Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

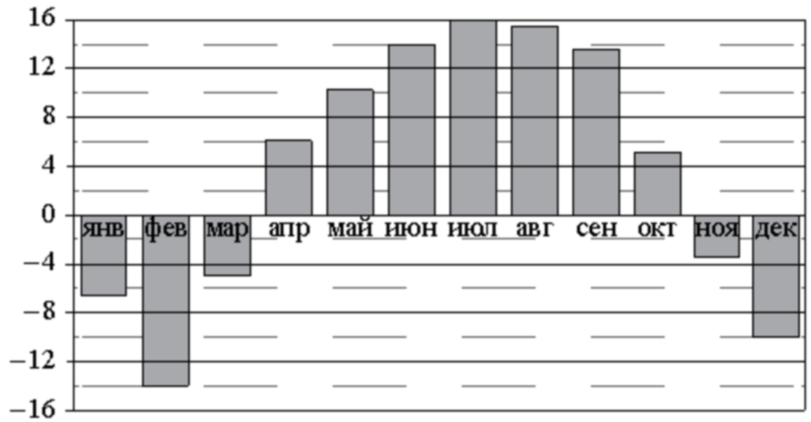
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 35 литров бензина по цене 25 руб. 40 коп. за литр. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?

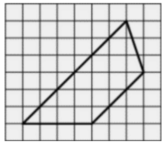
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в первой половине 1994 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________________.

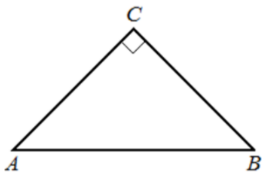
4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5 или 6.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения
$(6x-13)^2=(6x-11)^2$.

Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=10$, $AC=\sqrt{51}$. Найдите $\sin A$.

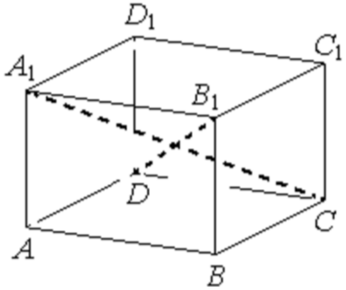


Ответ: ____________________________.

7 Прямая $y=-3x-5$ является касательной к графику функции $y=x^2+7x+c$. Найдите c.

Ответ: ____________________________.

8 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1=2AD$. Найдите угол между диагоналями DB_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ____________________________.

9 Найдите
$\cos\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{7}{25}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

Ответ: ____________________________.

10 Наблюдатель находится на высоте h (в км). Расстояние l (в км) от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ км – радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 96 км? Ответ дайте в км.

Ответ: ____________________________.

11 Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 200 км – со скоростью 100 км/ч, а затем 160 км – со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171120

12 Найдите наименьшее значение функции
$y = 43x - 43\operatorname{tg} x - 35$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$\sin 2x + 2\sin x = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

15 Решите неравенство
$$\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24 - \log_3 x^8}{\log_3^2 x - 16}.$$

16 Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 3 : 4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ — острый.

а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$
имеет единственный корень.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171120

19 В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.
б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора Трижды победитель олимпиады по высшей математике среди всех студентов Тольяттинского государственного университета
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	111
2	14
3	18
4	0,25
5	2
6	0,7
7	20
8	60
9	0,96
10	0,72
11	90
12	-35
13	а) $\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z.$ б) $-3\pi;\ -\frac{5\pi}{3}$
14	$\frac{1075}{9}$
15	$\left(0; \frac{1}{81}\right) \cup \left\{\frac{1}{9}\right\} \cup (81; +\infty)$
16	392
17	11 млн
18	$\left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$
19	а) $1\quad 2\quad 3\quad 0\quad 5\quad -2\quad 7\quad \ldots\quad 231\quad -228\quad 233\quad -230\quad 235$ б) нет, в) 23

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$\sin 2x + 2\sin x = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

.

Решение:
а)

Синус двойного угла
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$2\sin x\cdot\cos x + 2\sin x = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$
$2\sin x\cdot(\cos x + 1) = \sqrt{3}\cdot(\cos x + 1)$
$2\sin x\cdot(\cos x + 1) - \sqrt{3}\cdot(\cos x + 1) = 0$
$(\cos x + 1)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$\cos x + 1 = 0$ $\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi n;\ n \in Z$	$2\sin x - \sqrt{3} = 0$ $2\sin x = \sqrt{3}$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)
Подберём корни для $x = \pi + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -3$, то $x = \pi - 6\pi = -5\pi \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
Если $n = -2$, то $x = \pi - 4\pi = -3\pi \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
Если $n = -1$, то $x = \pi - 2\pi = -\pi \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -2$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{10\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
Если $n = -1$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-3\pi; -\frac{5\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

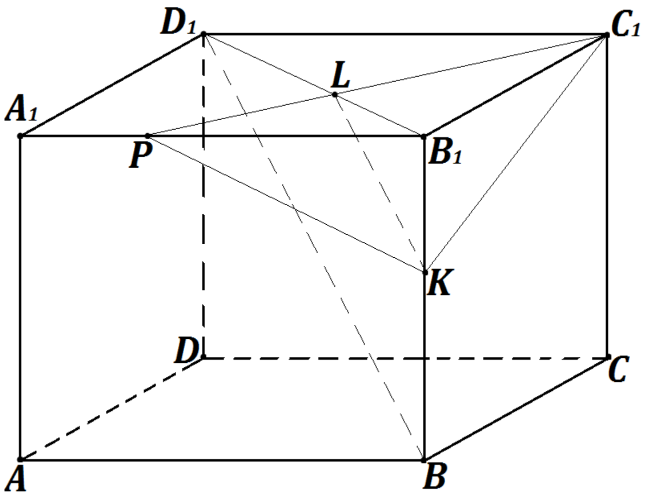
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171120

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.
.

Решение:
а)
$KB = 4$
=>
$KB_1 = BB_1 - KB = 5 - 3 = 2$

Построение плоскости α:



Построим прямую KC_1, т.к. точки K и C_1 лежат в одной плоскости
Построим вспомогательную прямую B_1D_1, которая является проекцией BD_1 на «потолок», т.е. на $(A_1B_1C_1)$
В $\triangle BB_1D_1$ построим KL такую, что $KL \parallel BD_1$
Построим C_1L, т.к. точки C_1 и L лежат в одной плоскости
Продлим C_1L до пересечения с ребром A_1B_1 в точке P
Построим прямую PK, т.к. точки P и K лежат в одной плоскости
=> $\triangle C_1PK$ – сечение куба плоскостью α

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках B_1KL и BB_1D_1
$$\frac{B_1K}{BB_1} = \frac{B_1L}{B_1D_1}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{B_1L}{B_1D_1}$$
Пусть
$B_1L = 2x$
$B_1D_1 = 5x$
=> $D_1L = B_1D_1 - B_1L = 5x - 2x = 3x$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках PB_1L и C_1D_1L
$$\frac{B_1L}{D_1L} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$
$$\frac{2x}{3x} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$
Пусть
$B_1P = 2y$
$C_1D_1 = 3y$
=> $A_1P = C_1D_1 - B_1P = 3y - 2y = y$

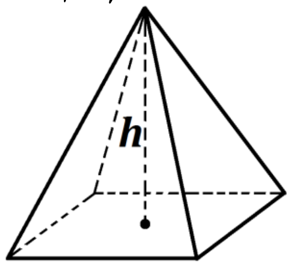
$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{y}{2y}$$
$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{1}{2}$$
■

б)
$$PB_1 = \frac{2}{3} \cdot A_1B_1 = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$$

$$V_{\text{искомой части куба}} = V_{\text{куба}} - V_{PB_1C_1K}$$

$$V_{\text{куба}} = 5^3 = 125$$

Объём пирамиды



$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$

$V_{PB_1C_1K} = \frac{1}{3} \cdot S_{PB_1C_1} \cdot B_1K = \frac{1}{3} \cdot \frac{PB_1 \cdot B_1C_1}{2} \cdot B_1K =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{10}{3} \cdot 5}{2} \cdot 2 = \frac{50}{9}$

$V_{\text{искомой части куба}} = 125 - \frac{50}{9} = \frac{1125 - 50}{9} = \frac{1075}{9}$

Ответ: б) $\frac{1075}{9}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24 - \log_3 x^8}{\log_3^2 x - 16}.$$

.

Решение:

ОДЗ:
1.
$81x > 0$
$x > 0$

2.
$\log_3 x - 4 \neq 0$
$\log_3 x \neq 4$
$\log_3 x \neq \log_3 81$
$x \neq 81$

3.
$\log_3(81x) \neq 0$
$\log_3(81x) \neq \log_3 1$
$81x \neq 1$
$x \neq \frac{1}{81}$

4.
$\log_3^2 x - 16 \neq 0$
$\log_3^2 x \neq 16$
$\log_3 x \neq \pm 4$
$x \neq \frac{1}{81}$
$x \neq 81$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

$$\frac{\log_3 81 + \log_3 x}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3 81 + \log_3 x} \geq \frac{24 - 8\log_3 x}{\log_3^2 x - 16}$$

$$\frac{4 + \log_3 x}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{4 + \log_3 x} \geq \frac{24 - 8\log_3 x}{\log_3^2 x - 16}$$

Пусть $\log_3 x = t$

$$\frac{t+4}{t-4}+\frac{t-4}{t+4}\geq\frac{24-8t}{t^2-16}$$

$$\frac{t^2+8t+16+t^2-8t+16}{t^2-16}\geq\frac{24-8t}{t^2-16}$$

$$\frac{2t^2+32}{t^2-16}\geq\frac{24-8t}{t^2-16}\qquad\Big|:2$$

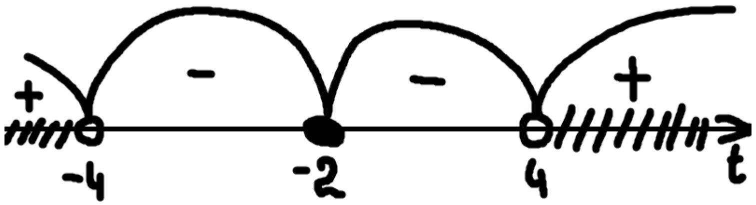
$$\frac{t^2+16}{t^2-16}\geq\frac{12-4t}{t^2-16}$$

$$\frac{t^2+16}{t^2-16}-\frac{12-4t}{t^2-16}\geq 0$$

$$\frac{t^2+16-12+4t}{t^2-16}\geq 0$$

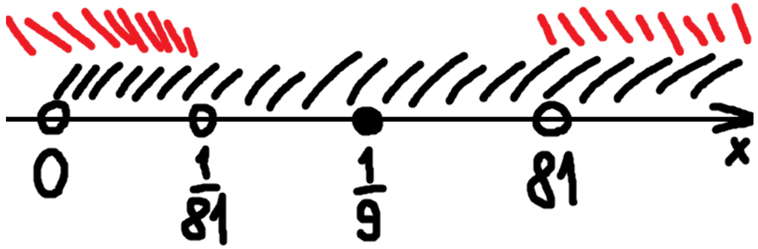
$$\frac{t^2+4t+4}{t^2-16}\geq 0$$

$$\frac{(t+2)^2}{t^2-16}\geq 0$$



$t<-4$ $\log_3 x<-4$ $\log_3 x<\log_3\frac{1}{81}$ $x<\frac{1}{81}$	$t=-2$ $\log_3 x=-2$ $\log_3 x=\log_3\frac{1}{9}$ $x=\frac{1}{9}$	$t>4$ $\log_3 x>4$ $\log_3 x>\log_3 81$ $x>81$

Объединим все корни и промежутки с ОДЗ:



Ответ: $\left(0;\frac{1}{81}\right)\cup\left\{\frac{1}{9}\right\}\cup(81;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB=CQ:QB=CW:WD=3:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ=16$, $QW=12$, угол PWQ – острый.

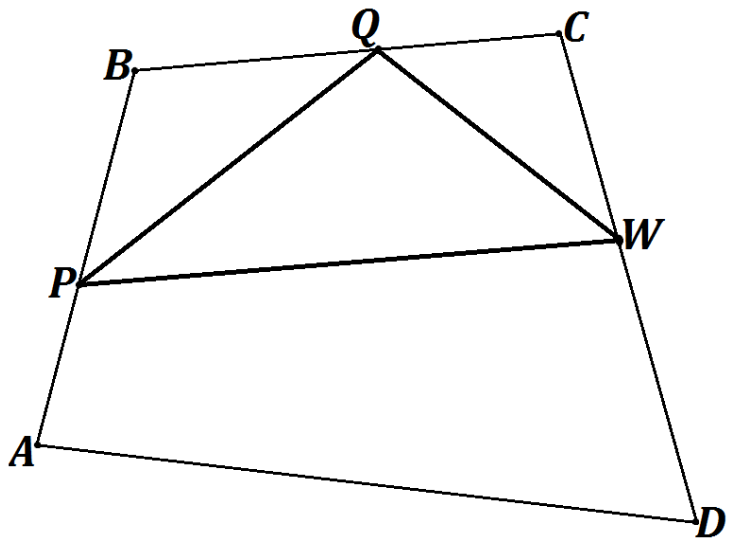
а) Докажите, что треугольник PQW – прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

.

Решение:

а)



По теореме синусов из $\triangle PQW$:

$$\frac{PQ}{\sin\angle W} = 2R$$

$$\frac{16}{\sin\angle W} = 20$$

$$\sin\angle W = \frac{4}{5}$$

$$\cos\angle W = \sqrt{1-\sin^2\angle W} = \frac{3}{5}$$

По теореме косинусов из $\triangle PQW$:

$$PQ^2 = QW^2 + PW^2 - 2\cdot QW\cdot PW\cdot\cos\angle W$$

$$16^2 = 12^2 + PW^2 - 2\cdot 12\cdot PW\cdot\frac{3}{5}$$

$$PW^2 - \frac{72}{5}\cdot PW - 112 = 0 \qquad \Big|\cdot 5$$

$$5PW^2 - 72PW - 560 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5184 + 11200 = 16384 = 128^2$$

$$PW = \frac{72+128}{10} = 20$$

$$PW = \frac{72-128}{10} = -5{,}6$$

(посторонний корень)

Заметим, что в $\triangle PQW$ выполняется теорема Пифагора:

$PW^2 = PQ^2 + QW^2$

$20^2 = 16^2 + 12^2$

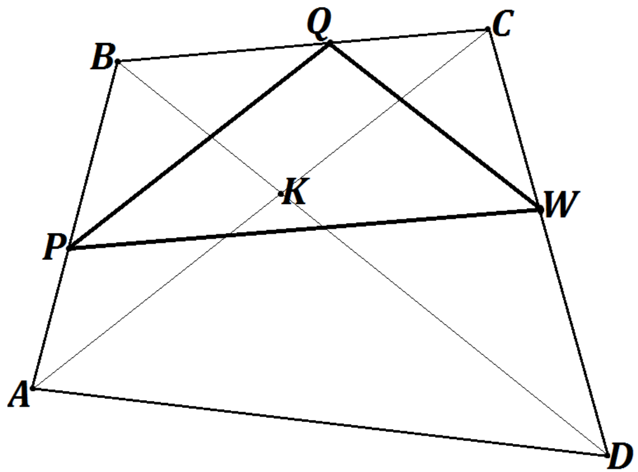
$400 = 256 + 144$

$400 = 400$

=> $\triangle PQW$ − прямоугольный

■

б)



Построим диагонали четырёхугольника

Пусть

$AC \cap BD = K$

$AP = 3a$

$BP = 4a$

$CQ = 3b$

$BQ = 4b$

$CW = 3c$

$DW = 4c$

$\triangle CQW \sim \triangle BCD$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

$$\frac{CQ}{BC} = \frac{QW}{BD}$$

$$\frac{3b}{7b} = \frac{12}{BD}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{BD}$$

$BD = 28$

$\triangle BPQ \sim \triangle ABC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

$$\frac{BP}{AB} = \frac{PQ}{AC}$$

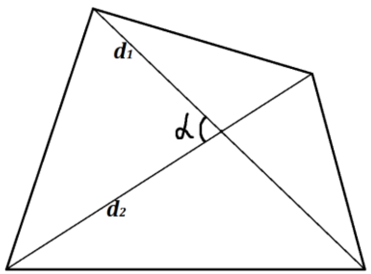
$$\frac{4a}{7a} = \frac{16}{AC}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{16}{AC}$$

$AC = 28$

$\angle AKD = \angle PQW = 90°$
(т.к. это соответственные углы при параллельных прямых)

Площадь произвольного четырёхугольника



$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$S = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin 90°}{2} = \frac{28 \cdot 28}{2} = 392$$

Ответ: 392

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Решение:

Пусть

1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot S = 1{,}25\cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}7\cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}25\cdot S - 0{,}7\cdot S = 0{,}55\cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}25\cdot 0{,}7\cdot S = 0{,}875\cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}4\cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}875\cdot S - 0{,}4\cdot S = 0{,}475\cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}25\cdot 0{,}4\cdot S = 0{,}5\cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	0

=>

01.04.2019	$0{,}5\cdot S - 0 = 0{,}5\cdot S$

По условию, каждая из выплат должна быть больше 5 млн рублей, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}55\cdot S > 5 \\ 0{,}475\cdot S > 5 \\ 0{,}5\cdot S > 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > \frac{500}{55} \\ S > \frac{5000}{475} \\ S > \frac{50}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > \frac{100}{11} \\ S > \frac{200}{19} \\ S > 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > 9\frac{1}{11} \\ S > 10\frac{10}{19} \\ S > 10 \end{cases}$$

Требуется найти наименьшее подходящее целое S
=>
$S = 11$

Ответ: 11 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ	2

Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$
имеет единственный корень.

Решение:

$\sqrt{-7 - 8x - x^2} = -ax + 2a + 3$

Решим графически:

$y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$
$y = \sqrt{-x^2 - 8x - 16 + 16 - 7}$
$y = \sqrt{(-x^2 - 8x - 16) + 9}$
$y = \sqrt{-(x^2 + 8x + 16) + 9}$
$y = \sqrt{3^2 - (x + 4)^2}$

Заметим, что если возвести данное уравнение в квадрат, то получится уравнение окружности:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 3^2 - (x+4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ (x+4)^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

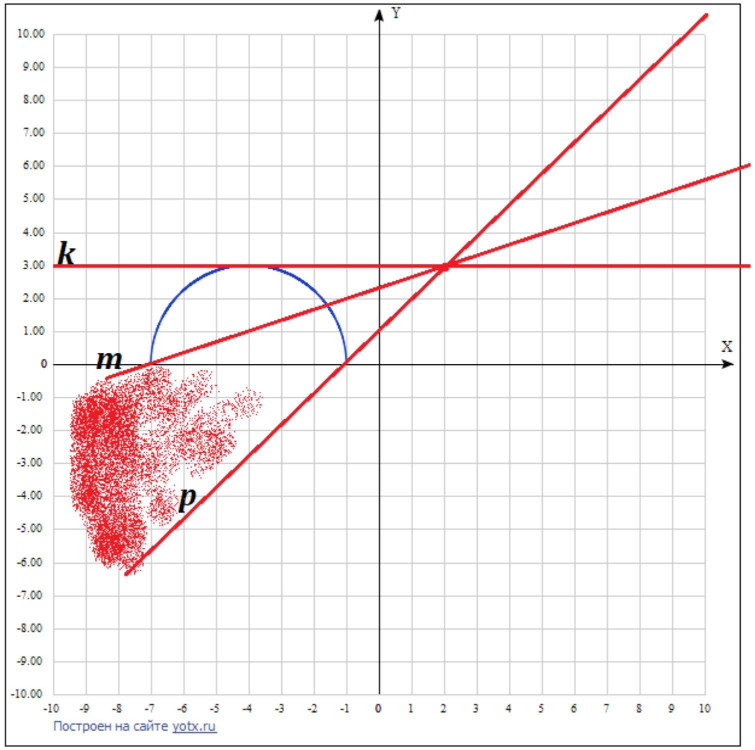
=>
Графиком левой части уравнения является полуокружность с центром $(-4; 0)$ и радиусом 3

Рассмотрим правую часть уравнения:
$y = -ax + 2a + 3$
$y = -a(x - 2) + 3$

=>
Графиком правой части уравнения является пучок прямых, проходящих через точку $(2; 3)$

Пусть
k – прямая, проходящая через точку $(2; 3)$, и касающаяся полуокружности
m – прямая, проходящая через точку $(2; 3)$ и точку «левого основания» полуокружности
p – прямая, проходящая через точку $(2; 3)$ и точку «правого основания» полуокружности

Проведём прямые k и m и p:



Найдём значение параметра a, соответствующее прямой k
$y = -ax + 2a + 3$ проходит через т. $(-4; 3)$
$3 = 4a + 2a + 3$
$0 = 2a$
$a = 0$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = -ax + 2a + 3$ проходит через т. $(-7; 0)$
$0 = 7a + 2a + 3$
$-3 = 9a$
$a = -\frac{1}{3}$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = -ax + 2a + 3$ проходит через т. $(-1; 0)$
$0 = a + 2a + 3$
$-3 = 3a$
$a = -1$

Итак,
Если $a > 0$, то пересечений нет
Если $a = 0$, то 1 пересечение
Если $-\frac{1}{3} < a < 0$, то 2 пересечения
Если $a = -\frac{1}{3}$, то 2 пересечения
Если $-1 < a < -\frac{1}{3}$, то 1 пересечение
Если $a = -1$, то 1 пересечение
Если $a < -1$, то пересечений нет

Ответ: $a \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.
б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?
.

Решение:

а)
Если сумма двух соседних членов последовательности равна 3, потом 5, потом снова 3, потом снова 5 и т.д.:
$1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad -2 \quad 7 \quad \dots$
=>
В такой последовательности числа, стоящие на нечётных позициях, увеличиваются на 2
=>
Очевидно, что таким способом мы дойдём до $a_n = 235$
$1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad -2 \quad 7 \quad \dots \quad 231 \quad -228 \quad 233 \quad -230 \quad 235$

б)
Заметим, что в приведённой в предыдущем пункте последовательности на нечётных позициях стоят нечётные числа, а на чётных – чётные

Первое число – нечётное, и сумма двух чисел – число нечётное (по условию 3, 5 или 25)
=>
В данной последовательности всегда на нечётных позициях стоят нечётные числа, а на чётных – чётные
=>
a_{1000} должно быть чётным, но последнее число последовательности – это 235
=>
Не может

в)
Наименьшее число членов последовательности будет достигаться при наибольшем увеличении значений последовательности, т.е. если:

Уменьшение числа (по модулю) идёт на 3 (начиная с третьего)

Увеличение числа (по модулю) идёт на 25

$1 \quad 2 \quad 23 \quad -20 \quad 45 \quad -42 \quad 67 \quad \ldots$

Нечётные числа при таком раскладе увеличиваются на 22, поэтому:
$a_1 = 1$
$a_3 = 23$
$a_5 = 45$
$a_7 = 67$
$a_9 = 89$
$a_{11} = 111$
$a_{13} = 133$
$a_{15} = 155$
$a_{17} = 177$
$a_{19} = 199$
$a_{21} = 221$
$a_{23} = 243$ (на 8 больше, чем нужно)
=>
Заменим четыре уменьшения числа (по модулю) на 3
на четыре уменьшения числа (по модулю) на 5, например, самые первые четыре, получаем последовательность из 23 членов:

$1 \quad 4 \quad 21 \quad -16 \quad 41 \quad -36 \quad 61 \quad -56 \quad 81 \quad -78 \quad 103 \quad -100$
$125 \quad -122 \quad 147 \quad -144 \quad 169 \quad -166 \quad 191 \quad -188 \quad 213$
$-210 \quad 235$

Ответ: а) привели, б) нет, в) 23

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171120