

Диагностическая работа
по подготовке к ОГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

10 февраля 2015 года
9 класс

Вариант МА90501

Район
Город (населённый пункт)
Школа
Класс
Фамилия
Имя
Отчество

Инструкция по выполнению работы

Общее время работы – 235 минут.

Характеристика работы. Всего в работе 26 заданий, из которых 20 заданий базового уровня (часть 1), 4 задания повышенного уровня (часть 2) и 2 задания высокого уровня сложности (часть 2). Работа состоит из трёх модулей: «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика».

Модуль «Алгебра» содержит 11 заданий: в части 1 – 8 заданий; в части 2 – 3 задания. Модуль «Геометрия» содержит 8 заданий: в части 1 – 5 заданий; в части 2 – 3 задания. Модуль «Реальная математика» содержит 7 заданий: все задания – в части 1.

Советы и указания по выполнению работы. Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с того модуля, задания которого вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим модулям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Все необходимые вычисления, преобразования и т. д. выполняйте в черновике. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

Для заданий с выбором ответа (2, 3, 8, 14) из четырёх предложенных вариантов выберите один верный и обведите номер выбранного ответа в тренировочной работе. Если Вы обвели не тот номер, то зачеркните обведённый номер крестиком и затем обведите номер нового ответа.

Если варианты ответа к заданию не приводятся, полученный ответ записывается в отведённом для этого месте. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную. В случае записи неверного ответа зачеркните его и запишите рядом новый.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы. При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Как оценивается работа. Баллы, полученные Вами за верно выполненные задания, суммируются. Для успешного выполнения работы Вам необходимо набрать в сумме не менее 8 баллов, из них не менее 3 баллов по модулю «Алгебра», не менее 2 баллов по модулю «Геометрия» и не менее 2 баллов по модулю «Реальная математика». За каждое правильно выполненное задание части 1 выставляется 1 балл. В каждом модуле части 2 задания расположены по нарастанию сложности и оцениваются в 2, 3 и 4 балла.

Желаем успеха!

Часть 1
Модуль «Алгебра»

1 Найдите значение выражения $(6,9 \cdot 10^{-2})(5 \cdot 10^{-3})$.

Ответ: _____.

2 На координатной прямой точками отмечены числа $\frac{7}{5}$; $\frac{6}{7}$; 0,95; 0,2.



Какому числу соответствует точка A?

- 1) 0,2 2) 0,95 3) $\frac{6}{7}$ 4) $\frac{7}{5}$

Ответ:

3 Значение какого выражения является рациональным числом?

- 1) $\frac{(\sqrt{3})^3}{2}$ 2) $3\sqrt{2^5}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ 4) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

Ответ:

4 Решите уравнение $\frac{11}{x-9} = \frac{11}{9}$.

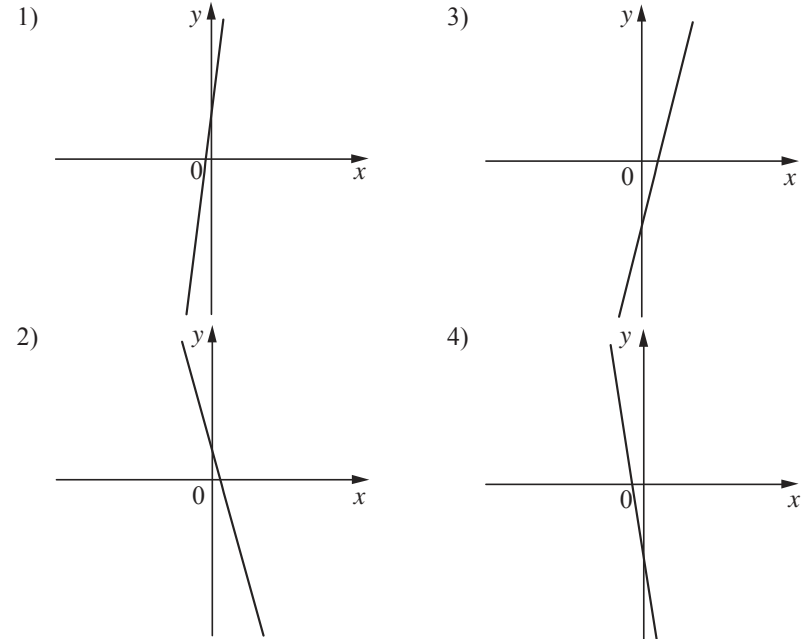
Ответ: _____.

5 На рисунке изображены графики функций вида $y=kx+b$. Установите соответствие между знаками коэффициентов k и b и графиками функций.

КОЭФФИЦИЕНТЫ

- A) $k > 0, b > 0$ Б) $k > 0, b < 0$ В) $k < 0, b > 0$

ГРАФИКИ



Ответ:

А	Б	В

6 Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии: 5; -10; 20; ... Найдите сумму первых пяти её членов.

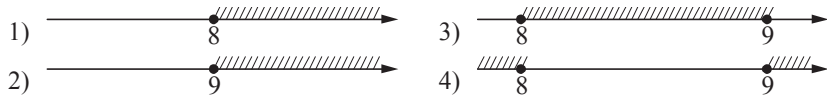
Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{21}{3a-a^2} - \frac{7}{a}$ при $a = -32$.

Ответ: _____.

8 На каком рисунке изображено множество решений неравенства

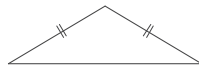
$$x^2 - 17x + 72 \geq 0?$$



Ответ:

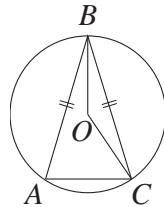
Модуль «Геометрия»

9 Периметр равнобедренного треугольника равен 36, а основание равно 16. Найдите площадь треугольника.



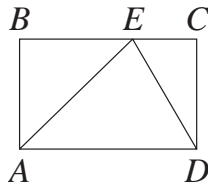
Ответ: _____.

10 Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC , в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 66^\circ$. Найдите величину угла BOC . Ответ дайте в градусах.



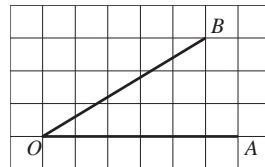
Ответ: _____.

11 На стороне BC прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 24$ и $AD = 31$, отмечена точка E так, что $\angle EAB = 45^\circ$. Найдите ED .



Ответ: _____.

12 Найдите тангенс угла AOB , изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

13 Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Все равнобедренные треугольники подобны.
- 2) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.
- 3) Сумма углов прямоугольного треугольника равна 90 градусам.

Ответ: _____.

Модуль «Реальная математика»

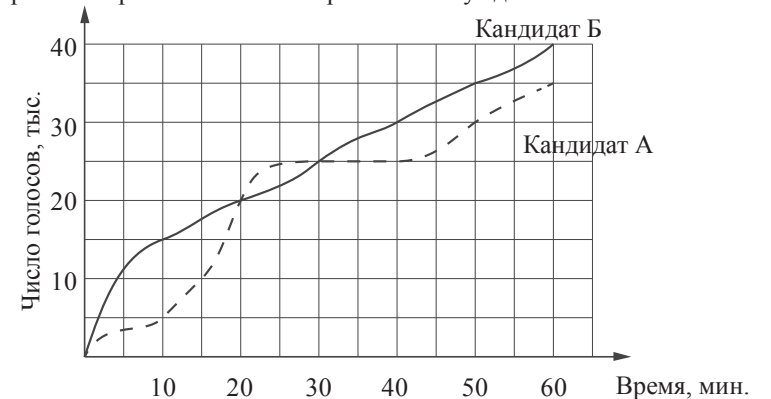
14 Куриные яйца в зависимости от их массы подразделяют на пять категорий: высшая, отборная, первая, вторая и третья. Используя данные, представленные в таблице, определите, к какой категории относится яйцо массой 35,5 г.

Категория	Масса одного яйца, не менее, г
высшая	75,0
отборная	65,0
первая	55,0
вторая	45,0
третья	35,0

- 1) отборная
- 2) первая
- 3) вторая
- 4) третья

Ответ:

15 На графиках показано, как во время телевизионных дебатов между кандидатами А и Б телезрители голосовали за каждого из них. Сколько всего тысяч телезрителей проголосовало за первые 50 минут дебатов?



Ответ: _____.

16 В начале года число абонентов телефонной компании «Юг» составляло 300 тыс. человек, а в конце года их стало 345 тыс. человек. На сколько процентов увеличилось за год число абонентов этой компании?

Ответ: _____.

17 Сколько спиц в колесе, если угол между соседними спицами равен 24° ?

Ответ: _____.

18 На диаграмме показан возрастной состав населения Греции. Определите по диаграмме, какая из возрастных категорий самая малочисленная.



- 1) 0–14 лет 2) 15–50 лет 3) 51–64 лет 4) 65 лет и более

В ответе запишите номер выбранного ответа.

Ответ: _____.

19 В таблице представлены результаты четырёх стрелков, показанные ими на тренировке.

Номер стрелка	Число выстрелов	Число попаданий
1	44	26
2	70	45
3	40	14
4	67	48

Тренер решил послать на соревнования того стрелка, у которого относительная частота попаданий выше. Кого из стрелков выберет тренер? Укажите в ответе его номер.

Ответ: _____.

20 Закон всемирного тяготения можно записать в виде $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где F — сила притяжения между телами (в ньютонах), m_1 и m_2 — массы тел (в килограммах), r — расстояние между центрами масс тел (в метрах), а γ — гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг². Пользуясь этой формулой, найдите массу тела m_1 (в килограммах), если $F = 0,00667$ Н, $m_2 = 5 \cdot 10^8$ кг, а $r = 5$ м.

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 21–26 используйте отдельный лист. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

Модуль «Алгебра»

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} 7x^2 - 5x = y, \\ 7x - 5 = y. \end{cases}$

22 Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого автомобилиста на 9 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью 60 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 40 км/ч.

23 Постройте график функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Модуль «Геометрия»

- 24 Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках M , K и P . Найдите углы треугольника ABC , если углы треугольника MKP равны 39° , 78° и 63° .
- 25 Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 и 24, $BD = 12$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
- 26 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 4$, $BC = 3$.

Диагностическая работа
по подготовке к ОГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

10 февраля 2015 года
9 класс

Вариант МА90502

Район
Город (населённый пункт)
Школа
Класс
Фамилия
Имя
Отчество

Инструкция по выполнению работы

Общее время работы – 235 минут.

Характеристика работы. Всего в работе 26 заданий, из которых 20 заданий базового уровня (часть 1), 4 задания повышенного уровня (часть 2) и 2 задания высокого уровня сложности (часть 2). Работа состоит из трёх модулей: «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика».

Модуль «Алгебра» содержит 11 заданий: в части 1 – 8 заданий; в части 2 – 3 задания. Модуль «Геометрия» содержит 8 заданий: в части 1 – 5 заданий; в части 2 – 3 задания. Модуль «Реальная математика» содержит 7 заданий: все задания – в части 1.

Советы и указания по выполнению работы. Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с того модуля, задания которого вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим модулям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Все необходимые вычисления, преобразования и т. д. выполняйте в черновике. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

Для заданий с выбором ответа (2, 3, 8, 14) из четырёх предложенных вариантов выберите один верный и обведите номер выбранного ответа в тренировочной работе. Если Вы обвели не тот номер, то зачеркните обведённый номер крестиком и затем обведите номер нового ответа.

Если варианты ответа к заданию не приводятся, полученный ответ записывается в отведённом для этого месте. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную. В случае записи неверного ответа зачеркните его и запишите рядом новый.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы. При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Как оценивается работа. Баллы, полученные Вами за верно выполненные задания, суммируются. Для успешного выполнения работы Вам необходимо набрать в сумме не менее 8 баллов, из них не менее 3 баллов по модулю «Алгебра», не менее 2 баллов по модулю «Геометрия» и не менее 2 баллов по модулю «Реальная математика». За каждое правильно выполненное задание части 1 выставляется 1 балл. В каждом модуле части 2 задания расположены по нарастанию сложности и оцениваются в 2, 3 и 4 балла.

Желаем успеха!

Часть 1
Модуль «Алгебра»

1 Найдите значение выражения $0,1 \cdot (-10)^4 + 5 \cdot (-10)^3 + 33$.

Ответ: _____.

2 Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{10}{17}$ и $\frac{5}{8}$?

- 1) 0,4 2) 0,5 3) 0,6 4) 0,7

Ответ:

3 Найдите значение выражения $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 8\sqrt{6}$.

- 1) 96 2) 576 3) 384 4) 24

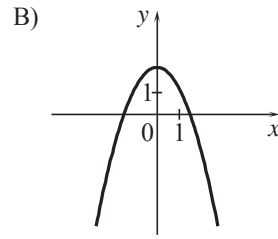
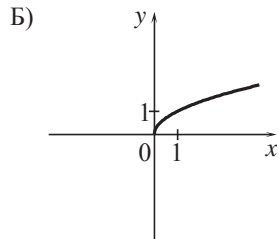
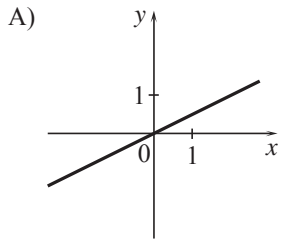
Ответ:

4 Найдите корни уравнения $6x^2 + 24x = 0$.

Ответ: _____.

5 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

- 1) $y = \frac{1}{x}$ 2) $y = \frac{1}{2}x$ 3) $y = 2 - x^2$ 4) $y = \sqrt{x}$

Ответ:

А	Б	В

6 Арифметическая прогрессия задана условиями $a_1 = -2,2$, $a_{n+1} = a_n - 1$. Найдите сумму первых 9 её членов.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{6a}{c} - \frac{36a^2 + c^2}{6ac} + \frac{c - 36a}{6a}$ при $a = 83$, $c = 80$.

Ответ: _____.

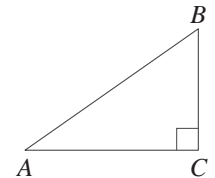
8 Решите неравенство $-3 - x > 4x + 7$.

- 1) $(-\infty; -0,8)$ 3) $(-0,8; +\infty)$
2) $(-2; +\infty)$ 4) $(-\infty; -2)$

Ответ:

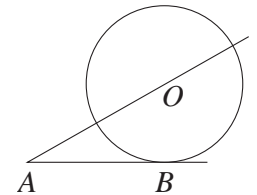
Модуль «Геометрия»

9 В треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 9$, $\cos A = 0,3$. Найдите AB .



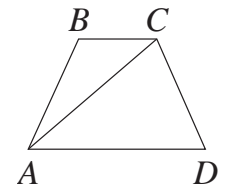
Ответ: _____.

10 К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO . Найдите радиус окружности, если $AB = 14$, $AO = 50$.



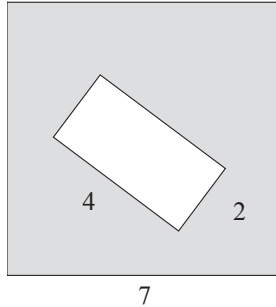
Ответ: _____.

11 В трапеции $ABCD$ $AB = CD$, $AC = AD$ и $\angle ABC = 117^\circ$. Найдите угол CAD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

12 Из квадрата вырезали прямоугольник (см. рисунок). Найдите площадь получившейся фигуры.



Ответ: _____.

13 Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Внешний угол треугольника равен сумме его внутренних углов.
- 2) Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.
- 3) Касательная к окружности параллельна радиусу, проведённому в точку касания.

Ответ: _____.

Модуль «Реальная математика»

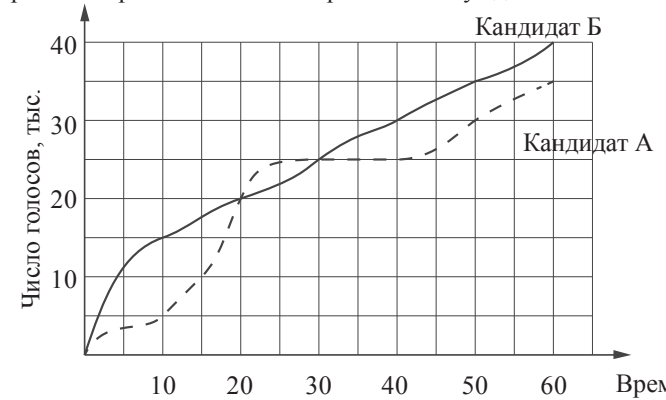
14 В таблице приведены нормативы по бегу на 30 м для учащихся 9 класса. Оцените результат девочки, пробежавшей эту дистанцию за 5,35 с.

Отметка	Мальчики			Девочки		
	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время, с	4,6	4,9	5,3	5,0	5,5	5,9

- 1) отметка «5»
- 2) отметка «4»
- 3) отметка «3»
- 4) норматив не выполнен

Ответ:

15 На графиках показано, как во время телевизионных дебатов между кандидатами А и Б телезрители голосовали за каждого из них. Сколько всего тысяч телезрителей проголосовало за первые 40 минут дебатов?



Ответ: _____.

16 Для приготовления фарша взяли говядину и свинину в отношении 9:1. Какой процент в фарше составляет свинина?

Ответ: _____.

17 На какой угол (в градусах) поворачивается минутная стрелка, пока часовая поворачивается на 11°?

Ответ: _____.

- 18 На диаграмме показан религиозный состав населения Германии. Определите по диаграмме, в каких пределах находится доля католиков.



- 1) 0–10% 3) 15–25%
 2) 10–15% 4) 25–45%

В ответе запишите номер выбранного ответа.

Ответ: _____.

- 19 В магазине канцтоваров продаётся 200 ручек, из них 31 красная, 25 зелёных, 38 фиолетовых, ещё есть синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что при случайном выборе одной ручки будет выбрана красная или чёрная ручка.

Ответ: _____.

- 20 Перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта позволяет формула $F = 1,8C + 32$, где C — градусы Цельсия, F — градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Цельсия соответствует 63° по шкале Фаренгейта? Ответ округлите до десятых.

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 21–26 используйте отдельный лист. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

Модуль «Алгебра»

21

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} (5x+3)^2 = 8y, \\ (3x+5)^2 = 8y. \end{cases}$$

22

Расстояние между пристанями А и В равно 108 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

23

Постройте график функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+12)}{x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Модуль «Геометрия»

24

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB = 18$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 и 9.

25

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

26

В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 36$, $AC = 48$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Диагностическая работа
по подготовке к ОГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

10 февраля 2015 года
9 класс

Вариант МА90503

Район
Город (населённый пункт)
Школа
Класс
Фамилия
Имя
Отчество

Инструкция по выполнению работы

Общее время работы – 235 минут.

Характеристика работы. Всего в работе 26 заданий, из которых 20 заданий базового уровня (часть 1), 4 задания повышенного уровня (часть 2) и 2 задания высокого уровня сложности (часть 2). Работа состоит из трёх модулей: «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика».

Модуль «Алгебра» содержит 11 заданий: в части 1 – 8 заданий; в части 2 – 3 задания. Модуль «Геометрия» содержит 8 заданий: в части 1 – 5 заданий; в части 2 – 3 задания. Модуль «Реальная математика» содержит 7 заданий: все задания – в части 1.

Советы и указания по выполнению работы. Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с того модуля, задания которого вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим модулям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Все необходимые вычисления, преобразования и т. д. выполняйте в черновике. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

Для заданий с выбором ответа (2, 3, 8, 14) из четырёх предложенных вариантов выберите один верный и обведите номер выбранного ответа в тренировочной работе. Если Вы обвели не тот номер, то зачеркните обведённый номер крестиком и затем обведите номер нового ответа.

Если варианты ответа к заданию не приводятся, полученный ответ записывается в отведённом для этого месте. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную. В случае записи неверного ответа зачеркните его и запишите рядом новый.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы. При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Как оценивается работа. Баллы, полученные Вами за верно выполненные задания, суммируются. Для успешного выполнения работы Вам необходимо набрать в сумме не менее 8 баллов, из них не менее 3 баллов по модулю «Алгебра», не менее 2 баллов по модулю «Геометрия» и не менее 2 баллов по модулю «Реальная математика». За каждое правильно выполненное задание части 1 выставляется 1 балл. В каждом модуле части 2 задания расположены по нарастанию сложности и оцениваются в 2, 3 и 4 балла.

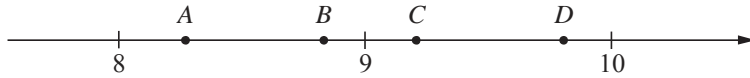
Желаем успеха!

Часть 1
Модуль «Алгебра»

1 Найдите значение выражения $\frac{1}{\frac{1}{33} + \frac{1}{12}}$.

Ответ: _____.

2 На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D . Одна из них соответствует числу $\sqrt{85}$. Какая это точка?



- 1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

Ответ:

3 Найдите значение выражения $\sqrt{6 \cdot 40} \cdot \sqrt{90}$.

- 1) $60\sqrt{6}$ 2) $60\sqrt{30}$ 3) $180\sqrt{2}$ 4) $120\sqrt{3}$

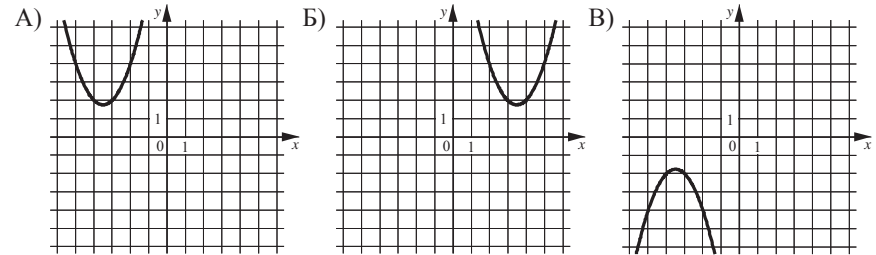
Ответ:

4 Квадратный трёхчлен разложен на множители: $4x^2 - 29x + 45 = 4(x-5)(x-a)$. Найдите a .

Ответ: _____.

5 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

- 1) $y = -x^2 + 7x - 14$ 3) $y = x^2 + 7x + 14$
2) $y = x^2 - 7x + 14$ 4) $y = -x^2 - 7x - 14$

Ответ:

А	Б	В

6 Дана арифметическая прогрессия (a_n) , разность которой равна 9,1, $a_1 = -8,1$. Найдите сумму первых 8 её членов.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{a^2 - 36}{2a^2 + 12a}$ при $a = -0,3$.

Ответ: _____.

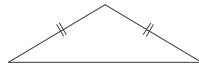
8 На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x - (8 - 3x) \geq 6x$?



Ответ:

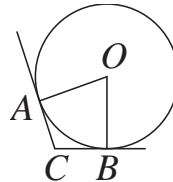
Модуль «Геометрия»

9 Периметр равнобедренного треугольника равен 32, а основание равно 12. Найдите площадь треугольника.



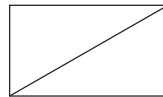
Ответ: _____.

10 В угол C величиной 157° вписана окружность с центром в точке O , которая касается сторон угла в точках A и B . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



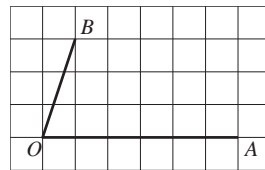
Ответ: _____.

11 В прямоугольнике одна сторона равна 42, а диагональ равна 70. Найдите площадь прямоугольника.



Ответ: _____.

12 Найдите тангенс угла AOB , изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

13 Какое из следующих утверждений верно?

- 1) В тупоугольном треугольнике все углы тупые.
- 2) Диагонали прямоугольной трапеции равны.
- 3) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

Ответ: _____.

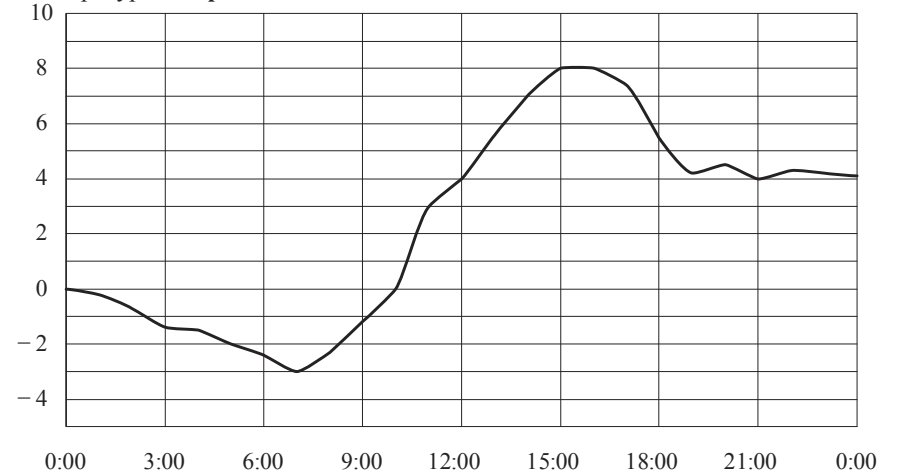
Модуль «Реальная математика»

14 Население Австралии составляет $1,8 \cdot 10^7$ человек, а площадь её территории равна $7,7 \cdot 10^6$ км². Сколько в среднем приходится жителей на 1 км²?

- 1) примерно 4,3 человека
- 2) примерно 2,3 человека
- 3) примерно 0,43 человека
- 4) примерно 0,23 человека

Ответ:

15 На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Сколько часов в первой половине суток температура не превышала 4°C ?



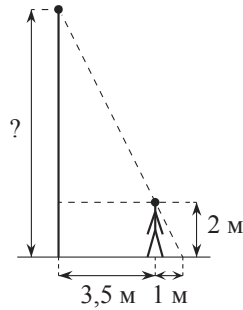
Ответ: _____.

16 Товар на распродаже уценили на 40 %, при этом он стал стоить 810 руб. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

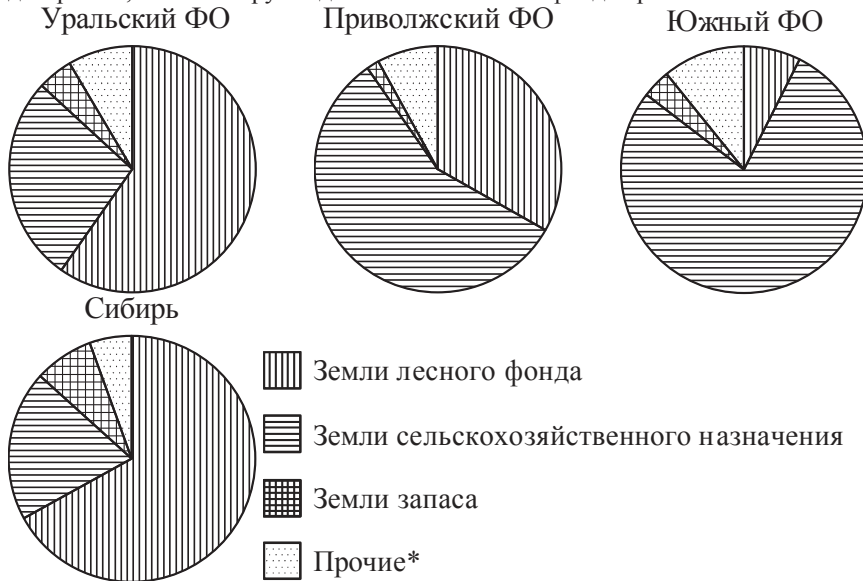
Ответ: _____.

- 17) Человек, рост которого равен 2 м, стоит на расстоянии 3,5 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 1 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

Ответ: _____.



- 18) На диаграммах показано распределение земель Уральского, Приволжского, Южного федеральных округов и Сибири по категориям. Определите по диаграмме, в каких округах доля земель лесного фонда превышает 50%.



*Прочие — это земли поселений; земли промышленности и иного специального назначения; земли особо охраняемых территорий и объектов.

- | | |
|-------------------|-------------|
| 1) Уральский ФО | 3) Южный ФО |
| 2) Приволжский ФО | 4) Сибирь |

В ответе запишите номера выбранных ответов.

Ответ: _____.

- 19) В каждой двадцать пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Коля покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Коля **не найдёт** приз в своей банке.

Ответ: _____.

- 20) Зная длину своего шага, человек может приближённо подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s = nl$, где n — число шагов, l — длина шага. Какое расстояние прошёл человек, если $l = 50$ см, $n = 1100$? Ответ выразите в километрах.

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 21–26 используйте отдельный лист. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

Модуль «Алгебра»

- 21) Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$

- 22) Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 140 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 5 км/ч, стоянка длится 11 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 32 часа после отплытия из него.

- 23) Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = -x^2 - 2,25$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Модуль «Геометрия»

- 24 Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 12$, $BF = 5$.
- 25 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.
- 26 В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 32$, $AC = 64$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Диагностическая работа
по подготовке к ОГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

10 февраля 2015 года
9 класс

Вариант МА90504

Район
Город (населённый пункт)
Школа
Класс
Фамилия
Имя
Отчество

Инструкция по выполнению работы

Общее время работы – 235 минут.

Характеристика работы. Всего в работе 26 заданий, из которых 20 заданий базового уровня (часть 1), 4 задания повышенного уровня (часть 2) и 2 задания высокого уровня сложности (часть 2). Работа состоит из трёх модулей: «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика».

Модуль «Алгебра» содержит 11 заданий: в части 1 – 8 заданий; в части 2 – 3 задания. Модуль «Геометрия» содержит 8 заданий: в части 1 – 5 заданий; в части 2 – 3 задания. Модуль «Реальная математика» содержит 7 заданий: все задания – в части 1.

Советы и указания по выполнению работы. Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с того модуля, задания которого вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим модулям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Все необходимые вычисления, преобразования и т. д. выполняйте в черновике. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

Для заданий с выбором ответа (2, 3, 8, 14) из четырёх предложенных вариантов выберите один верный и обведите номер выбранного ответа в тренировочной работе. Если Вы обвели не тот номер, то зачеркните обведённый номер крестиком и затем обведите номер нового ответа.

Если варианты ответа к заданию не приводятся, полученный ответ записывается в отведённом для этого месте. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную. В случае записи неверного ответа зачеркните его и запишите рядом новый.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы. При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Как оценивается работа. Баллы, полученные Вами за верно выполненные задания, суммируются. Для успешного выполнения работы Вам необходимо набрать в сумме не менее 8 баллов, из них не менее 3 баллов по модулю «Алгебра», не менее 2 баллов по модулю «Геометрия» и не менее 2 баллов по модулю «Реальная математика». За каждое правильно выполненное задание части 1 выставляется 1 балл. В каждом модуле части 2 задания расположены по нарастанию сложности и оцениваются в 2, 3 и 4 балла.

Желаем успеха!

Часть 1
Модуль «Алгебра»

1 Найдите значение выражения $(2 \cdot 10^3)^2 \cdot (12 \cdot 10^{-3})$.

Ответ: _____.

2 Какому промежутку принадлежит число $\sqrt{89}$?

- 1) [8;9] 2) [9;10] 3) [10;11] 4) [11;12]

Ответ:

3 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}}$.

- 1) $7\sqrt{7}$ 2) 49 3) $49\sqrt{7}$ 4) 7

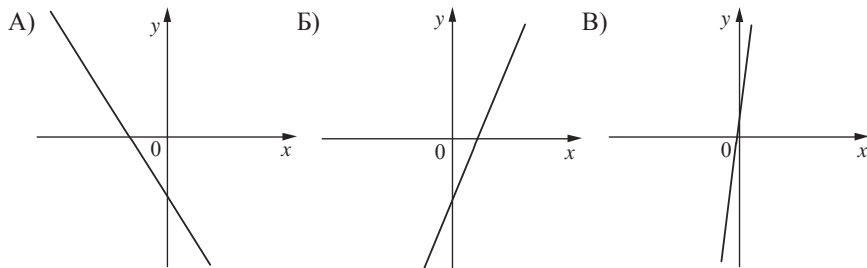
Ответ:

4 Найдите корни уравнения $3x^2 + 18x = 0$.

Ответ: _____.

5 На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b .

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

- 1) $k < 0, b > 0$ 2) $k < 0, b < 0$ 3) $k > 0, b < 0$ 4) $k > 0, b > 0$

Ответ:

А	Б	В
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

6 Последовательность задана формулой $a_n = \frac{51}{n+1}$. Сколько членов этой последовательности больше 5?

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{a^2 - 16b^2}{4ab} : \left(\frac{1}{4b} - \frac{1}{a}\right)$ при $a = 3\frac{1}{13}$, $b = 4\frac{3}{13}$.

Ответ: _____.

8 Решите неравенство $6x - 2(2x + 9) > 4$.

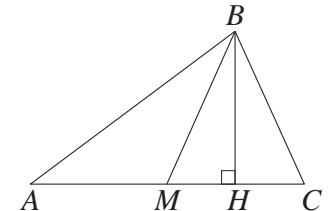
- 1) $(-\infty; -7)$ 2) $(-7; +\infty)$ 3) $(-\infty; 11)$ 4) $(11; +\infty)$

Ответ:

Модуль «Геометрия»

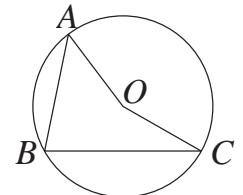
9 В треугольнике ABC BM – медиана и BH – высота. Известно, что $AC = 17$ и $BC = BM$. Найдите AH .

Ответ: _____.

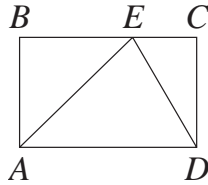


10 Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A , B и C . Известно, что $\angle ABC = 75^\circ$ и $\angle OAB = 43^\circ$. Найдите угол BCO . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

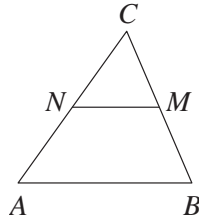


- 11** На стороне BC прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 24$ и $AD = 31$, отмечена точка E так, что $\angle EAB = 45^\circ$. Найдите ED .



Ответ: _____.

- 12** В треугольнике ABC отмечены середины M и N сторон BC и AC соответственно. Площадь треугольника CNM равна 57. Найдите площадь четырёхугольника $ABMN$.



Ответ: _____.

- 13** Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Любой прямоугольник можно вписать в окружность.
- 2) Все углы ромба равны.
- 3) Диагональ трапеции делит её на два равных треугольника.

Ответ: _____.

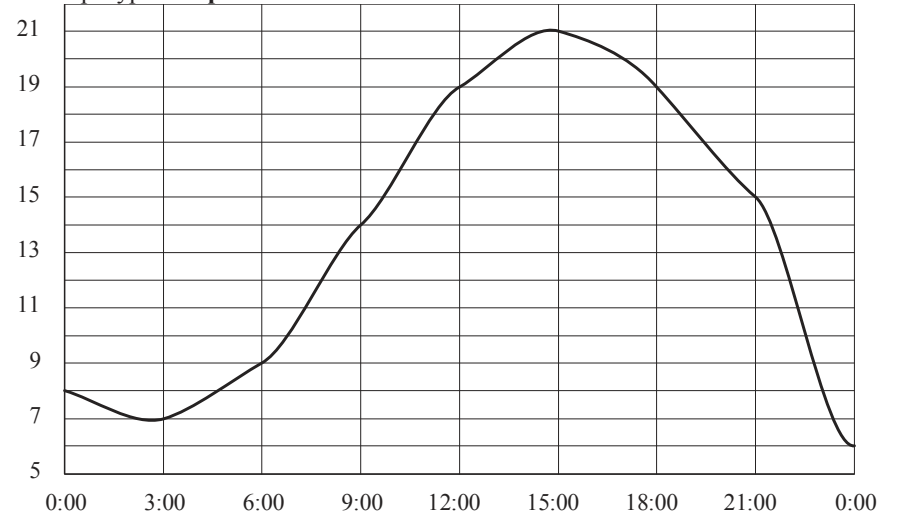
Модуль «Реальная математика»

- 14** Площадь территории США составляет $9,5 \cdot 10^6$ км², а Швейцарии — $4,1 \cdot 10^4$ км². Во сколько раз площадь территории США больше площади территории Швейцарии?

- 1) примерно в 23 раза
- 2) примерно в 230 раз
- 3) примерно в 43 раза
- 4) примерно в 2,3 раза

Ответ:

- 15** На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Сколько часов во второй половине суток температура **не превышала** 15°C ?



Ответ: _____.

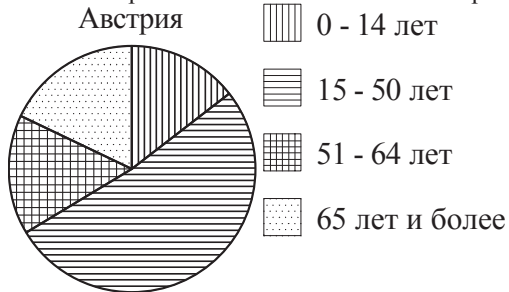
- 16** Число дорожно-транспортных происшествий в летний период составило 0,87 числа ДТП в зимний период. На сколько процентов уменьшилось число дорожно-транспортных происшествий летом по сравнению с зимой?

Ответ: _____.

- 17** Две трубы, диаметры которых равны 14 см и 48 см, требуется заменить одной, площадь поперечного сечения которой равна сумме площадей поперечных сечений двух данных. Каким должен быть диаметр новой трубы? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____.

18 На диаграмме показан возрастной состав населения Австрии.



Сколько примерно человек в возрасте от 51 до 64 лет проживает в Австрии, если население Австрии составляет 8,4 млн человек?

- 1) около 3 млн 3) около 2,5 млн
 2) около 1,5 млн 4) около 0,7 млн

В ответе запишите номер выбранного ответа.

Ответ: _____.

19 Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что наибольшее из двух выпавших чисел равно 5.

Ответ: _____.

20 Период колебания математического маятника (в секундах) приближённо можно вычислить по формуле $T = 2\sqrt{l}$, где l — длина нити в метрах. Пользуясь этой формулой, найдите длину нити маятника (в метрах), период колебаний которого составляет 17 секунд.

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 21–26 используйте отдельный лист. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

Модуль «Алгебра»

21 Решите уравнение $x^6 = (7x - 6)^3$.

22 Первые 5 часов автомобиль ехал со скоростью 110 км/ч, следующие 3 часа — со скоростью 50 км/ч, а последние 3 часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

23 Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x-4}{4} - \frac{4}{x} \right| + \frac{x}{4} + \frac{4}{x} \right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Модуль «Геометрия»

24 Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 6:7:23. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 11.

25 Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 и 24, $BD = 12$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

26 В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 7 : 3$. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC .

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом
Модуль «Алгебра»

21

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 7x^2 - 5x = y, \\ 7x - 5 = y. \end{cases}$$

Решение

Правые части уравнений системы равны, значит,

$$7x^2 - 5x = 7x - 5; \quad (7x - 5)(x - 1) = 0,$$

откуда $x = 1$ или $x = \frac{5}{7}$.

При $x = 1$ получаем $y = 2$.

При $x = \frac{5}{7}$ получаем $y = 0$.

Решения системы уравнений: $(1; 2)$ и $(\frac{5}{7}; 0)$.

Ответ: $(1; 2); (\frac{5}{7}; 0)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	<i>Максимальный балл</i>

22

Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого автомобилиста на 9 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью 60 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 40 км/ч.

Решение

Пусть весь путь составляет $2s$ км, а скорость первого автомобиля v км/ч, тогда первую половину пути второй автомобиль ехал со скоростью $v - 9$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{2s}{v} = \frac{s}{v-9} + \frac{s}{60}; \quad 120v - 1080 = 60v + v^2 - 9v; \quad v^2 - 69v + 1080 = 0,$$

откуда $v = 24$ или $v = 45$. Первое из этих значений не подходит, поскольку оно не превосходит 40. Значит, скорость первого автомобилиста равна 45 км/ч.

Ответ: 45 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	<i>Максимальный балл</i>

23

Постройте график функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

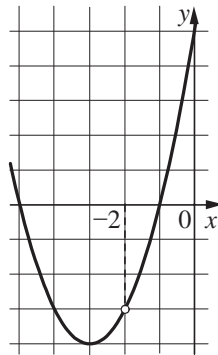
Решение

Преобразуем выражение:

$$\frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2} = \frac{(x+1)(x+2)(x+5)}{x+2} = x^2+6x+5 \text{ при условии, что}$$

$x \neq -2$.

Построим график:



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $m = -4$ и при $m = -3$.

Ответ: $-4; -3$.

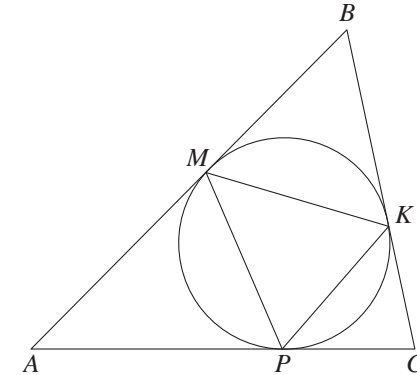
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Модуль «Геометрия»

24

Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках M , K и P . Найдите углы треугольника ABC , если углы треугольника MKP равны 39° , 78° и 63° .

Решение



Пусть

$$\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma;$$

$$\angle PKM = 39^\circ, \angle MPK = 78^\circ, \angle KMP = 63^\circ.$$

По свойству касательных $AM = AP$, $BM = BK$, $CP = CK$. Значит, треугольники AMP , BMK и CPK равнобедренные, откуда получаем

$$\angle AMP = \angle APM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \angle BMK = \angle BKM = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

$$\angle CPK = \angle CKP = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Значит, $\angle PKM = 180^\circ - \angle CKP - \angle BKM = \frac{\gamma + \beta}{2} = 39^\circ$. Аналогично получаем,

$$\text{что } \angle MPK = \frac{\alpha + \gamma}{2} = 78^\circ \text{ и } \angle KMP = \frac{\alpha + \beta}{2} = 63^\circ.$$

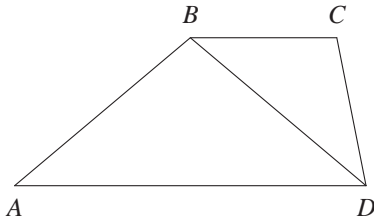
Решая систему относительно α , β и γ , получаем, что углы треугольника ABC равны 102° , 24° , 54° .

Ответ: $102^\circ; 24^\circ; 54^\circ$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	Максимальный балл

- 25** Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 и 24, $BD = 12$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство



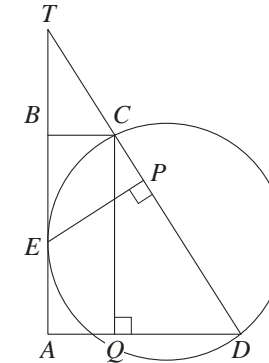
В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$. Поэтому указанные треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	Максимальный балл

- 26** В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 4$, $BC = 3$.

Решение

Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD , P — проекция точки E на прямую CD , Q — проекция точки C на прямую AD (см. рисунок). Обозначим $\angle CDA = \alpha$, $CD = x$.



Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 1$, получаем, что $\cos \alpha = \frac{QD}{DC} = \frac{1}{x}$.

Из подобия треугольников TBC и TAD находим, что $TC = 3x$.

Поэтому

$$TE^2 = TD \cdot TC = 12x^2.$$

Следовательно,

$$EP = TE \cos \angle TEP = TE \cos \angle TDA = TE \cos \alpha = x\sqrt{12} \cdot \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом
Модуль «Алгебра»

21

Решите систему уравнений $\begin{cases} (5x+3)^2 = 8y, \\ (3x+5)^2 = 8y. \end{cases}$

Решение

Правые части уравнений системы равны, значит,

$$(5x+3)^2 = (3x+5)^2; \quad (2x-2)(8x+8) = 0,$$

откуда $x = -1$ или $x = 1$.

При $x = -1$ получаем $y = \frac{1}{2}$.

При $x = 1$ получаем $y = 8$.

Решения системы уравнений: $(-1; \frac{1}{2})$ и $(1; 8)$.

Ответ: $(1; 8); (-1; \frac{1}{2})$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	<i>Максимальный балл</i>

22

Расстояние между пристанями А и В равно 108 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение

Плот прошёл 50 км, значит, он плыл 10 часов, из которых лодка находилась в пути 9 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

$$\frac{108}{v+5} + \frac{108}{v-5} = 9; \quad 108v - 540 + 108v + 540 = 9v^2 - 225; \quad v^2 - 24v - 25 = 0,$$

откуда $v = 25$.

Ответ: 25 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	<i>Максимальный балл</i>

23

Постройте график функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+12)}{x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

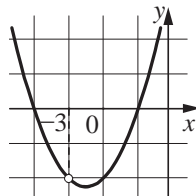
Решение

Преобразуем выражение:

$$\frac{(x+1)(x^2+7x+12)}{x+3} = \frac{(x+1)(x+3)(x+4)}{x+3} = x^2+5x+4 \text{ при условии, что}$$

$x \neq -3$.

Построим график:



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $m = -2,25$ и при $m = -2$.

Ответ: $-2,25$; -2 .

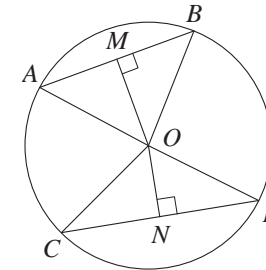
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Модуль «Геометрия»

24

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB = 18$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 и 9.

Решение



Пусть O – центр окружности, $OM = 12$ и $ON = 9$ — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.

Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 15.$$

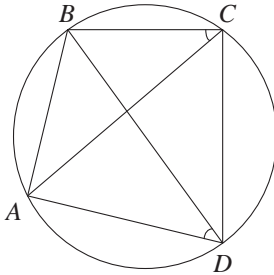
В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO = OB = 15$, откуда $CN = \sqrt{OC^2 - ON^2} = 12$. Получаем, что $CD = 2CN = 24$.

Ответ: 24.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	Максимальный балл

- 25** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

Доказательство.

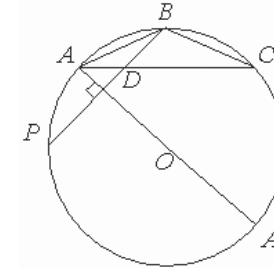


Поскольку четырёхугольника $ABCD$ выпуклый и $\angle BCA = \angle BDA$, получаем, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. А тогда $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AD .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	Максимальный балл

- 26** В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 36$, $AC = 48$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Решение



Пусть продолжение отрезка BD за точку D пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P (см. рисунок). Тогда хорда BP перпендикулярна диаметру AA_1 этой окружности. Значит, точка A — середина дуги BP , не содержащей вершину C . Отсюда следует, что $\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$ (как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги). Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам (угол A общий). Следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}, \text{ откуда } AD = \frac{AB^2}{AC} = 27 \text{ и } CD = AC - AD = 48 - 27 = 21.$$

Ответ: 21.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом
Модуль «Алгебра»

21

Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$

Решение

Правые части уравнений системы равны, значит,

$$3x^2 - 2x = 3x - 2; \quad (3x - 2)(x - 1) = 0,$$

откуда $x = 1$ или $x = \frac{2}{3}$.

При $x = 1$ получаем $y = 1$.

При $x = \frac{2}{3}$ получаем $y = 0$.

Решения системы уравнений: $(1; 1)$ и $(\frac{2}{3}; 0)$.

Ответ: $(1; 1); (\frac{2}{3}; 0)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	<i>Максимальный балл</i>

22

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 140 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 5 км/ч, стоянка длится 11 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 32 часа после отплытия из него.

Решение

Пусть скорость теплохода равна v км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{140}{v-5} + \frac{140}{v+5} = 21; \quad 140v + 700 + 140v - 700 = 21v^2 - 525; \quad 3v^2 - 40v - 75 = 0,$$

откуда $v = 15$.

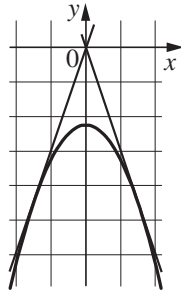
Ответ: 15 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	<i>Максимальный балл</i>

23 Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y=kx$ имеет с графиком функции $y=-x^2-2,25$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение

Построим график функции $y=-x^2-2,25$:



Прямая $y=kx$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку, если уравнение $-x^2-2,25=kx$ имеет один корень. Дискриминант этого уравнения равен k^2-9 , и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k=-3$ или $k=3$.

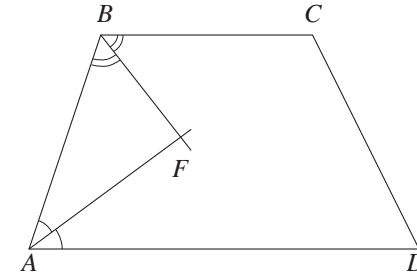
Ответ: $-3; 3$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Модуль «Геометрия»

24 Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF=12$, $BF=5$.

Решение



Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит,

$$\angle ABF + \angle BAF = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle BAD) = 90^\circ.$$

Получаем, что треугольник ABF прямоугольный с прямым углом F . По теореме Пифагора находим AB :

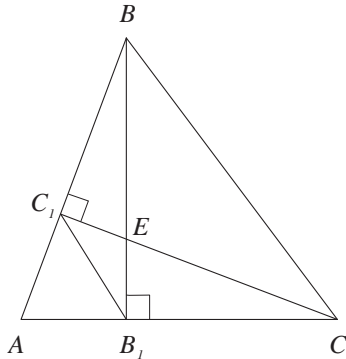
$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

Ответ: 13.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	Максимальный балл

- 25** Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.

Доказательство

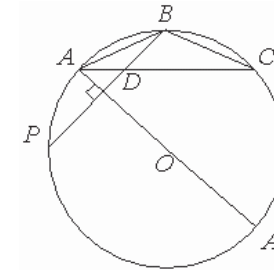


Поскольку диагонали четырёхугольника CB_1C_1B пересекаются, он является выпуклым, а так как $\angle CB_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$, около него можно описать окружность. Тогда углы BB_1C_1 и BCC_1 равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу BC_1 .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	Максимальный балл

- 26** В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 32$, $AC = 64$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Решение



Пусть продолжение отрезка BD за точку D пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P (см. рисунок). Тогда хорда BP перпендикулярна диаметру AA_1 этой окружности. Значит, точка A — середина дуги BP , не содержащей вершину C . Отсюда следует, что $\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$ (как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги). Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам (угол A общий). Следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}, \text{ откуда } AD = \frac{AB^2}{AC} = 16 \text{ и } CD = AC - AD = 64 - 16 = 48.$$

Ответ: 48.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом
Модуль «Алгебра»

21 Решите уравнение $x^6 = (7x - 6)^3$.

Решение

$$x^6 = (7x - 6)^3; \quad x^2 = 7x - 6; \quad (x - 6)(x - 1) = 0,$$

откуда $x = 1$ или $x = 6$.

Ответ: 1; 6.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	<i>Максимальный балл</i>

22 Первые 5 часов автомобиль ехал со скоростью 110 км/ч, следующие 3 часа — со скоростью 50 км/ч, а последние 3 часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение

Заметим, что всего автомобиль проехал $110 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 3 = 880$ км, затратив на весь путь $5 + 3 + 3 = 11$ часов. Таким образом, его средняя скорость равна $\frac{880}{11} = 80$ км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

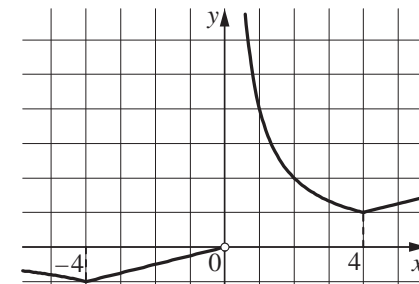
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	<i>Максимальный балл</i>

23 Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x-4}{4-x} \right| + \frac{x}{4} + \frac{4}{x} \right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение

Значение выражения $\frac{x}{4} - \frac{4}{x}$ неотрицательно при $-4 \leq x < 0$ и $x \geq 4$, а при $x < -4$ и $0 < x < 4$ значение этого выражения отрицательно.

Построим график функции $y = \frac{x}{4}$ при $-4 \leq x < 0$ и $x \geq 4$ и график функции $y = \frac{4}{x}$ при $x < -4$ и $0 < x < 4$.



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $m = 1$ и $m = -1$.

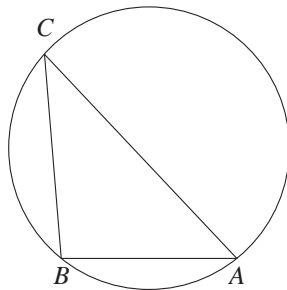
Ответ: $-1; 1$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	<i>Максимальный балл</i>

Модуль «Геометрия»

- 24** Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 6:7:23. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 11.

Решение



Пусть длины дуг AB , BC и AC относятся как 6:7:23, тогда наименьшая сторона треугольника ABC — сторона $AB = 11$.

По свойству вписанного угла $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6+7+23} \cdot 360^\circ = 30^\circ$.

Из теоремы синусов находим, что радиус окружности равен

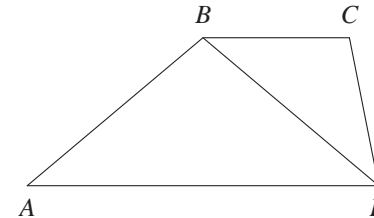
$$R = \frac{AB}{2 \sin 30^\circ} = 11.$$

Ответ: 11.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	<i>Максимальный балл</i>

- 25** Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 и 24, $BD = 12$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство

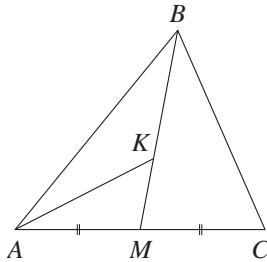


В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$. Поэтому указанные треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	<i>Максимальный балл</i>

- 26 В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 7 : 3$. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC .

Решение



Медиана AM разбивает треугольник ABC на два равновеликих треугольника — пусть их площади равны по $10S$.

Поскольку $\frac{S_{ABK}}{S_{AMK}} = \frac{BK}{MK} = \frac{7}{3}$, получаем, что $S_{ABK} = 7S$ и $S_{AMK} = 3S$. Тогда

$$S_{ABK} : S_{ABC} = 7S : 20S = 7 : 20.$$

Ответ: 7:20.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл