Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, ноябрь 2016

8 класс

(Продолжительность олимпиады – 4 часа. В каждом задании необходимо записать не только ответ, но и полное решение. Только ответы без обоснования оцениваются намного ниже.)

1. Три пакета молока стоят на 4% дешевле, чем баночка кофе. На сколько процентов две таких же баночки кофе дороже (или дешевле) 5 пакетов молока?

2. Натуральное число n называется *полусовершенным*, если сумма всех или некоторых его различных делителей, меньших n, совпадает с этим числом. Например, число 12 – полусовершенное, так как его можно представить в виде суммы некоторых (не всех) его делителей:
12 = 1 + 2 + 3 + 6. Будет ли число 2016 полусовершенным?

3. Можно ли записать в клетках таблицы 20×16 числа 5 и 9 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце сумма чисел делилась на 21?

4. У Маши есть бумажный прямоугольный треугольник ABC. Она сложила его по прямой линии так, что вершины острых углов A и B совпали, при этом линия сгиба пересекла сторону AB в точке K, а сторону AC – в точке M. Даша развернула треугольник и сложила его заново так, что вершина прямого угла C совпала с точкой K. При этом оказалось, что полученная линия сгиба пересекла сторону AC в точке M. Докажите, что линия сгиба у Даши проходила через вершину B.

5. На прямой отмечены несколько точек. Для любых двух из них найдется третья (тоже отмеченная), такая, что одна из этих трех точек является серединой отрезка между двумя другими.

а) можно ли так отметить на прямой 5 точек?

б) показать, что отмеченных точек не может быть ровно 4.

Решение обосновать.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, ноябрь 2016

8 класс

(Продолжительность олимпиады – 4 часа. В каждом задании необходимо записать не только ответ, но и полное решение. Только ответы без обоснования оцениваются намного ниже.)

1. Три пакета молока стоят на 4% дешевле, чем баночка кофе. На сколько процентов две таких же баночки кофе дороже (или дешевле) 5 пакетов молока?

2. Натуральное число n называется *полусовершенным*, если сумма всех или некоторых его различных делителей, меньших n, совпадает с этим числом. Например, число 12 – полусовершенное, так как его можно представить в виде суммы некоторых (не всех) его делителей:
12 = 1 + 2 + 3 + 6. Будет ли число 2016 полусовершенным?

3. Можно ли записать в клетках таблицы 20×16 числа 5 и 9 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце сумма чисел делилась на 21?

4. У Маши есть бумажный прямоугольный треугольник ABC. Она сложила его по прямой линии так, что вершины острых углов A и B совпали, при этом линия сгиба пересекла сторону AB в точке K, а сторону AC – в точке M. Даша развернула треугольник и сложила его заново так, что вершина прямого угла C совпала с точкой K. При этом оказалось, что полученная линия сгиба пересекла сторону AC в точке M. Докажите, что линия сгиба у Даши проходила через вершину B.

5. На прямой отмечены несколько точек. Для любых двух из них найдется третья (тоже отмеченная), такая, что одна из этих трех точек является серединой отрезка между двумя другими.

а) можно ли так отметить на прямой 5 точек?

б) показать, что отмеченных точек не может быть ровно 4.

Решение обосновать.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, ноябрь 2016

9 класс

(Продолжительность олимпиады – 4 часа. В каждом задании необходимо записать не только ответ, но и полное решение. Только ответы без обоснования оцениваются намного ниже.)

1. Маша выбрала натуральное число. Айрат сложил один из его делителей с числом 5, полученное число увеличил в 6 раз и результат вычел из числа, предложенного Машей. Получилось число 7. Какое число выбрала Маша?

2. Пусть a — корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. Найдите уравнение третьей степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число a^3.

3. На доске записаны числа 1, $\frac{1}{2}$, . . . ,$\frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них одно число $\frac{ab}{a+b}$. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какие значения может принимать это число?

4. Точка M внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ такова, что площади треугольников ABM, BCM, CDM и DAM равны. Верно ли, что $ABCD$ – параллелограмм, а точка M – точка пересечения его диагоналей? Решение обосновать.

5. В квадрате 8 × 8 расположены четыре точки. Докажите, что среди них можно выбрать две точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{65}$.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, ноябрь 2016

9 класс

(Продолжительность олимпиады – 4 часа. В каждом задании необходимо записать не только ответ, но и полное решение. Только ответы без обоснования оцениваются намного ниже.)

1. Маша выбрала натуральное число. Айрат сложил один из его делителей с числом 5, полученное число увеличил в 6 раз и результат вычел из числа, предложенного Машей. Получилось число 7. Какое число выбрала Маша?

2. Пусть a — корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. Найдите уравнение третьей степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число a^3.

3. На доске записаны числа 1, $\frac{1}{2}$, . . . ,$\frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них одно число $\frac{ab}{a+b}$. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какие значения может принимать это число?

4. Точка M внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ такова, что площади треугольников ABM, BCM, CDM и DAM равны. Верно ли, что $ABCD$ – параллелограмм, а точка M – точка пересечения его диагоналей? Решение обосновать.

5. В квадрате 8 × 8 расположены четыре точки. Докажите, что среди них можно выбрать две точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{65}$.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, ноябрь 2016

10 класс

(Продолжительность олимпиады – 4 часа. В каждом задании необходимо записать не только ответ, но и полное решение. Только ответы без обоснования оцениваются намного ниже.)

1. Всегда ли из 2016 отрезков можно выбрать 3 таких, из которых можно сложить треугольник?

2. Число a — корень уравнения $x^{11} + x^7 + x^3 = 1$. При каких натуральных значениях n выполняется равенство $a^4 + a^3 = a^n + 1$?

3. Известно, что в остроугольном треугольнике ABC медиана, проведенная из вершины A, равна 3, а высота, опущенная из вершины B, равна 4. Может ли сторона AC иметь длину 5?

4. На доске записаны числа 1, $\frac{1}{2}$, . . . , $\frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них одно число $ab + a + b$. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какие значения может принимать это число?

5. Расположим на плоскости выпуклые многоугольники так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

а) Приведите пример четырех таких многоугольников.

б) Покажите, что больше четырех многоугольников так расположить не удастся.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, ноябрь 2016

10 класс

(Продолжительность олимпиады – 4 часа. В каждом задании необходимо записать не только ответ, но и полное решение. Только ответы без обоснования оцениваются намного ниже.)

1. Всегда ли из 2016 отрезков можно выбрать 3 таких, из которых можно сложить треугольник?

2. Число a — корень уравнения $x^{11} + x^7 + x^3 = 1$. При каких натуральных значениях n выполняется равенство $a^4 + a^3 = a^n + 1$?

3. Известно, что в остроугольном треугольнике ABC медиана, проведенная из вершины A, равна 3, а высота, опущенная из вершины B, равна 4. Может ли сторона AC иметь длину 5?

4. На доске записаны числа 1, $\frac{1}{2}$, . . . , $\frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них одно число $ab + a + b$. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какие значения может принимать это число?

5. Расположим на плоскости выпуклые многоугольники так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

а) Приведите пример четырех таких многоугольников.

б) Покажите, что больше четырех многоугольников так расположить не удастся.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, ноябрь 2016

11 класс

(Продолжительность олимпиады – 4 часа. В каждом задании необходимо записать не только ответ, но и полное решение. Только ответы без обоснования оцениваются намного ниже.)

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -2 \end{cases}$

2. Что больше: $(2016!)^{2015!}$ или $(2015!)^{2016!}$? (Через $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

3. Найдите решение в простых числах p, q уравнения $2^{2p} - 2^p + 1 = q$.

4. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC, кроме того, $AD = BC$. Все плоские углы при вершине D равны между собой. Чему могут быть равны эти углы?

5. Пусть x, y, z — положительные числа, и $xyz = 1$. Докажите неравенство:

$$x + y + z \le \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, ноябрь 2016

11 класс

(Продолжительность олимпиады – 4 часа. В каждом задании необходимо записать не только ответ, но и полное решение. Только ответы без обоснования оцениваются намного ниже.)

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -2 \end{cases}$

2. Что больше: $(2016!)^{2015!}$ или $(2015!)^{2016!}$? (Через $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

3. Найдите решение в простых числах p, q уравнения $2^{2p} - 2^p + 1 = q$.

4. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC, кроме того, $AD = BC$. Все плоские углы при вершине D равны между собой. Чему могут быть равны эти углы?

5. Пусть x, y, z — положительные числа, и $xyz = 1$. Докажите неравенство:

$$x + y + z \le \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$