Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

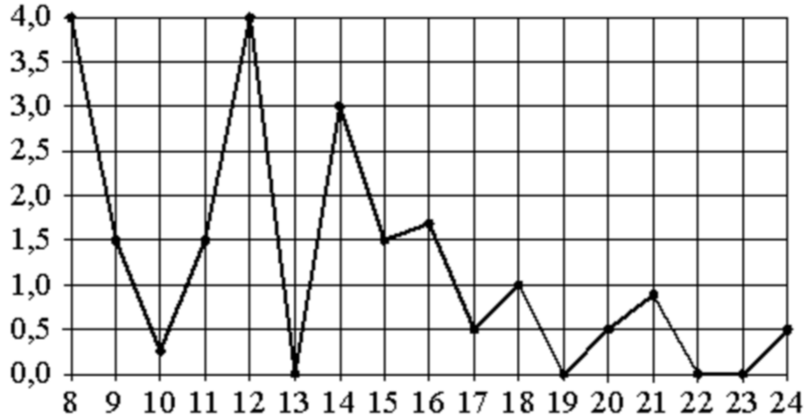
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Летом килограмм клубники стоит 80 рублей. Маша купила 1 кг 750 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 200 рублей?

Ответ: ___________________________.

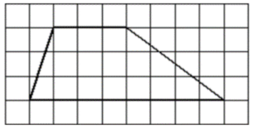
2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа в Томске впервые выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.

Ответ: ____________________________.



4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

Ответ: ____________________________.

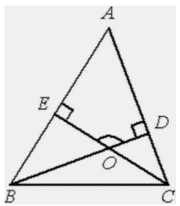
5 Найдите корень уравнения

$\log_7(1-x) = \log_7 5.$

Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол A равен 56°, углы B и C – острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

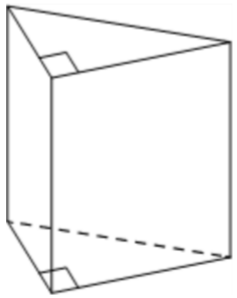
Ответ: ____________________________.



7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t + 250$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 96 м/с?

Ответ: ____________________________.

8 Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 7, объём призмы равен 56. Найдите боковое ребро призмы.



Ответ: ____________________________.

9 Найдите значение выражения

$7\sqrt{2}\sin\frac{15\pi}{8} \cdot \cos\frac{15\pi}{8}.$

Ответ: ____________________________.

10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1300$ К, $a = -\frac{14}{3}$ К/мин^2, $b = 98$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1720 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________________.

11 На изготовлении 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = 69\cos x + 71x + 48$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$4\sin^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 1:2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1:5$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

15 Решите неравенство

$$\log_{16}(x+5) + \log_{(x^2+10x+25)} 2 \geq \frac{3}{4}.$$

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30°$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

18 Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству

$$5|x-2| + 2|x+a| \leq \sqrt{25 - y^2} - 3.$$

19 Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 19$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 25$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 27$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1800$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1800$. Найдите количество возможных решений числа a.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171106

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора Трижды победитель олимпиады по высшей математике среди всех студентов Тольяттинского государственного университета
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	60
2	9
3	16,5
4	0,25
5	-4
6	124
7	18
8	4
9	-3,5
10	6
11	8
12	117
13	а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}$
14	$\operatorname{arctg} 1{,}5\sqrt{5}$
15	$(-4;-3]\cup[-1;+\infty)$
16	$\frac{\sqrt{21}}{18}$
17	800 тыс.
18	$[-3;-1]$
19	а) $a=7, b=6, c=4$ и $d=2$, б) нет, в) 448

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$4\sin^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

.

Решение:

$4\sin^2 x - 8\cos x + 1 = 0$

Основные Тригонометрические формулы

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$4\cdot(1 - \cos^2 x) - 8\cos x + 1 = 0$

$4 - 4\cos^2 x - 8\cos x + 1 = 0$

$-4\cos^2 x - 8\cos x + 5 = 0$

Пусть $\cos x = t$

$-4t^2 - 8t + 5 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 64 + 80 = 144 = 12^2$

$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{8 + 12}{-8} = -2{,}5$ (нет решений)

$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{8 - 12}{-8} = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

$x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{13\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в	1

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171106

пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 1:2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB = 1:5$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

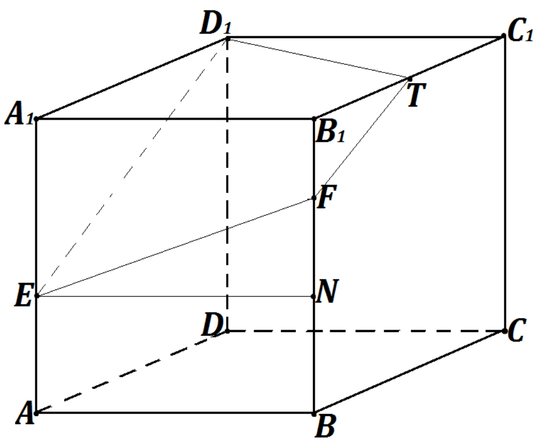
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

.

Решение:

а)



$A_1E:EA = 1:2$ и $AA_1 = 6$

=>

$A_1E = 2$

$EA = 4$

$B_1F:FB = 1:5$ и $BB_1 = 6$

=>

$B_1F = 1$

$FB = 5$

T – середина B_1C_1

=>

$B_1T = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

=>

$\triangle B_1FT$ – равнобедренный

Построим сечение:

Построим прямую EF, т.к. точки E и F лежат в одной плоскости

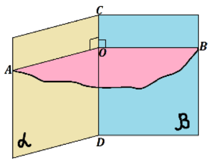
Построим прямую FT, т.к. точки F и T лежат в одной плоскости

Построим такую прямую через точку E, чтобы она была параллельна FT и т.к. $\triangle A_1D_1E \sim \triangle B_1FT$ (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними), то плоскость EFT проходит через вершину D_1

■

б)

Схема нахождения угла между плоскостями



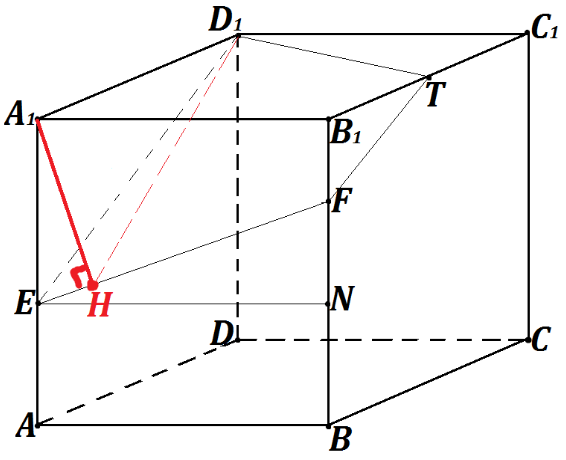
1) Ищем прямую пересечения плоскостей (на рисунке это CD)

2) На этой прямой ставим точку (на рисунке это точка O)

3) Проводим из этой точки два перпендикуляра в каждой из плоскостей (на рисунке $OA \perp CD$ в плоскости α и $OB \perp CD$ в плоскости β)

4) Угол между этими перпендикулярами – искомый угол между плоскостями (на рисунке $\angle AOB$ – угол между плоскостями α и β)

Плоскости пересекаются по прямой EF



Из точки A_1 опустим перпендикуляр A_1H на прямую EF

D_1H – проекция A_1H на плоскость EFT

=>

$\angle A_1HD_1$ – искомый угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1

Найдём A_1H:

Пусть EN – прямая, параллельная AB, тогда:

$EN = 2$ и $FN = BF - EA = 5 - 4 = 1$

$EF = \sqrt{EN^2 + FN^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ (по теореме Пифагора)

Найдём площадь треугольники A_1EF двумя способами:

$$S_\Delta A_1EF = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot A_1H = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot A_1H$$

$$S_\Delta A_1EF = S_{A_1B_1FE} - S_{A_1B_1F}$$

$$S_{A_1B_1FE} = \frac{B_1F + A_1E}{2} \cdot AB = \frac{1+2}{2} \cdot 2 = 3$$

$$S_{A_1B_1F} = \frac{A_1B_1 \cdot B_1F}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$S_\Delta A_1EF = S_{A_1B_1FE} - S_{A_1B_1F} = 3 - 1 = 2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot A_1H = 2$$

$$A_1H = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg} \angle A_1HD_1 = \frac{A_1D_1}{A_1H} = \frac{6}{\frac{4}{\sqrt{5}}} = 1{,}5\sqrt{5}$$

$$\angle A_1HD_1 = \operatorname{arctg} 1{,}5\sqrt{5}$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 1{,}5\sqrt{5}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\log_{16}(x+5) + \log_{(x^2+10x+25)} 2 \geq \frac{3}{4}.$$

.

Решение:

ОДЗ:

1.

$x+5>0$

$x>-5$

2.

$x^2+10x+25>0$

$(x+5)^2>0$

$x\neq -5$

3.

$x^2+10x+25\neq 1$

$x^2+10x+24\neq 0$

$D=10^2-4\cdot 1\cdot 24=4$

$x_1=\dfrac{-10+2}{2}\neq -4$

$x_2=\dfrac{-10-2}{2}\neq -6$

$$\log_{2^4}(x+5)+\log_{(x+5)^2}2\geq\frac{3}{4}$$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m = m\cdot\log_a b$

Свойство логарифмов

$\log_{a^n} b=\dfrac{1}{n}\cdot\log_a b$

$$\frac{1}{4}\cdot\log_2(x+5)+\frac{1}{2}\cdot\log_{(x+5)}2\geq\frac{3}{4}$$

Свойство логарифмов

$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

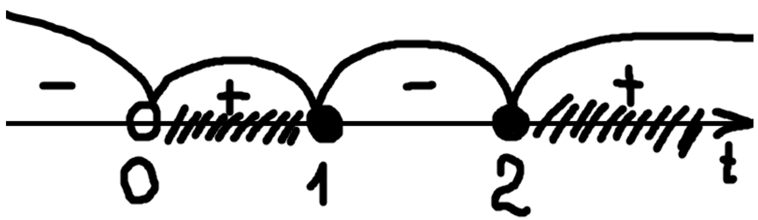
$$\frac{1}{4}\cdot\log_2(x+5)+\frac{1}{2\log_2(x+5)}\geq\frac{3}{4}$$

Пусть $\log_2(x+5)=t$

$$\frac{t}{4}+\frac{1}{2t}-\frac{3}{4}\geq 0$$

$$\frac{t^2-3t+2}{4t}\geq 0$$

$t^2-3t+2=0$ $D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1$ $t_1=\dfrac{3+1}{2}=2$ $t_2=\dfrac{3-1}{2}=1$	$4t\neq 0$ $t\neq 0$



$0<t\leq 1$ $0<\log_2(x+5)\leq 1$ $\log_2 1<\log_2(x+5)\leq\log_2 2$ $1<x+5\leq 2$ $-4<x\leq -3$	$t\geq 2$ $\log_2(x+5)\geq 2$ $\log_2(x+5)\geq\log_2 4$ $x+5\geq 4$ $x\geq -1$

Ответ: $(-4;-3]\cup[-1;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

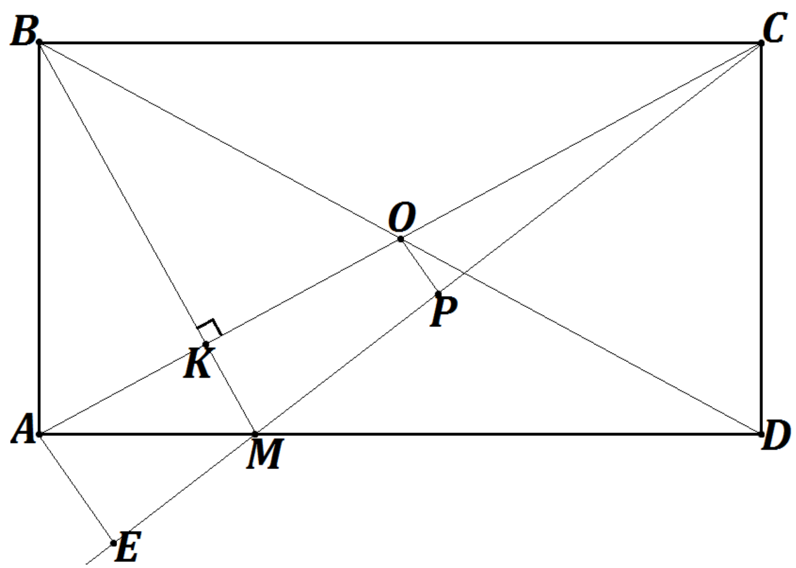
а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30°$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

.

Решение:

а)



$BM = DM$

$\angle DBC = \angle MDB$

(т.к. это накрест лежащие углы при параллельных прямых)

$\angle MBD = \angle MDB$

(т.к. $\triangle\ MBD$ – равнобедренный)

Пусть

$\angle DBC = \alpha = \angle MDB = \angle MBD$

$AC \cap BD = O$

$\angle OAD = \angle ADO = \alpha$

(т.к. $\triangle\ AOD$ – равнобедренный по свойству прямоугольника)

$\angle BAC = \angle BAD - \angle OAD = 90 - \alpha$

Пусть

$BM \cap AC = K$

$\angle AKB = 90°$

$\angle ABK = 180 - \angle AKB - \angle BAC = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$

(по теореме о сумме углов треугольника)

=>

$\angle ABC = 90°$

$\angle DBC = \alpha$

$\angle MBD = \alpha$

$\angle ABM = \alpha$

=>

$\angle ABM = \angle DBC = \angle MBD = 90:3 = 30°$

■

б)

Пусть

P – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую CM

OP–?

Пусть

AE – высота в $\triangle ACM$

$AE \perp CM$

$OP \perp CM$

=>

$AE \parallel OP$

O – середина AC

(т.к. диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам)

=>

OP – средняя линия $\triangle ACE$

=>

$OP = \frac{1}{2} \cdot AE$

Найдём AE как высоту в $\triangle ACM$ через формулы площади этого треугольника

$\frac{1}{2} \cdot CM \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AM \cdot \sin \angle CAM$

Найдём как можно больше элементов равенства:

Из $\triangle BCD$:

$\operatorname{tg} \angle CBD = \frac{CD}{BC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CD}{9}$

$CD = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

Из $\triangle ABM$:

$\operatorname{tg} \angle ABM = \frac{AM}{AB}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AM}{3\sqrt{3}}$

$AM = 3$

$DM = BC - AM = 9 - 3 = 6$

$CM = \sqrt{CD^2 + DM^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ (по теореме Пифагора)

$\angle CAM = \alpha$

$\sin \angle CAM = \sin 30° = \frac{1}{2}$

Подставляем полученные значения:

$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{7} \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$

$3\sqrt{7} \cdot AE = 9\sqrt{3}$

$$AE = \frac{3\sqrt{7}}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{9}$$

=>

$$OP = \frac{1}{2} \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{9} = \frac{\sqrt{21}}{18}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{18}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

.

Решение:

Пусть x тыс. – сумма кредита

1000 тыс. – общая сумма выплат

Составим таблицу:

Месяц	Долг на начало месяца	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	x	$\frac{x}{24}$	$\frac{2}{100} \cdot x$
2	$\frac{23x}{24}$	$\frac{x}{24}$	$\frac{2}{100} \cdot \frac{23x}{24}$
…			
24	$\frac{x}{24}$	$\frac{x}{24}$	$\frac{2}{100} \cdot \frac{x}{24}$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{ОСВ} = 24 \cdot \frac{x}{24} + \frac{\frac{2}{100} \cdot x + \frac{2}{100} \cdot \frac{x}{24}}{2} \cdot 24 = 1000$$

$$x + \frac{2x}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{24}\right) \cdot 12 = 1000$$

$$x + \frac{2x}{100} \cdot \frac{25}{24} \cdot 12 = 1000$$

$$x + \frac{x}{100} \cdot 25 = 1000$$

$1{,}25x = 1000$

$x = 800$ тыс.

Ответ: 800 тыс.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству

$$5|x-2| + 2|x+a| \le \sqrt{25 - y^2} - 3.$$

.

Решение:

Пусть
$f(x) = 5|x-2| + 2|x+a|$
$g(y) = \sqrt{25 - y^2} - 3$

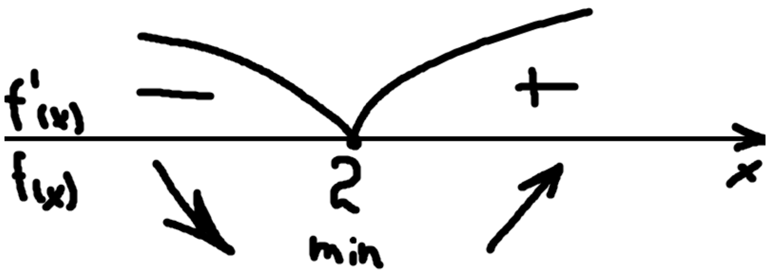
=>
$f(x) \le g(y)$

Исследуем функцию $f(x)$ на возрастание/убывание
$f(x) = 5|x-2| + 2|x+a|$

Если $x \ge 2$
$f(x) = 5x - 10 \pm 2(x+a)$
$f(x) = \pm 2x + 5x - 10 \pm 2a$
=>
$k = 7$ или $k = 3$
=>
$f(x)$ возрастает при $x \ge 2$

Если $x < 2$
$f(x) = -5x + 10 \pm 2(x+a)$
$f(x) = \pm 2x - 5x + 10 \pm 2a$
=>
$k = -7$ или $k = -3$
=>
$f(x)$ убывает при $x < 2$

=>



$f(2) = 5|2-2| + 2|2+a|$

$f(2) = 2|2+a|$ – наименьшее значение функции

Исследуем функцию $g(y)$ на предмет чётности и возрастание/убывание

$g(-y) = \sqrt{25-(-y)^2} - 3 = \sqrt{25-y^2} - 3$

=>

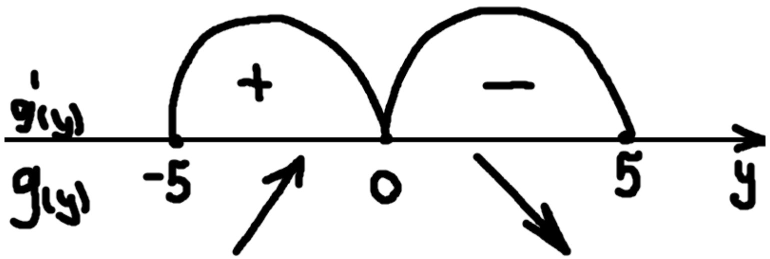
$g(y)$ – чётная

$g'(y) = \dfrac{-2y}{2\sqrt{25-y^2}} = \dfrac{-y}{\sqrt{25-y^2}}$

$\dfrac{-y}{\sqrt{25-y^2}} = 0$

$-y = 0$

$y = 0$



=>

$y = 0$ – это точка максимума

=>

$g(y)$ принимает наибольшее значение в этой точке

$g(0) = \sqrt{25-0^2} - 3$

$g(0) = 2$ – наибольшее значение функции

Итак, вернёмся к исходному неравенству:

$f(x) \le g(y)$

$2|2+a| \le f(x)$

(т.к. $2|2+a|$ – наименьшее значение функции $f(x)$)

$g(y) \le 2$

(т.к. 2 – наибольшее значение функции $g(y)$)

=>

$2|2+a| \le f(x) \le g(y) \le 2$

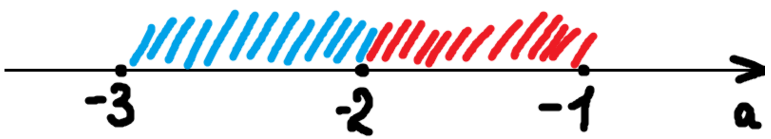
=>

$2|2+a| \le 2$

$|2+a| \le 1$

Получаем совокупность систем

Если $a \ge -2$ $\begin{cases} a \ge -2 \\ 2+a \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -2 \\ a \le -1 \end{cases}$ => $-2 \le a \le -1$	Если $a < -2$ $\begin{cases} a < -2 \\ -2-a \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a < -2 \\ a \ge -3 \end{cases}$ => $-3 \le a < -2$



Ответ: $a \in [-3; -1]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 19$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 25$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 27$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1800$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1800$. Найдите количество возможных решений числа a.

.

Решение:

а)

Запишем два уравнения в систему:

$$-\begin{cases} a + b + c + d = 19 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 25 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 6$$

$$(a^2 - b^2) + (c^2 - d^2) - (a + b) - (c + d) = 6$$

$$(a - b)(a + b) + (c - d)(c + d) - (a + b) - (c + d) = 6$$

$$(a + b)(a - b - 1) + (c + d)(c - d - 1) = 6$$

Выражения $(a - b - 1)$ и $(c - d - 1)$ не могут быть отрицательными, т.к. если бы они могли быть отрицательными, то a было бы равно b или a было бы меньше b, что противоречит условию

=>

$(a - b - 1) \geq 0$

$(c - d - 1) \geq 0$

Вернёмся к первому уравнению системы:

$(a + b) + (c + d) = 19$

$(a + b) \cdot 1 + (c + d) \cdot 1 = 19$

Теперь рассмотрим данное уравнение:

$(a + b)(a - b - 1) + (c + d)(c - d - 1) = 6$

Очевидно, что одно из выражений $(a - b - 1)$ и $(c - d - 1)$ равно нулю

=>

$a - b - 1 = 0$	$c - d - 1 = 0$
$a = b + 1$	$c = d + 1$

Тогда

$(c+d)(c-d-1)=6$

Произведение каких натуральных чисел может дать 6?

$\boxed{1}$ 6 и 1

$\begin{cases} c+d=6 \\ c-d-1=1 \end{cases}$

$\begin{cases} c+d=6 \\ c=d+2 \end{cases}$

$\begin{cases} d+2+d=6 \\ c=d+2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2d=4 \\ c=d+2 \end{cases}$

$\begin{cases} d=2 \\ c=4 \end{cases}$

Подставим в уравнение:

$(a+b)+(c+d)=19$

$(a+b)+6=19$

$a+b=13$

$a=7$

$b=6$

$c=4$

$d=2$

Подходящий пример найден, но разберём оставшиеся варианты

$\boxed{2}$ 3 и 2

$\begin{cases} c+d=3 \\ c-d-1=2 \end{cases}$

$\begin{cases} c+d=3 \\ c=d+3 \end{cases}$

$\begin{cases} d+3+d=3 \\ c=d+3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2d=0 \\ c=d+3 \end{cases}$

$\begin{cases} d=0 \\ c=3 \end{cases}$

=>

$c+d\neq 3$

Т.к. c и d натуральные числа

Тогда

$(a+b)(a-b-1)=6$

Произведение каких натуральных чисел может дать 6?

$\boxed{1}$ 6 и 1

$\begin{cases} a+b=6 \\ a-b-1=1 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=6 \\ a=b+2 \end{cases}$

$\begin{cases} b+2+b=6 \\ a=b+2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2b=4 \\ a=b+2 \end{cases}$

$\begin{cases} b=2 \\ a=4 \end{cases}$

=>

$a+b=6$

Но $a+b$ это сумма больших из четырёх слагаемых 19-ти

=>

$a+b\neq 6$

Т.к. $a+b>9{,}5$

$\boxed{2}$ 3 и 2

$\begin{cases} a+b=3 \\ a-b-1=2 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=3 \\ a=b+3 \end{cases}$

$\begin{cases} b+3+b=3 \\ a=b+3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2b=0 \\ a=b+3 \end{cases}$

$\begin{cases} b=0 \\ a=3 \end{cases}$

=>

$a+b\neq 3$

Т.к. a и b натуральные числа

б)

Запишем два уравнения в систему:

$-\begin{cases} a+b+c+d=27 \\ a^2-b^2+c^2-d^2=27 \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения первое

$a^2-b^2+c^2-d^2-a-b-c-d=0$

$(a^2-b^2)+(c^2-d^2)-(a+b)-(c+d)=0$

$(a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)-(a+b)-(c+d)=0$

$(a+b)(a-b-1)+(c+d)(c-d-1)=0$

Мы знаем, что

$(a+b)\neq 0$

$(c+d)\neq 0$

=>

Выражения $(a-b-1)$ и $(c-d-1)$ должны быть равны нуля одновременно

$$\begin{cases} a-b-1=0 \\ c-d-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+1 \\ c=d+1 \end{cases}$$

Подставим полученные выражения a и c в первое уравнение системы

$a+b+c+d=27$

$b+1+b+d+1+d=27$

$2b+2d=25 \quad |:2$

$b+d=12{,}5$

Т.к. b и d натуральные числа

=>

Не может

в)

Запишем два уравнения в систему:

$$-\begin{cases} a+b+c+d=1800 \\ a^2-b^2+c^2-d^2=1800 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое

$$a^2-b^2+c^2-d^2-a-b-c-d=0$$

$$(a^2-b^2)+(c^2-d^2)-(a+b)-(c+d)=0$$

$$(a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)-(a+b)-(c+d)=0$$

$$(a+b)(a-b-1)+(c+d)(c-d-1)=0$$

Мы знаем, что

$(a+b)\neq 0$

$(c+d)\neq 0$

=>

Выражения $(a-b-1)$ и $(c-d-1)$ должны быть равны нуля одновременно

$$\begin{cases} a-b-1=0 \\ c-d-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+1 \\ c=d+1 \end{cases}$$

Подставим полученные выражения a и c в первое уравнение системы

$a+b+c+d=1800$

$b+1+b+d+1+d=1800$

$2b+2d=1798 \quad |:2$

$b+d=899$

=>

Из уравнения $a+b+c+d=1800$:

$a+c=901$

$c=901-a$

Из уравнения $c=d+1$:

$d=c-1=901-a-1=900-a$

Из уравнения $a=b+1$:

$b=a-1$

Получаем четвёрку чисел:

$(a;b;c;d)$

$(a;a-1;901-a;900-a)$

Из условия $a > b > c > d$ следует, что:

$$\begin{cases} a > b \\ b > c \\ c > d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > a - 1 \\ a - 1 > 901 - a \\ 901 - a > 900 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot a > -1 \\ 2a > 902 \\ 0 \cdot a > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - \text{любое} \\ a > 451 \\ a - \text{любое} \end{cases}$$

=>

$a > 451$

=>

$a \geq 452$

Из условия натуральности a, b, c и d следует, что

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 1 \\ c \geq 1 \\ d \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ a - 1 \geq 1 \\ 901 - a \geq 1 \\ 900 - a \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ a \geq 2 \\ a \leq 900 \\ a \leq 899 \end{cases}$$

Итак

$452 \leq a \leq 899$

452 453 ... 499 (99-51 = 48 чисел)
500 501 ... 599 (100 чисел)
600 601 ... 699 (100 чисел)
700 701 ... 799 (100 чисел)
800 801 ... 899 (100 чисел)

=>

a может принимать 448 значений

Ответ: а) $a = 7$, $b = 6$, $c = 4$ и $d = 2$, б) нет, в) 448

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4