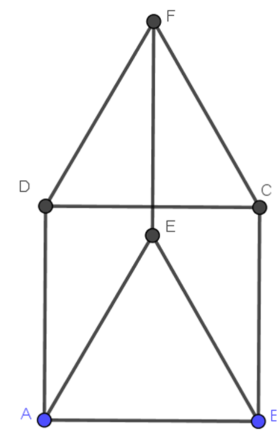
Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

8 класс

**1.** Садовник хочет посадить шесть кустов крыжовника, чтобы на расстоянии 2м от каждого из них росло ровно три куста крыжовника. Сможет ли он это сделать?




***Ответ***: Да. Например, если на двух сторонах квадрата ABCD построить правильные треугольники AEB и DCF, то для каждой точки условия будут выполняться, так как DE=EC<DC, AF=FB>AB и AD=EF(стороны параллелограмма).

***Критерии***:

Есть верный пример без обоснования равенства/неравенства сторон – 4 балла;

Есть верный пример с полным обоснованием – 7 баллов;

Только ответ – 0 баллов

**2.** В выражении $\frac{М\cdot А\cdot Т\cdot Е+М\cdot А\cdot Т\cdot И\cdot К\cdot А}{Т\cdot Е\cdot М\cdot А}$ замените каждую из букв на какую-то из цифр от 1 до 9 (одинаковые буквы – на одинаковые цифры, разные буквы – на разные цифры) так, чтобы значение выражения получилось наибольшим. *Покажите, как нужно расставить цифры, вычислите значение вашего выражения и объясните, почему оно наибольшее.*

***Решение***: Сократим множители Т,М,А. Тогда выражение примет вид $1+\frac{И\cdot К\cdot А}{Е}$. Дробь принимает наибольшее значение при наименьшем знаменателе и наибольшем числителе. Следовательно Е=1, а числа И,К,А равны цифрам 9,8,7. Числа М,А,Т могут быть произвольными.

***Ответ***: 505

***Критерии***:

Есть только пример с верным ответом – 7 баллов.

Есть только пример – 4 балла.

**3.** В волшебном королевстве обитают лисицы с семью и девятью хвостами. Те, у кого 7 хвостов, всегда врут, а те, у кого 9 хвостов, всегда говорят правду. Однажды три лисицы завели между собой разговор.

Рыжая лиса: «у нас вместе 27 хвостов».

Серая лиса: «это действительно так!»

Белая лиса: «глупости, Рыжая говорит чепуху!»

Сколько хвостов было у каждой лисицы? (Ответ обоснуйте.)

***Решение***: Если бы Рыжая говорила правду, то у всех трёх было бы по 9 хвостов. Но тогда и Белая говорила бы правду, а это неверно. Тогда Рыжая лжет, и Серая соответственно тоже. Тогда Белая говорит правду.

***Ответ***: У Рыжей было 7 хвостов, у Серой – 7, у Белой – 9.

***Критерии***:

Только ответ, без объяснений – 1 балл;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

**4.** Мальчик Марат может за минуту подняться с первого этажа на пятый этаж, а девочка Даша за то же время успевает добежать только до четвертого. Даша спускается вдвое быстрее, чем поднимается, а Марат спускается с той же скоростью, что и Даша. Дети решили посоревноваться и добежать с первого этажа до 25, стартуя одновременно. Марат, достигнув 25 этажа, начал спускаться, чтобы встретить проигравшую Дашу. Сколько пройдёт времени от начала соревнования до момента встречи?

***Решение***: За минуту Марат поднимается на 4 этажа вверх, а Даша – на 3 этажа вверх. За ту же минуту оба могут спуститься на 6 этажей вниз. Для того чтобы победить Марату нужно преодолеть 24 этажа. Через 6 минут Марат достигает финиша, а Даша поднимается только на 18 этажей (до 19). Теперь расстояние между ними 6 этажей, а скорость сближения 3+6=9 этажей в минуту. Чтобы встретиться им понадобится 40 секунд.

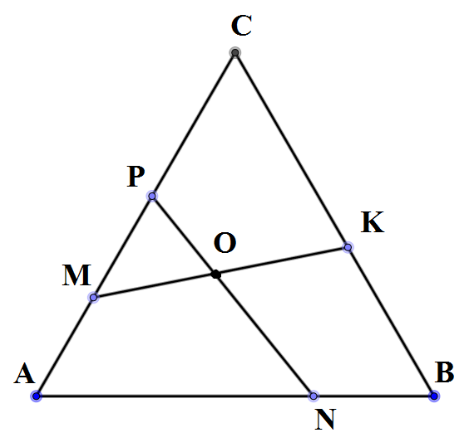
***Ответ***: 6 минут и 40 секунд

***Критерии***:

Только ответ, без объяснений – 1 балл;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

**5.** В треугольнике ABC все стороны равны 2017 см. Точки M, N, P, K расположены так, как показано на рисунке. Известно, что CK + PC = MA + AN = 2017 см. Найдите величину угла KON.




***Решение***: Заметим, что CK + PC = AP + PC и MA+AN = MA+MC. Тогда CK=AP и AN=MC. Следовательно, треугольники APN и MKC равны. ∠ANP=∠CMK и ∠APN+∠ANP=120º. Тогда ∠MPO+∠PMO =120º. ∠KON=∠POM =60º.

Ответ: ∠KON =60º

***Критерии***:

Только ответ, без объяснений – 0 баллов;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

## 9 класс

**1.** Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записывании его цифр в обратном порядке (например, 626 – палиндром, а 2017 – нет). Представьте число 2017 в виде суммы двух палиндромов.

***Решение***: например, 1331+686=2017.

***Критерии***:

Наличие любого верного примера – 7 баллов.

**2.** Айрат и Дина вместе весят 84 кг, Дина и Таня – 76 кг, Таня и Саша – 77 кг, Саша и Маша – 67 кг, Маша и Айрат – 64 кг. Кто тяжелее всех и сколько он весит?

***Решение***: А+Д=84, Д+Т=76, Т+С=77, С+М=67, М+А=64. Сложим все уравнения и получим 2(А+Д+Т+С+М)=368. Тогда А+Д+Т+С+М= 184. Используя второе и четвертое равенство из условия получим А+76+67=184. Следовательно А=41, Д=43, Т=33, С=44, М=23.

***Ответ***: Самый тяжелый – Саша. Саша весит 44 кг.

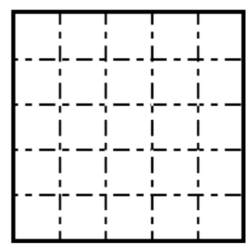
***Критерии:***

Только ответ, без объяснений, без указания веса – 0 баллов;

Только ответ, без объяснений, с указанием веса – 3 балла;

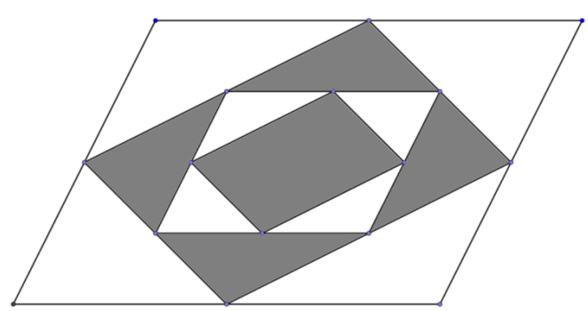
Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

**3.** Дамир нарисовал на тетрадном листе квадрат $5 \times 5$ и каждую минуту закрашивает по одной клетке. Лёша считает количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток и записывает это число на доске. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел на доске будет равна 40.

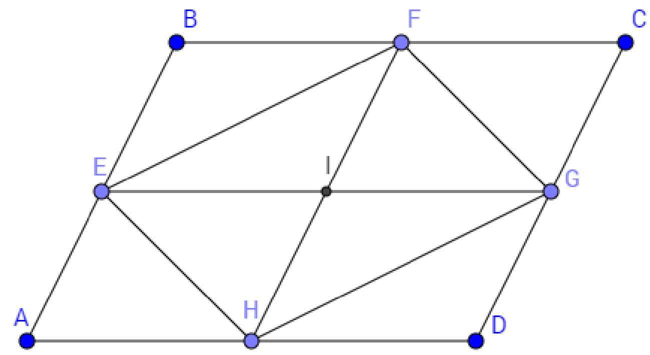


Доказательство: Заметим, что Леша считает количество границ данной клетки, для которых обе соседние клетки закрашены. Выполняя свои операции, Леша каждую границу считает один и только один раз. Тогда, сумма всех чисел равна количеству граничных отрезков, а именно 2*4*5=40.

**4.** Найдите площадь закрашенной части параллелограмма, если площадь большого параллелограмма равна 40 (вершины всех параллелограммов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



***Решение***: В параллелограмме ABCD проведем отрезки EG и FH. Они параллельны боковым сторонам. Тогда образуются 4 меньших параллелограмма. В каждом из них диагональ делит параллелограмм на две равные части. Следовательно, суммарная площадь «угловых» треугольников AEH, EBF, FCG, GDH равна площади параллелограмма EFGH.




В задаче дано, что все четырехугольники – параллелограммы. *Это доказывать не обязательно!* Тогда площадь «угловых» треугольников самого большого параллелограмма равна 20. У второго – 10, у третьего – 5. Вычтем из площади всего параллелограмма площади «угловых» треугольников первого и третьего параллелограммов. 40-20-5=25.

***Ответ***: 25.

***Критерии:***

Только ответ, без объяснений – 1 балл;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

**5.** Вместо пропусков вставьте такие числа, чтобы выражение

$\left(x^2+\square\cdot x+6\right)(x+4)=(x+\square)(x^2+\square\cdot x+8)$ стало тождеством.

***Решение***: Пусть пропущены числа $a, b, c$.

$(x^2+a\cdot x+6)(x+4)=(x+b)(x^2+c\cdot x+8)$. Подставим $x=0$ в уравнение. Получим $24=8b$, $b=3$. Подставим $x=-4$. Получим

$0=(-4+3)(16+c\cdot(-4)+8)$. Тогда $c=6$. Подставим $x=-3$. Получим $(9-3\cdot a+6)(-3+4)=0$. Тогда $a=5$.

***Ответ***: $(x^2+5\cdot x+6)(x+4)=(x+3)(x^2+6\cdot x+8)$.

***Критерии:***

Только ответ, без объяснений – 4 балла;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

# 10 класс

1. Делится ли $7^{2017}+7^{2018}+7^{2019}$ на 19?

***Решение***: $7^{2017} + 7^{2018} + 7^{2019} = 7^{2017}(1+7+49) = 7^{2017}\cdot 3\cdot 19.$

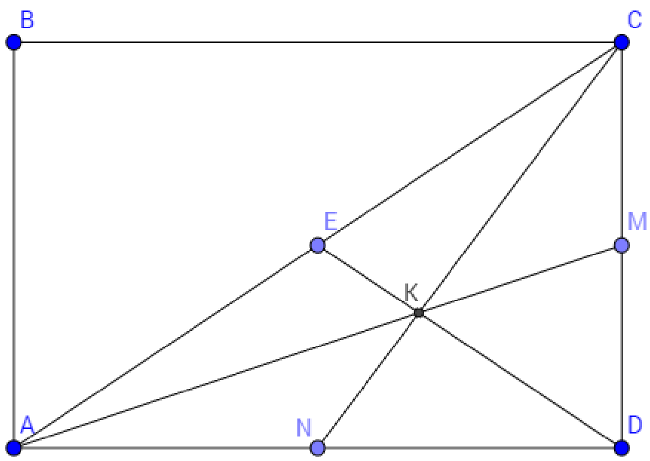
***Ответ***: Да.

***Критерии***:

Только ответ, без объяснений – 0 баллов;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

2. В прямоугольнике ABCD на стороне CD отметили середину M, и на стороне AD – середину N. Отрезки CN и AM пересекаются в точке K. Во сколько раз площадь четырехугольника AKCB больше площади четырехугольника MDNK?




***Решение***: ED – медиана треугольника ACD. Известно, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих. Тогда площади треугольников AEK, CEK, CMK, DMK, DKN, ANK равны. А площадь треугольника ACD равна площади ABC. Тогда отношение $\frac{S_{ABCK}}{S_{NKMD}} = \frac{6+2}{2} = 4.$

***Ответ***: в 4 раза.

***Критерии***:

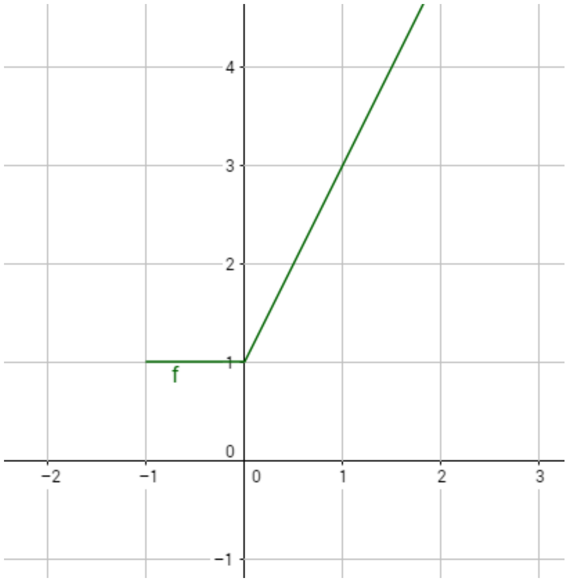
Только ответ, без объяснений – 1 балл;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

3. Постройте график функции $y = (\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{x^2}$.

***Решение***: Приведем к виду $\begin{cases} y = x+1+|x| \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$. Преобразуем

$\begin{cases} y = \begin{cases} 2x+1 \text{ при } x \geq 0 \\ 1 \quad\quad \text{ при } x < 0 \end{cases} \\ x \geq -1 \end{cases}$. Тогда график примет вид




***Критерии:***

Только верный график, без объяснений – 4 балла;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

4. В деревне хоббитов каждый либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Волшебник пригласил к себе нескольких хоббитов и спросил каждого из них про каждого из остальных, «правдолюб» тот или «лжец». Всего было получено 54 ответа «правдолюб» и 56 ответов «лжец». Сколько раз волшебник мог услышать правду?

***Решение***: Если приглашено $n$ хоббитов, то дано $n(n-1) = 54 + 56 = 110$ ответов, откуда $n = 11$. Пусть из этих 11 хоббитов $t$ правдолюбов и $(11 - t)$ лжецов.

Ответ «лжец» может дать только лжец про правдолюба и правдолюб про лжеца, таких фраз было $2t(11 - t) = 56$, откуда $t = 4$ или $t = 7$. Если правдолюбов четверо, то они дали $4 \cdot 10 = 40$ правдивых ответов. Если правдолюбов семеро, то они дали $7 \cdot 10 = 70$ правдивых ответов.

Комментарий. Обратите внимание на то, что из условия следует, что правдивыми являются половина из ответов «лжец». Но сразу не ясно, какова доля правдивых ответов «правдолюб».

***Критерии***:

• Полное решение — 7 баллов.

• Правильно найдены оба случая (сколько правдивцев и лжецов), но неверно подсчитано число правдивых ответов — 4 балла.

• Возможны 2 ситуации, описанные в задаче. Если верно разобрана только одна, то ставить 3 балла.

• Приведены оба ответа без объяснения — 1 балл.

• Приведён только один из ответов — 0 баллов.

***Ответ***: 40 или 70

5. У торговца драгоценностями есть 61 гиря весом 1г, 2г, … , 61г. Он выставил их в ряд так, чтобы вес каждой, начиная со второй, является делителем суммы весов всех предшествующих гирь. Первая гиря весит 61г, вторая – 1г. Найдите вес третьей гири.

***Ответ***. 2.

***Решение***. Сумма всех чисел, кроме последнего, делится на последнее число, значит, сумма всех чисел также делится на последнее число. Сумма всех чисел от 1 до 61 равна $31 \cdot 61$. Значит, последнее число равно 1, 31 или 61. Так как 1 и 61 стоят на первом и втором местах, последнее число — 31. Третье число — делитель числа $61 + 1 = 62$, то есть оно равно 1, 2 или 31. Мы знаем, что числа 1 и 31 расположены не на третьем месте, поэтому на третьем месте стоит число 2.
Замечание. Приводить пример, как расположены числа на остальных карточках (или доказывать его существование), не требуется.

***Критерии:***

• Полное верное решение — 7 баллов.

• Утверждается, что на третьей карточке — число 2 или число 19, но других продвижений нет — 1 балл.

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

# 11 класс

1. Найдите какую-нибудь пару натуральных чисел a и b, бóльших 1, удовлетворяющих уравнению $a^{13} \cdot b^{31} = 6^{2017}$.

***Решение***. Достаточно привести один пример.

Так как $2017 = 148 \cdot 13 + 3 \cdot 31$, подходят $a = 6^{148}, b = 6^3$.

***Комментарий***: возможно множество различных ответов со всевозможными комбинациями степеней двоек и троек.

***Критерии***:

• Приведена хотя бы одна пара значений a, b и показано, что она удовлетворяет данному условию — 7 баллов.

• Приведена пара чисел, более ничего не обосновано (а жюри умеет показывать, что пара подходит) — 5 баллов.

• Основная идея решения верна, но допущена арифметическая ошибка (например, написано, что $2017 = 148 \cdot 13 + 3 \cdot 33$) — 2 балла.

2. Имеет ли уравнение $cos2015x + tg2016x - sin2017x = 0$ хотя бы один корень? Ответ обоснуйте.

***Ответ***: Например, $\frac{\pi}{4}$.

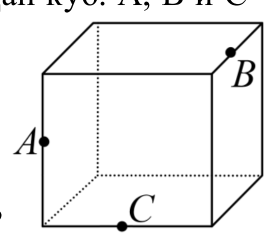
***Решение***: $cos\frac{2015\pi}{4} + tg\frac{2016\pi}{4} - sin\frac{2017\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

***Критерии***:

• Приведён верный ответ, и показано, что при этом значении x равенство верно, — 7 баллов.

• Приведён только верный ответ — 3 балла.

3. Дан куб. A, B и C – середины его рёбер (см. рисунок). Чему равен косинус угла




ABC ?

***Решение***: Не умаляя общности примем сторону куба за 2. Тогда $AC = \sqrt{2}$, $AB = CB = \sqrt{1+4+1}$. Вычислим по трем сторонам косинус угла ABC. $cos\alpha = \frac{2-6-6}{-2\cdot 6} = \frac{5}{6}$.

***Критерии***:

• Получен верный ответ со всеми обоснованиями – 7 баллов.

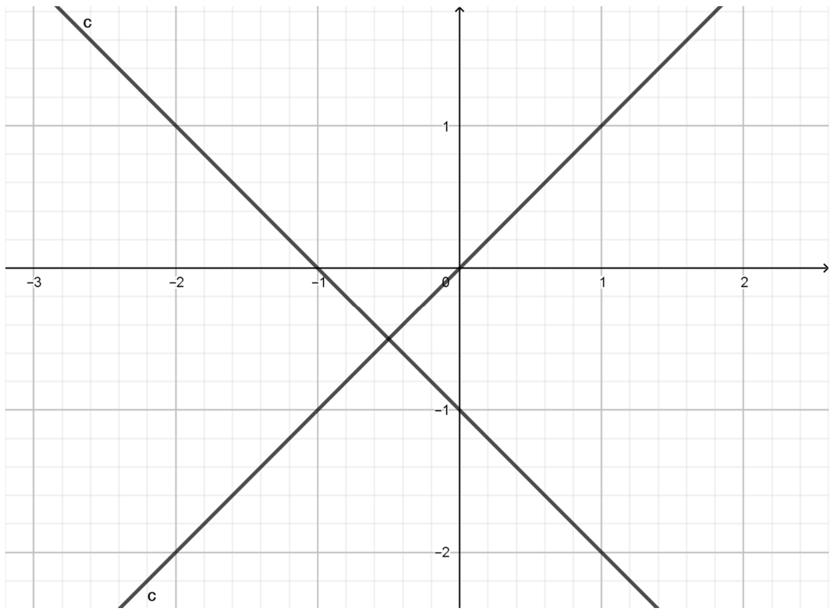
• Ход решения правильный, но ответ неверен из-за арифметической ошибки – 5 баллов.

• Получен ответ $\frac{-5}{6}$ – 4 балла.

• Только ответ (в том числе – верный) – 0 баллов.

***Ответ:*** $\frac{5}{6}$

4. На координатной плоскости (x, y) изобразите множество всех точек, для которых $y^2 + y = x^2 + x$.

***Ответ***: 


***Решение***: $y^2 + y = x^2 + x \leftrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0 \leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0$. Тогда $\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x-1 \end{array}\right.$.

***Критерии***:

Построен верный график со всеми обоснованиями – 7 баллов.

Построен верный график без обоснований – 3 балла.

5. В пенале у Равиля 9 карандашей. Он заметил, что среди любых четырёх карандашей хотя бы два одного цвета. А среди любых пяти карандашей не больше трёх имеют один цвет. Карандаши скольких различных цветов есть у Равиля, и сколько карандашей каждого цвета?

***Ответ***. Три цвета по три карандаша.

***Решение***. Ни одного цвета не более трех, так как в противном случае условие «среди любых пяти карандашей не больше трёх имеют один цвет» было бы не выполнено. Всего карандашей 9, поэтому цветов не менее трех. С другой стороны среди любых четырёх карандашей хотя бы два одного цвета, поэтому цветов меньше четырех. Таким образом, цветов карандашей три, причем каждого не более трех штук, а всего карандашей 9. Значит,

каждого цвета по 3.

***Критерии*:**

• Полный ответ с верным объяснением – 7 баллов.

• Обосновано, что детей трое – 5 баллов.
• Верные соображения, но решение не доведено до конца – 1-2 балла.
• Ответ без обоснования – 0 баллов.