ и $c > 7d$?

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

13

а) Решите уравнение $(\tan^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.**Решение.**

$$\text{а) } (\tan^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0; \quad \begin{cases} \tan^2 x = 1, \\ \cos x > 0, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.б) Корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$, отберём с помощью единичной окружности.Получаем $-\frac{9\pi}{4}$ и $-\frac{7\pi}{4}$.**Ответ:** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б.	1
ИЛИ	
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$.а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 .**Решение.**а) В плоскости AA_1D_1 проведём через точку E прямую, параллельную TF . Пусть она пересекает ребро A_1D_1 или его продолжение в точке G . Плоскость EFT проходит через точку G . Треугольник EGA_1 подобен равнобедренному треугольнику FTB_1 , в котором $FB_1 = B_1T = 1$. Отсюда $EA_1 = A_1G = 2$, значит, точка G совпадает с точкой D_1 .б) В плоскости BB_1C_1 из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1K на отрезок FT . В плоскости EFT из точки K проведём перпендикуляр к FT , который пересекает ED_1 в точке L . Тогда $\angle B_1KL$ — угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 или смежный с ним. Из равнобедренного треугольника FB_1T находим

$$B_1K = \frac{FB_1 \cdot B_1T}{FT} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из равнобедренной трапеции $EFTD_1$ находим

$$KL = \sqrt{TD_1^2 - \left(\frac{ED_1 - FT}{2}\right)^2} = \sqrt{17 - \left(\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{33}{2}}.$$

Точка L — середина отрезка ED_1 , поэтому она удалена от сторон AA_1 и AD_1 параллелепипеда на 1. Значит, B_1L является диагональю параллелепипеда со сторонами 1, 1 и 4. Отсюда $B_1L = \sqrt{18}$. Из теоремы косинусов для треугольника B_1KL находим $\cos \angle B_1KL = \frac{B_1K^2 + KL^2 - B_1L^2}{2 \cdot B_1K \cdot KL} = -\frac{1}{\sqrt{33}}$.**Ответ:** б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{33}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт а.	1
ИЛИ	
Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 15.1 или 15.2.

- 15.1** Решите неравенство $0,5\log_{x-2}(x^2-10x+25) + \log_{5-x}(-x^2+7x-10) \geq 3$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{2}\log_{x-2}(x-5)^2 + \log_{5-x}((5-x)(x-2)) \geq 3.$$

Любое решение неравенства удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ 5-x > 0, \\ x-2 \neq 1, \\ 5-x \neq 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} 2 < x < 5, \\ x \neq 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Для таких x имеем неравенство

$$\log_{x-2}(5-x) + \log_{5-x}(x-2) \geq 2.$$

Замена: $\log_{x-2}(5-x) = z$. Получаем $z + \frac{1}{z} \geq 2$, откуда $z > 0$. Обратная замена:

$$\log_{x-2}(5-x) > 0; \quad \frac{(5-x)-1}{(x-2)-1} > 0; \quad 3 < x < 4.$$

Ответ: $(3; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 15.2** Решите неравенство $\frac{x}{x^2+3} \leq (1:4)x^{-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{x^2+3} \leq \frac{1}{4x}; \quad \frac{4x^2 - x^2 - 3}{(x^2+3)4x} \leq 0; \quad \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+3)x} \leq 0.$$

Учитывая, что при всех значениях x выражение $x^2 + 3$ положительно, получаем

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} \leq 0, \quad \text{откуда } x \leq -1, \quad 0 < x \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup (0; 1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 16**

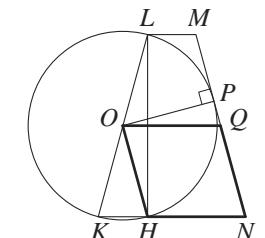
Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

- a) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

Решение.

- a) Треугольник KOH равнобедренный и трапеция $KLMN$ равнобедренная, поэтому
 $\angle KHO = \angle OKH = \angle MNK$.

Значит, прямые OH и MN параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и KN . Противоположные стороны четырёхугольника $NQOH$ попарно параллельны, следовательно, $NQOH$ — параллелограмм.



б) Пусть окружность с центром в точке O радиуса R касается стороны MN в точке P . В прямоугольных треугольниках OPQ и KHL имеем

$$OQ = \frac{OP}{\sin \angle OQP} = \frac{R}{\sin 75^\circ}, \quad KH = KL \cos \angle LKH = 2R \cos 75^\circ.$$

Поэтому

$$\frac{KH}{NH} = \frac{KH}{OQ} = \frac{2R \cos 75^\circ}{\frac{R}{\sin 75^\circ}} = 2 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}.$$

Пусть $KH = x$. Поскольку трапеция $KLMN$ равнобедренная,
 $KN = 2KH + LM; \quad NH = KH + LM = x + 1$.

Тогда

$$\frac{KH}{NH} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 1$. Значит, $KN = 2x + 1 = 3$.

Ответ: б) 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	1
Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается как

$$px - (0,5x^2 + x + 7) = -0,5x^2 + (p-1)x - 7.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x = p-1$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-1)^2}{2} - 7$. Через 3 года прибыль составит не менее 75 млн рублей при

$$\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \geq \frac{75}{3}; \quad (p-1)^2 \geq 64; \quad (p-9)(p+7) \geq 0,$$

то есть при $p \geq 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной.

Таким образом, наименьшее значение $p = 9$.

Ответ: $p = 9$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 4, \\ x^2 - |a+1|x - 2a^2 = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Пусть (x, y) — решение системы. Тогда при любом значении параметра a левая часть первого уравнения системы есть сумма расстояний от точки (x, y) до точек $(1, a)$ и $(5, a)$, лежащих на прямой $y=a$, параллельной оси абсцисс. Но расстояние между точками $(1, a)$ и $(5, a)$ равно 4, и поэтому решение первого уравнения — множество точек (x, y) , причём $1 \leq x \leq 5, y = a$, поскольку иначе

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} > 4.$$

Следовательно, данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда второе уравнение системы имеет единственное решение на отрезке $1 \leq x \leq 5$.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = x^2 - |a+1|x - 2a^2 - 3.$$

Её график — парабола, направленная ветвями вверх. Поскольку свободный член $-2a^2 - 3 < 0$ при любом a , то корни этой функции имеют разные знаки. Известно, что в этом случае единственный положительный корень функции $f(x) = x^2 - |a+1|x - 2a^2 - 3$ лежит на отрезке $1 \leq x \leq 5$ тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 0$ и $f(5) \geq 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} f(1) \leq 0, & \begin{cases} 1 - |a+1| - 2a^2 - 3 \leq 0, \\ 25 - 5|a+1| - 2a^2 - 3 \geq 0; \end{cases} \\ f(5) \geq 0; & \begin{cases} -2a^2 - 2 \leq |a+1|, \\ 22 - 2a^2 \geq 5|a+1|; \end{cases} \end{cases} \quad 5|a+1| \leq 22 - 2a^2.$$

Поскольку любое решение полученного неравенства должно удовлетворять условию $22 - 2a^2 \geq 0$, то есть $a^2 \leq 11$, и по условию a — целое число, то решениями неравенства могут быть только $a \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Из этих условий проверкой получаем все решения: $-2, \pm 1, 0$.

Ответ: $-2, -1, 0, 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены одно или несколько значений a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения корней квадратичной функции (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Известно, что a, b, c , и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 8d$?

Решение.

а) Пусть $a = 20, b = 30, c = 7$ и $d = 39$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{27}{69} = \frac{9}{23}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Тогда

$$11 \cdot (a+c)bd = (b+d)(ad+bc),$$

$$11abd + 11bcd = abd + bcd + ad^2 + b^2c,$$

$$10abd - ad^2 = b^2c - 10bcd$$

$$ad(10b-d) = bc(b-10d).$$

С другой стороны, имеем

$$10b-d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b-10d.$$

Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 \geq a \geq 5b+1$ и $c \geq 8d+1$. Значит, $b \leq \frac{98}{5} < 20$.

Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b \leq 19$.

Используя неравенства

$$a \geq 5b+1, \quad c \geq 8d+1, \quad b \leq 19 \quad \text{и} \quad d \geq 10,$$

получаем

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{5b+8d+2}{b+d} = 5 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 5 + \frac{3d+2}{d+19} = 8 - \frac{55}{d+19} \geq 8 - \frac{55}{29} = \frac{177}{29}.$$

Пусть $a = 96, b = 19, c = 81$ и $d = 10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{177}{29}$. Следовательно,

наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{177}{29}$.

Ответ: а) Да, например, если $a = 20, b = 30, c = 7$ и $d = 39$; б) нет; в) $\frac{177}{29}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. <i>a</i> , – обоснованное решение в п. <i>b</i> , – искомая оценка в п. <i>c</i> , – пример в п. <i>d</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

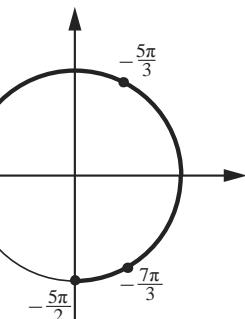
Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

13

а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 3)\sqrt{11 \cos x} = 0$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.**Решение.**

а) $(\operatorname{tg}^2 x - 3)\sqrt{11 \cos x} = 0; \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 3, \\ \cos x > 0, \end{cases}$

откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $-\frac{7\pi}{3}$ и $-\frac{5\pi}{3}$.Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б.	1
ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 2 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 4$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$.

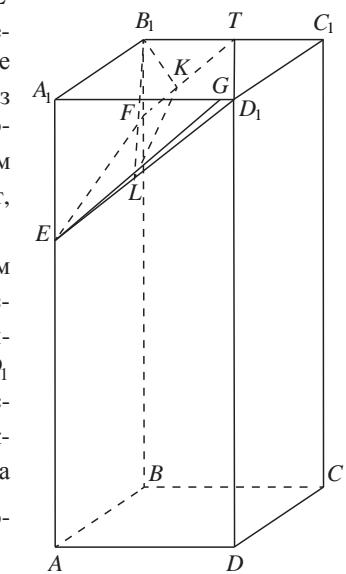
- а) Докажите, что плоскость
- EFT
- проходит через вершину
- D_1
- .
-
- б) Найдите угол между плоскостью
- EFT
- и плоскостью
- BB_1C_1
- .

Решение.а) В плоскости AA_1D_1 проведём через точку E прямую, параллельную TF . Пусть она пересекает ребро A_1D_1 или его продолжение в точке G . Плоскость EFT проходит через точку G . Треугольник EGA_1 подобен равнобедренному треугольнику FTB_1 , в котором $FB_1 = B_1T = 2$. Отсюда $EA_1 = A_1G = 4$, значит, точка G совпадает с точкой D_1 .б) В плоскости BB_1C_1 из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1K на отрезок FT . В плоскости EFT из точки K проведём перпендикуляр к FT , который пересекает ED_1 в точке L . Тогда $\angle B_1KL$ — угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 или смежный с ним. Из равнобедренного треугольника FB_1T находим $B_1K = \frac{FB_1 \cdot B_1T}{FT} = \sqrt{2}$. Из равнобедренной трапеции $EFTD_1$ находим

$$KL = \sqrt{TD_1^2 - \left(\frac{ED_1 - FT}{2}\right)^2} = \sqrt{13 - \left(\frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{11}.$$

Точка L — середина отрезка ED_1 , поэтому она удалена от сторон AA_1 и AD_1 параллелепипеда на 2. Значит, B_1L является диагональю параллелепипеда со сторонами 2, 2 и 3. Отсюда $B_1L = \sqrt{17}$. Из теоремы косинусов для треугольника B_1KL находим

$$\cos \angle B_1KL = \frac{B_1K^2 + KL^2 - B_1L^2}{2 \cdot B_1K \cdot KL} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

Ответ: б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт <i>a</i> .	1
ИЛИ	
Верно решён пункт <i>b</i> при отсутствии обоснований в пункте <i>a</i>	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 15.1 или 15.2.

15.1 Решите неравенство $0,5 \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) \geq 3$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{2} \log_{x-1}(x-4)^2 + \log_{4-x}((4-x)(x-1)) \geq 3.$$

Любое решение неравенства удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ 4-x > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ 4-x \neq 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} 1 < x < 4, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Для таких x имеем неравенство

$$\log_{x-1}(4-x) + \log_{4-x}(x-1) \geq 2.$$

Замена: $\log_{x-1}(4-x) = z$. Получаем $z + \frac{1}{z} \geq 2$, откуда $z > 0$. Обратная замена:

$$\log_{x-1}(4-x) > 0; \quad \frac{(4-x)-1}{(x-1)-1} > 0; \quad 2 < x < 3.$$

Ответ: $(2; 3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15.2 Решите неравенство $\frac{x}{2x^2+12} \leq (1:5)x^{-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{2x^2+12} \leq \frac{1}{5x}; \quad \frac{5x^2 - 2x^2 - 12}{(2x^2+12)5x} \leq 0; \quad \frac{(x-2)(x+2)}{(2x^2+12)x} \leq 0.$$

Учитывая, что при всех значениях x выражение $2x^2+12$ положительно, получаем

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x} \leq 0, \text{ откуда } x \leq -2, \quad 0 < x \leq 2.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (0; 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16 Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

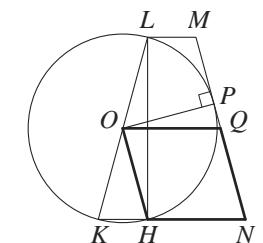
а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 2$.

Решение.

а) Треугольник KOH равнобедренный и трапеция $KLMN$ равнобедренная, поэтому $\angle KHO = \angle OKH = \angle MNK$.

Значит, прямые OH и MN параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и KN . Противоположные стороны четырёхугольника $NQOH$ попарно параллельны, следовательно, $NQOH$ — параллелограмм.



б) Пусть окружность с центром в точке O радиуса R касается стороны MN в точке P . В прямоугольных треугольниках OPQ и KHL имеем

$$OQ = \frac{OP}{\sin \angle OQP} = \frac{R}{\sin 75^\circ}, \quad KH = KL \cos \angle LKH = 2R \cos 75^\circ.$$

Поэтому

$$\frac{KH}{NH} = \frac{KH}{OQ} = \frac{2R \cos 75^\circ}{\frac{R}{\sin 75^\circ}} = 2 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}.$$

Пусть $KH = x$. Поскольку трапеция $KLMN$ равнобедренная,

$$KN = 2KH + LM; \quad NH = KH + LM = x + 2.$$

Тогда

$$\frac{KH}{NH} = \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 2$. Значит, $KN = 2x + 2 = 6$.

Ответ: б) 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	1
Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 2x + 5$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается как

$$px - (0,5x^2 + 2x + 5) = -0,5x^2 + (p-2)x - 5.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x = p - 2$. Наибольшее значение равно

$$\frac{(p-2)^2}{2} - 5. \text{ Через 4 года прибыль составит не менее 52 млн рублей при}$$

$$\frac{(p-2)^2}{2} - 5 \geq \frac{52}{4}; \quad (p-2)^2 \geq 36; \quad (p-8)(p+4) \geq 0,$$

то есть при $p \geq 8$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p = 8$.

Ответ: $p = 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
ИЛИ	
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 3, \\ x^2 - |a+2|x - 3a^2 = 5 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Пусть (x, y) — решение системы. Тогда при любом значении параметра a левая часть первого уравнения системы есть сумма расстояний от точки (x, y) до точек $(2, a)$ и $(5, a)$, лежащих на прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс. Но расстояние между точками $(2, a)$ и $(5, a)$ равно 3, и поэтому решение первого уравнения — множество точек (x, y) , причём $2 \leq x \leq 5$, $y = a$, поскольку иначе

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} > 3.$$

Следовательно, данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда второе уравнение системы имеет единственное решение на отрезке $2 \leq x \leq 5$.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = x^2 - |a+2|x - 3a^2 - 5.$$

Её график — парабола, направленная ветвями вверх. Поскольку свободный член $-3a^2 - 5 < 0$ при любом a , корни этой функции имеют разные знаки. Известно, что в этом случае единственный положительный корень функции $f(x) = x^2 - |a+2|x - 3a^2 - 5$ лежит на отрезке $2 \leq x \leq 5$ тогда и только тогда, когда $f(2) \leq 0$ и $f(5) \geq 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} f(2) \leq 0, \\ f(5) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 - 2|a+2| - 3a^2 - 5 \leq 0, \\ 25 - 5|a+2| - 3a^2 - 5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3a^2 - 1 \leq 2|a+2|, \\ 20 - 3a^2 \geq 5|a+2|; \end{cases} \quad \begin{cases} 5|a+2| \leq 20 - 3a^2. \end{cases}$$

Поскольку любое решение полученного неравенства должно удовлетворять условию $20 - 3a^2 \geq 0$, то есть $a^2 \leq \frac{20}{3}$, и по условию a — целое число, решениями неравенства могут быть только $a \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Из этих условий проверкой получаем все решения: $-2, \pm 1, 0$.

Ответ: $-2, -1, 0, 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены одно или несколько значений a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения корней квадратичной функции (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Известно, что a, b, c , и d — попарно различные положительные двузначные числа.

- а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{6}{23}$?
- б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 4b$ и $c > 7d$?

Решение.

а) Пусть $a=10, b=20, c=14$ и $d=72$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{24}{92} = \frac{6}{23}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Тогда

$$\begin{aligned} 11 \cdot (a+c)bd &= (b+d)(ad+bc), \\ 11abd + 11bcd &= abd + bcd + ad^2 + b^2c, \\ 10abd - ad^2 &= b^2c - 10bcd \quad \text{и} \\ ad(10b-d) &= bc(b-10d). \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$10b-d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b-10d.$$

Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 \geq a \geq 4b+1$ и $c \geq 7d+1$. Значит, $b \leq \frac{98}{4} < 25$.

Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b \leq 24$.

Используя неравенства

$$a \geq 4b+1, \quad c \geq 7d+1, \quad b \leq 24 \quad \text{и} \quad d \geq 10,$$

получаем

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{4b+7d+2}{b+d} = 4 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 4 + \frac{3d+2}{d+24} = 7 - \frac{70}{d+24} \geq 7 - \frac{70}{34} = \frac{84}{17}.$$

Пусть $a=97, b=24, c=71$ и $d=10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{168}{34} = \frac{84}{17}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{84}{17}$.

Ответы: а) Да, например, если $a=10, b=20, c=14$ и $d=72$; б) нет; в) $\frac{84}{17}$.

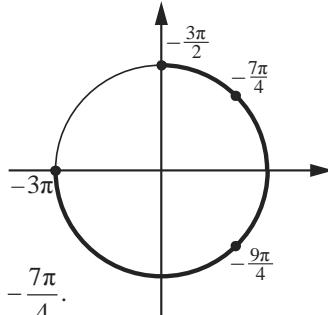
Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. <i>a</i> , – обоснованное решение в п. <i>b</i> , – искомая оценка в п. <i>c</i> , – пример в п. <i>d</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

13

а) Решите уравнение $(\tan^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.**Решение.**

$$\text{а) } (\tan^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0; \quad \begin{cases} \tan^2 x = 1, \\ \cos x > 0, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.б) Корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$, отберём с помощью единичной окружности.Получаем $-\frac{9\pi}{4}$ и $-\frac{7\pi}{4}$.**Ответ:** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б.	1
ИЛИ	
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 .

Решение.а) В плоскости AA_1D_1 проведём через точку E прямую, параллельную TF . Пусть она пересекает ребро A_1D_1 или его продолжение в точке G . Плоскость EFT проходит через точку G . Треугольник EGA_1 подобен равнобедренному треугольнику FTB_1 , в котором $FB_1 = B_1T = 1$. Отсюда $EA_1 = A_1G = 2$, значит, точка G совпадает с точкой D_1 .б) В плоскости BB_1C_1 из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1K на отрезок FT . В плоскости EFT из точки K проведём перпендикуляр к FT , который пересекает ED_1 в точке L . Тогда $\angle B_1KL$ — угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 или смежный с ним. Из равнобедренного треугольника FB_1T находим

$$B_1K = \frac{FB_1 \cdot B_1T}{FT} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из равнобедренной трапеции $EFTD_1$ находим

$$KL = \sqrt{TD_1^2 - \left(\frac{ED_1 - FT}{2}\right)^2} = \sqrt{17 - \left(\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{33}{2}}.$$

Точка L — середина отрезка ED_1 , поэтому она удалена от сторон AA_1 и AD_1 параллелепипеда на 1. Значит, B_1L является диагональю параллелепипеда со сторонами 1, 1 и 4. Отсюда $B_1L = \sqrt{18}$. Из теоремы косинусов для треугольника B_1KL находим $\cos \angle B_1KL = \frac{B_1K^2 + KL^2 - B_1L^2}{2 \cdot B_1K \cdot KL} = -\frac{1}{\sqrt{33}}$.**Ответ:** б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{33}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт а.	1
ИЛИ	
Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 15.1 или 15.2.

- 15.1** Решите неравенство $0,5\log_{x-2}(x^2-10x+25) + \log_{5-x}(-x^2+7x-10) \geq 3$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{2}\log_{x-2}(x-5)^2 + \log_{5-x}((5-x)(x-2)) \geq 3.$$

Любое решение неравенства удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ 5-x > 0, \\ x-2 \neq 1, \\ 5-x \neq 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} 2 < x < 5, \\ x \neq 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Для таких x имеем неравенство

$$\log_{x-2}(5-x) + \log_{5-x}(x-2) \geq 2.$$

Замена: $\log_{x-2}(5-x) = z$. Получаем $z + \frac{1}{z} \geq 2$, откуда $z > 0$. Обратная замена:

$$\log_{x-2}(5-x) > 0; \quad \frac{(5-x)-1}{(x-2)-1} > 0; \quad 3 < x < 4.$$

Ответ: $(3; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 15.2** Решите неравенство $\frac{x}{x^2+3} \leq (1:4)x^{-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{x^2+3} \leq \frac{1}{4x}; \quad \frac{4x^2 - x^2 - 3}{(x^2+3)4x} \leq 0; \quad \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+3)x} \leq 0.$$

Учитывая, что при всех значениях x выражение $x^2 + 3$ положительно, получаем

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} \leq 0, \quad \text{откуда } x \leq -1, \quad 0 < x \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup (0; 1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 16**

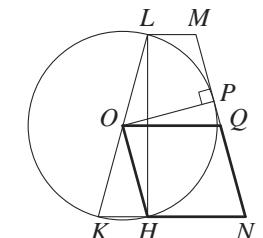
Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

- a) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

Решение.

а) Треугольник KOH равнобедренный и трапеция $KLMN$ равнобедренная, поэтому $\angle KHO = \angle OKH = \angle MNK$.

Значит, прямые OH и MN параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и KN . Противоположные стороны четырёхугольника $NQOH$ попарно параллельны, следовательно, $NQOH$ — параллелограмм.



б) Пусть окружность с центром в точке O радиуса R касается стороны MN в точке P . В прямоугольных треугольниках OPQ и KHL имеем

$$OQ = \frac{OP}{\sin \angle OQP} = \frac{R}{\sin 75^\circ}, \quad KH = KL \cos \angle LKH = 2R \cos 75^\circ.$$

Поэтому

$$\frac{KH}{NH} = \frac{KH}{OQ} = \frac{2R \cos 75^\circ}{\frac{R}{\sin 75^\circ}} = 2 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}.$$

Пусть $KH = x$. Поскольку трапеция $KLMN$ равнобедренная,
 $KN = 2KH + LM; \quad NH = KH + LM = x + 1$.

Тогда

$$\frac{KH}{NH} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 1$. Значит, $KN = 2x + 1 = 3$.

Ответ: б) 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	1
Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается как

$$px - (0,5x^2 + x + 7) = -0,5x^2 + (p-1)x - 7.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x = p-1$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-1)^2}{2} - 7$. Через 3 года прибыль составит не менее 75 млн рублей при

$$\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \geq \frac{75}{3}; \quad (p-1)^2 \geq 64; \quad (p-9)(p+7) \geq 0,$$

то есть при $p \geq 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной.

Таким образом, наименьшее значение $p = 9$.

Ответ: $p = 9$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 4, \\ x^2 - |a+1|x - 2a^2 = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Пусть (x, y) — решение системы. Тогда при любом значении параметра a левая часть первого уравнения системы есть сумма расстояний от точки (x, y) до точек $(1, a)$ и $(5, a)$, лежащих на прямой $y=a$, параллельной оси абсцисс. Но расстояние между точками $(1, a)$ и $(5, a)$ равно 4, и поэтому решение первого уравнения — множество точек (x, y) , причём $1 \leq x \leq 5, y = a$, поскольку иначе

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} > 4.$$

Следовательно, данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда второе уравнение системы имеет единственное решение на отрезке $1 \leq x \leq 5$.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = x^2 - |a+1|x - 2a^2 - 3.$$

Её график — парабола, направленная ветвями вверх. Поскольку свободный член $-2a^2 - 3 < 0$ при любом a , то корни этой функции имеют разные знаки. Известно, что в этом случае единственный положительный корень функции $f(x) = x^2 - |a+1|x - 2a^2 - 3$ лежит на отрезке $1 \leq x \leq 5$ тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 0$ и $f(5) \geq 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} f(1) \leq 0, & \begin{cases} 1 - |a+1| - 2a^2 - 3 \leq 0, \\ 25 - 5|a+1| - 2a^2 - 3 \geq 0; \end{cases} \\ f(5) \geq 0; & \begin{cases} -2a^2 - 2 \leq |a+1|, \\ 22 - 2a^2 \geq 5|a+1|; \end{cases} \end{cases} \quad 5|a+1| \leq 22 - 2a^2.$$

Поскольку любое решение полученного неравенства должно удовлетворять условию $22 - 2a^2 \geq 0$, то есть $a^2 \leq 11$, и по условию a — целое число, то решениями неравенства могут быть только $a \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Из этих условий проверкой получаем все решения: $-2, \pm 1, 0$.

Ответ: $-2, -1, 0, 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены одно или несколько значений a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения корней квадратичной функции (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Известно, что a, b, c , и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 8d$?

Решение.

а) Пусть $a = 20, b = 30, c = 7$ и $d = 39$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{27}{69} = \frac{9}{23}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Тогда

$$11 \cdot (a+c)bd = (b+d)(ad+bc),$$

$$11abd + 11bcd = abd + bcd + ad^2 + b^2c,$$

$$10abd - ad^2 = b^2c - 10bcd$$

$$ad(10b-d) = bc(b-10d).$$

С другой стороны, имеем

$$10b-d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b-10d.$$

Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 \geq a \geq 5b+1$ и $c \geq 8d+1$. Значит, $b \leq \frac{98}{5} < 20$.

Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b \leq 19$.

Используя неравенства

$$a \geq 5b+1, \quad c \geq 8d+1, \quad b \leq 19 \quad \text{и} \quad d \geq 10,$$

получаем

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{5b+8d+2}{b+d} = 5 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 5 + \frac{3d+2}{d+19} = 8 - \frac{55}{d+19} \geq 8 - \frac{55}{29} = \frac{177}{29}.$$

Пусть $a = 96, b = 19, c = 81$ и $d = 10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{177}{29}$. Следовательно,

наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{177}{29}$.

Ответ: а) Да, например, если $a = 20, b = 30, c = 7$ и $d = 39$; б) нет; в) $\frac{177}{29}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. <i>a</i> , – обоснованное решение в п. <i>b</i> , – искомая оценка в п. <i>c</i> , – пример в п. <i>d</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

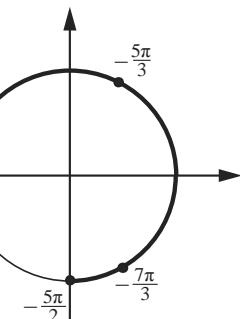
Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

13

а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 3)\sqrt{11 \cos x} = 0$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.**Решение.**

а) $(\operatorname{tg}^2 x - 3)\sqrt{11 \cos x} = 0; \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 3, \\ \cos x > 0, \end{cases}$

откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $-\frac{7\pi}{3}$ и $-\frac{5\pi}{3}$.Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б.	1
ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 2 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 4$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$.

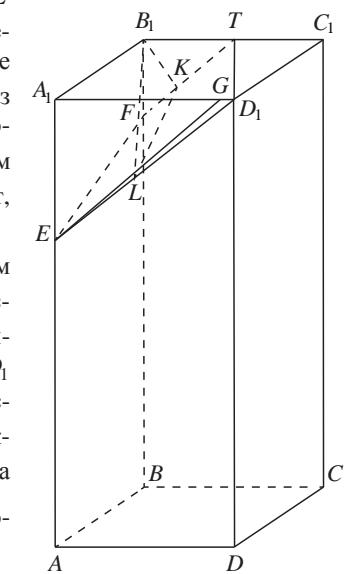
- а) Докажите, что плоскость
- EFT
- проходит через вершину
- D_1
- .
-
- б) Найдите угол между плоскостью
- EFT
- и плоскостью
- BB_1C_1
- .

Решение.а) В плоскости AA_1D_1 проведём через точку E прямую, параллельную TF . Пусть она пересекает ребро A_1D_1 или его продолжение в точке G . Плоскость EFT проходит через точку G . Треугольник EGA_1 подобен равнобедренному треугольнику FTB_1 , в котором $FB_1 = B_1T = 2$. Отсюда $EA_1 = A_1G = 4$, значит, точка G совпадает с точкой D_1 .б) В плоскости BB_1C_1 из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1K на отрезок FT . В плоскости EFT из точки K проведём перпендикуляр к FT , который пересекает ED_1 в точке L . Тогда $\angle B_1KL$ — угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 или смежный с ним. Из равнобедренного треугольника FB_1T находим $B_1K = \frac{FB_1 \cdot B_1T}{FT} = \sqrt{2}$. Из равнобедренной трапеции $EFTD_1$ находим

$$KL = \sqrt{TD_1^2 - \left(\frac{ED_1 - FT}{2}\right)^2} = \sqrt{13 - \left(\frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{11}.$$

Точка L — середина отрезка ED_1 , поэтому она удалена от сторон AA_1 и AD_1 параллелепипеда на 2. Значит, B_1L является диагональю параллелепипеда со сторонами 2, 2 и 3. Отсюда $B_1L = \sqrt{17}$. Из теоремы косинусов для треугольника B_1KL находим

$$\cos \angle B_1KL = \frac{B_1K^2 + KL^2 - B_1L^2}{2 \cdot B_1K \cdot KL} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

Ответ: б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт <i>a</i> .	1
ИЛИ	
Верно решён пункт <i>b</i> при отсутствии обоснований в пункте <i>a</i>	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 15.1 или 15.2.

15.1 Решите неравенство $0,5 \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) \geq 3$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{2} \log_{x-1}(x-4)^2 + \log_{4-x}((4-x)(x-1)) \geq 3.$$

Любое решение неравенства удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ 4-x > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ 4-x \neq 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} 1 < x < 4, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Для таких x имеем неравенство

$$\log_{x-1}(4-x) + \log_{4-x}(x-1) \geq 2.$$

Замена: $\log_{x-1}(4-x) = z$. Получаем $z + \frac{1}{z} \geq 2$, откуда $z > 0$. Обратная замена:

$$\log_{x-1}(4-x) > 0; \quad \frac{(4-x)-1}{(x-1)-1} > 0; \quad 2 < x < 3.$$

Ответ: $(2; 3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15.2 Решите неравенство $\frac{x}{2x^2+12} \leq (1:5)x^{-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{2x^2+12} \leq \frac{1}{5x}; \quad \frac{5x^2 - 2x^2 - 12}{(2x^2+12)5x} \leq 0; \quad \frac{(x-2)(x+2)}{(2x^2+12)x} \leq 0.$$

Учитывая, что при всех значениях x выражение $2x^2+12$ положительно, получаем

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x} \leq 0, \text{ откуда } x \leq -2, \quad 0 < x \leq 2.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (0; 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16 Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

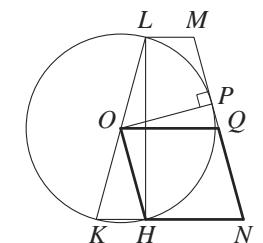
а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 2$.

Решение.

а) Треугольник KOH равнобедренный и трапеция $KLMN$ равнобедренная, поэтому $\angle KHO = \angle OKH = \angle MNK$.

Значит, прямые OH и MN параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и KN . Противоположные стороны четырёхугольника $NQOH$ попарно параллельны, следовательно, $NQOH$ — параллелограмм.



б) Пусть окружность с центром в точке O радиуса R касается стороны MN в точке P . В прямоугольных треугольниках OPQ и KHL имеем

$$OQ = \frac{OP}{\sin \angle OQP} = \frac{R}{\sin 75^\circ}, \quad KH = KL \cos \angle LKH = 2R \cos 75^\circ.$$

Поэтому

$$\frac{KH}{NH} = \frac{KH}{OQ} = \frac{2R \cos 75^\circ}{\frac{R}{\sin 75^\circ}} = 2 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}.$$

Пусть $KH = x$. Поскольку трапеция $KLMN$ равнобедренная,

$$KN = 2KH + LM; \quad NH = KH + LM = x + 2.$$

Тогда

$$\frac{KH}{NH} = \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 2$. Значит, $KN = 2x + 2 = 6$.

Ответ: б) 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	1
Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 2x + 5$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается как

$$px - (0,5x^2 + 2x + 5) = -0,5x^2 + (p-2)x - 5.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x = p - 2$. Наибольшее значение равно

$$\frac{(p-2)^2}{2} - 5. \text{ Через 4 года прибыль составит не менее 52 млн рублей при}$$

$$\frac{(p-2)^2}{2} - 5 \geq \frac{52}{4}; \quad (p-2)^2 \geq 36; \quad (p-8)(p+4) \geq 0,$$

то есть при $p \geq 8$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p = 8$.

Ответ: $p = 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
ИЛИ	
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} = 3, \\ x^2 - |a+2|x - 3a^2 = 5 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Пусть (x, y) — решение системы. Тогда при любом значении параметра a левая часть первого уравнения системы есть сумма расстояний от точки (x, y) до точек $(2, a)$ и $(5, a)$, лежащих на прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс. Но расстояние между точками $(2, a)$ и $(5, a)$ равно 3, и поэтому решение первого уравнения — множество точек (x, y) , причём $2 \leq x \leq 5$, $y = a$, поскольку иначе

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-a)^2} > 3.$$

Следовательно, данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда второе уравнение системы имеет единственное решение на отрезке $2 \leq x \leq 5$.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = x^2 - |a+2|x - 3a^2 - 5.$$

Её график — парабола, направленная ветвями вверх. Поскольку свободный член $-3a^2 - 5 < 0$ при любом a , корни этой функции имеют разные знаки. Известно, что в этом случае единственный положительный корень функции $f(x) = x^2 - |a+2|x - 3a^2 - 5$ лежит на отрезке $2 \leq x \leq 5$ тогда и только тогда, когда $f(2) \leq 0$ и $f(5) \geq 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} f(2) \leq 0, \\ f(5) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 - 2|a+2| - 3a^2 - 5 \leq 0, \\ 25 - 5|a+2| - 3a^2 - 5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3a^2 - 1 \leq 2|a+2|, \\ 20 - 3a^2 \geq 5|a+2|; \end{cases} \quad \begin{cases} 5|a+2| \leq 20 - 3a^2. \end{cases}$$

Поскольку любое решение полученного неравенства должно удовлетворять условию $20 - 3a^2 \geq 0$, то есть $a^2 \leq \frac{20}{3}$, и по условию a — целое число, решениями неравенства могут быть только $a \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Из этих условий проверкой получаем все решения: $-2, \pm 1, 0$.

Ответ: $-2, -1, 0, 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены одно или несколько значений a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения корней квадратичной функции (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Известно, что a, b, c , и d — попарно различные положительные двузначные числа.

- а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{6}{23}$?
- б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 4b$ и $c > 7d$?

Решение.

а) Пусть $a=10, b=20, c=14$ и $d=72$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{24}{92} = \frac{6}{23}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Тогда

$$\begin{aligned} 11 \cdot (a+c)bd &= (b+d)(ad+bc), \\ 11abd + 11bcd &= abd + bcd + ad^2 + b^2c, \\ 10abd - ad^2 &= b^2c - 10bcd \quad \text{и} \\ ad(10b-d) &= bc(b-10d). \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$10b-d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b-10d.$$

Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 \geq a \geq 4b+1$ и $c \geq 7d+1$. Значит, $b \leq \frac{98}{4} < 25$.

Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b \leq 24$.

Используя неравенства

$$a \geq 4b+1, \quad c \geq 7d+1, \quad b \leq 24 \quad \text{и} \quad d \geq 10,$$

получаем

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{4b+7d+2}{b+d} = 4 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 4 + \frac{3d+2}{d+24} = 7 - \frac{70}{d+24} \geq 7 - \frac{70}{34} = \frac{84}{17}.$$

Пусть $a=97, b=24, c=71$ и $d=10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{168}{34} = \frac{84}{17}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{84}{17}$.

Ответы: а) Да, например, если $a=10, b=20, c=14$ и $d=72$; б) нет; в) $\frac{84}{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. <i>a</i> , – обоснованное решение в п. <i>b</i> , – искомая оценка в п. <i>c</i> , – пример в п. <i>d</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4