Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 .

10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

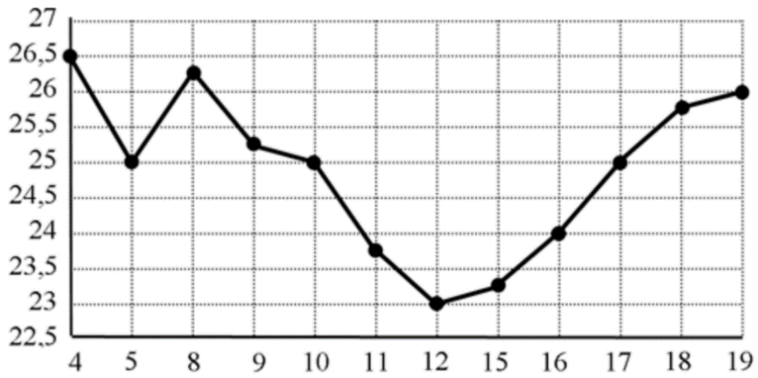
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 2%. Книга стоит 150 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Ответ: ___________________________.

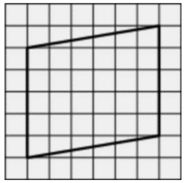
2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов составила 24 доллара за баррель.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171023

3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

4 В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

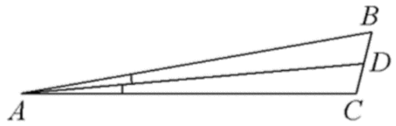
Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

$$3^{2x-16} = \frac{1}{81}.$$

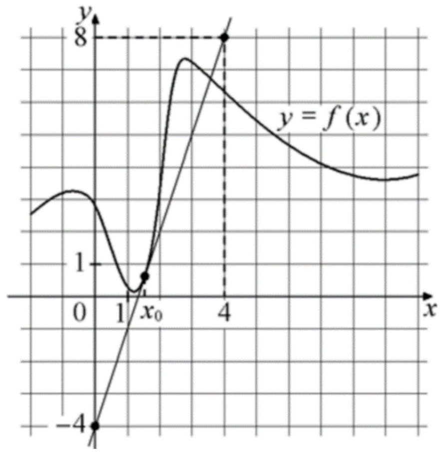
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC AD – биссектриса, угол C равен 104°, угол CAD равен 5°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.



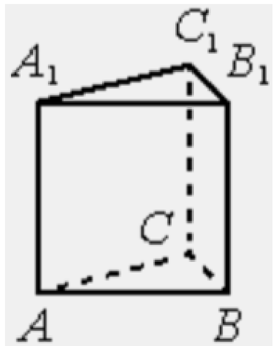
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 5, а боковое ребро равно 6.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$12\sqrt{2}\cos(-225°)$.

Ответ: ___________________________.

10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана- Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{625} \cdot 10^{21}$ м^2, а мощность её излучения равна

$5{,}7 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

Ответ: ___________________________.

11 Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй – 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции

$y = (x-4)^2(x+5)+8$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$[-2\pi; -\pi]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

15 Решите неравенство

$$\log_3^2(x^2-16) - 5\log_3(x^2-16) + 6 \geq 0.$$

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C. Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN, если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171023

17 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x+2+a| = |x-a-2| - (a+2)^2$$

имеет единственный корень.

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора Трижды победитель олимпиады по высшей математике среди всех студентов Тольяттинского государственного университета
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171023

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	147
2	16
3	30
4	0,75
5	6
6	66
7	3
8	10
9	-12
10	5000
11	30
12	-2
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n, -\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n \in Z.$ б) $-1{,}5\pi; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$
14	3,75
15	$\left(-\infty; -\sqrt{43}\right] \cup [-5; -4) \cup (4; 5] \cup \left[\sqrt{43}; +\infty\right)$
16	$\frac{115}{6}$
17	680
18	$a = 0; a = -4$
19	а) Могло, б) Не могло, в) 18,5

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 Решение задания

а) Решите уравнение

$2\cos^3 x = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

а)

$2\cos^3 x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$2\cos^3 x = \cos x$

$2\cos^3 x - \cos x = 0$

$\cos x \cdot (2\cos^2 x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z$	$2\cos^2 x - 1 = 0$ $2\cos^2 x = 1$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

	$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$ $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$

Если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -2{,}5\pi \notin [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -1{,}5\pi \in [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -0{,}5\pi \notin [-2\pi; -\pi]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z$

Если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{4} - 3\pi = -\frac{11\pi}{4} \notin [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4} \in [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \notin [-2\pi; -\pi]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9\pi}{4} \notin [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{5\pi}{4} \in [-2\pi; -\pi]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{4} \notin [-2\pi; -\pi]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$. б) $-1{,}5\pi; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$

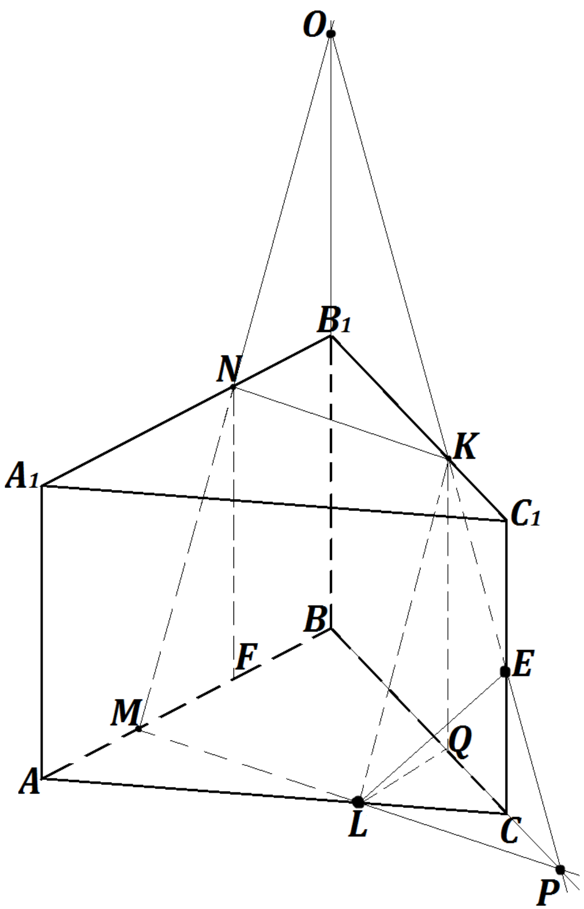
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Решение задания

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

а)



Построим сечение:
Построим прямую KN, т.к. точки K и N лежат в одной плоскости
Построим прямую MN, т.к. точки M и N лежат в одной плоскости
Пусть $MN \cap BB_1 = O$
Построим прямую KO, т.к. точки K и O лежат в одной плоскости
Пусть $KO \cap CC_1 = E$
Пусть $KO \cap BC = P$
Построим прямую MP, т.к. точки M и P лежат в одной плоскости
$MP \cap AC = L$
$MNKL$ – четырёхугольник, являющийся сечением призмы плоскостью MNK

Найдём все стороны $MNKL$:
По теореме косинусов:
$ML^2 = AM^2 + AL^2 - 2 \cdot AM \cdot AL \cdot \cos A$
$ML^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60$
$ML^2 = 1 + 4 - 2 = 3$
$ML = \sqrt{3}$

$KN^2 = B_1N^2 + B_1K^2 - 2 \cdot B_1N \cdot B_1K \cdot \cos B_1$
$KN^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60$
$KN^2 = 1 + 4 - 2 = 3$
$KN = \sqrt{3}$

Пусть F – основание перпендикуляра из точки N на прямую AB
Пусть Q – основание перпендикуляра из точки K на прямую BC

$MN = \sqrt{NF^2 + MF^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

$KL = \sqrt{QK^2 + QL^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

Итак, все стороны четырёхугольника $MNKL$ равны, докажем равенство диагоналей:

$LN = \sqrt{NF^2 + FL^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ (по теореме Пифагора)

$KM = \sqrt{QK^2 + QM^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ (по теореме Пифагора)

=>
$MNKL$ – квадрат
■

б)
$S_{\text{сечения}} = S_{MNKL} + S_{EKL}$
$S_{MNKL} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

Найдём площадь треугольника EKL:

Заметим, что в $\triangle B_1NK$ выполняется теорема Пифагора:
$B_1K^2 = B_1N^2 + NK^2$
$2^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$
$4 = 1 + 3$
$4 = 4$
=> $\triangle B_1NK$ – прямоугольный и $\angle B_1NK = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора
$\angle BMP = 90°$ (т.к. это соответственные углы)
$\angle QLP = 90°$ (т.к. это соответственные углы)
$\angle CLP = 90 - 60 = 30°$
$\angle LCP = 180 - 60 = 120°$ (т.к. это смежные углы)
$\angle LPC = 180 - 120 - 30 = 30°$
=> $\triangle LCP$ – равнобедренный и $LC = CP = 1$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках KPQ и ECP

$$\frac{QK}{EC} = \frac{QP}{CP}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{EC} = \frac{1+1}{1}$$

$$EC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

=>
E – середина CC_1

$$EK = \sqrt{C_1K^2 + C_1E^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$EL = \sqrt{CL^2 + CE^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$\triangle ELK$ – равнобедренный
Пусть EG – высота $\triangle ELK$

$$GK = \frac{1}{2} \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$EG = \sqrt{EK^2 - GK^2} = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{EKL} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot EG = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$S_{\text{сечения}} = S_{MNKL} + S_{EKL} = 3 + 0{,}75 = 3{,}75$$

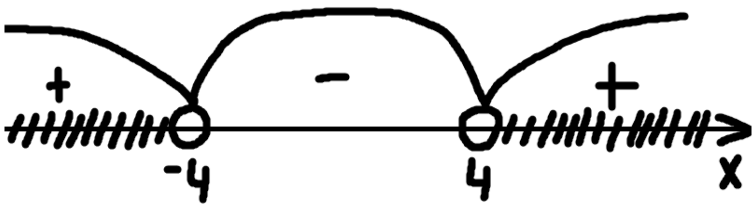
Ответ: 3,75

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решение задания

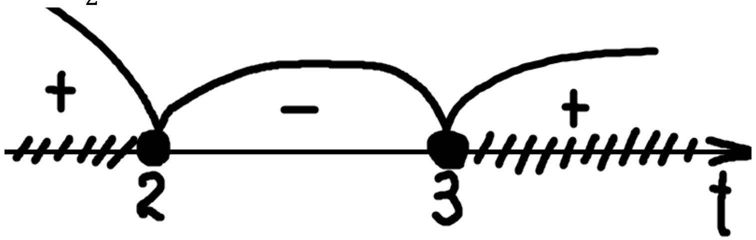
Решите неравенство
$\log_3^2(x^2 - 16) - 5\log_3(x^2 - 16) + 6 \geq 0.$

ОДЗ:
$x^2 - 16 > 0$
$(x-4)(x+4) > 0$
$(x-4)(x+4) = 0$
$x = 4$
$x = -4$



Пусть $\log_3(x^2-16)=t$

$t^2-5t+6\geq 0$
$t^2-5t+6=0$
$D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1$
$t_1=\dfrac{5+1}{2}=3$
$t_2=\dfrac{5-1}{2}=2$



1.
$t\leq 2$

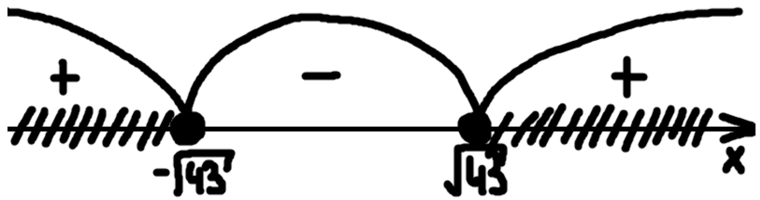
$\log_3(x^2-16)\leq 2$

$\log_3(x^2-16)\leq \log_3 9$

$x^2-16\leq 9$

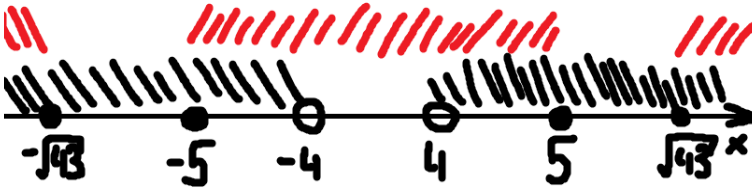
$x^2-25\leq 0$
$(x-5)(x+5)\leq 0$
$(x-5)(x+5)=0$
$x=5$
$x=-5$

2.
$t\geq 3$
$\log_3(x^2-16)\geq 3$
$\log_3(x^2-16)\geq \log_3 27$
$x^2-16\geq 27$
$x^2-43\geq 0$
$\left(x-\sqrt{43}\right)\left(x+\sqrt{43}\right)\geq 0$
$\left(x-\sqrt{43}\right)\left(x+\sqrt{43}\right)=0$
$x=\sqrt{43}$
$x=-\sqrt{43}$



3.
ОДЗ:
$x\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$

Объединим все найденные корни и промежутки на числовой прямой



Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{43}\right] \cup [-5; -4) \cup (4; 5] \cup \left[\sqrt{43}; +\infty\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

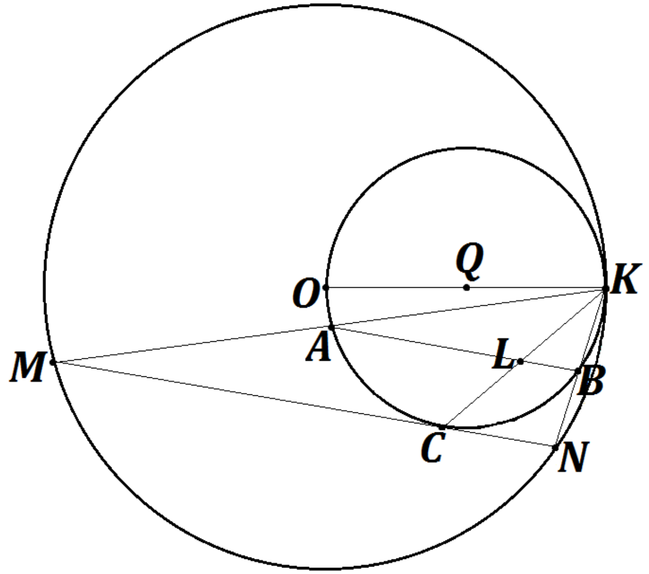
16 Решение задания

Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C. Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN, если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

а)



Пусть
O – центр большей окружности
Q – центр меньшей окружности

KO – диаметр меньшей окружности

Рассмотрим $\triangle MOK$
$MO = KO$
(т.к. это радиусы большей окружности)
=>
$\triangle MOK$ – равнобедренный
$\angle OAK = 90°$
(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)
=>
OA – высота $\triangle MOK$
=>
OA – медиана $\triangle MOK$
(по свойству равнобедренного треугольника)
=>
$AM = AK$

Аналогично

Рассмотрим $\triangle ONK$
$ON = OK$
(т.к. это радиусы большей окружности)
=>
$\triangle ONK$ – равнобедренный
$\angle OBK = 90°$
(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)
=>
OB – высота $\triangle ONK$
=>
OB – медиана $\triangle ONK$
(по свойству равнобедренного треугольника)
=>
$BN = BK$

=>
A – середина MK
B – середина KN
=>
AB – средняя линия $\triangle MNK$

$LB \parallel CN$ (т.к. $AB \parallel MN$)
$BN = BK$
=>
LB – средняя линия $\triangle CNK$

$LA \parallel CM$ (т.к. $AB \parallel MN$)
$AM = AK$
=>
LA – средняя линия $\triangle CMK$

$\triangle BLK \sim \triangle CNK$ по двум углам
=>
$$\frac{CN}{LB} = \frac{CK}{LK}$$

$\triangle ALK \sim \triangle CMK$ по двум углам
=>
$$\frac{CM}{LA} = \frac{CK}{LK}$$

=>
$$\frac{CN}{LB} = \frac{CM}{LA} \quad \Big| : CM$$

$$\frac{CN}{LB \cdot CM} = \frac{1}{LA} \quad \Big| \cdot LB$$

$$\frac{CN}{CM} = \frac{LB}{LA}$$
■

б)
$OQ = \sqrt{23}$
=>
$KO = 2\sqrt{23}$

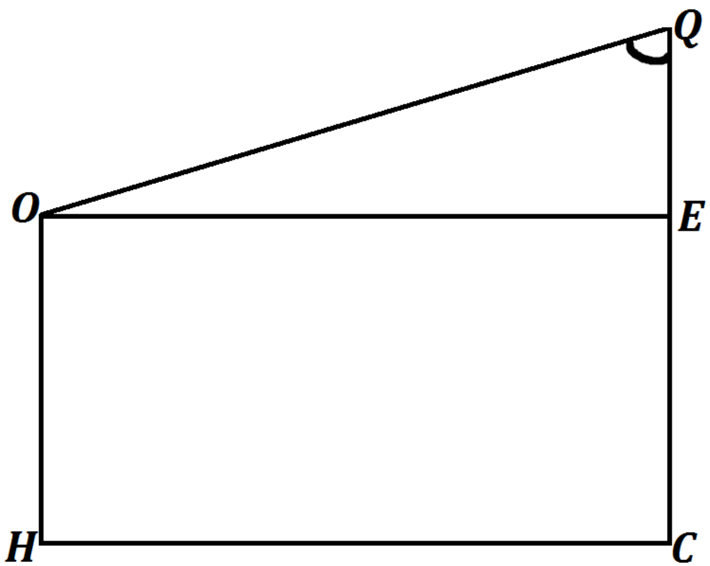
Пусть
$LB = 2x$
$LA = 3x$

Тогда
$CN = 2LB = 4x$
$CM = 2LA = 6x$
$MN = CN + CM = 10x$

Опустим перпендикуляр OH на прямую MN
Рассмотрим $\triangle OMN$
$OM = ON$
(т.к. это радиусы большей окружности)
=>
$\triangle OMN$ – равнобедренный
=>
OH – высота, медиана и биссектриса $\triangle OMN$
=>
$$MH = \frac{1}{2} \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 10x = 5x$$
$OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{23}\right)^2 - (5x)^2} = \sqrt{92 - 25x^2}$ (по теореме Пифагора)

Рассмотрим четырёхугольник $OQCH$:
$OH \perp MN$

$CQ \perp MN$
=>
$OH \parallel CQ$
=>
$OQCH$ – прямоугольная трапеция
Опустим перпендикуляр OE на прямую OC



$QE = CQ - CE = CQ - OH = \sqrt{23} - \sqrt{92 - 25x^2}$
$OE = CH = NH - CN = 5x - 4x = x$
$OQ = \sqrt{23}$

По теореме Пифагора из $\triangle OQE$:

$OQ^2 = OE^2 + QE^2$
$\sqrt{23}^2 = x^2 + \left(\sqrt{23} - \sqrt{92 - 25x^2}\right)^2$
$23 = x^2 + 23 - 2\sqrt{2116 - 575x^2} + 92 - 25x^2$
$2\sqrt{2116 - 575x^2} = 92 - 24x^2$
$\sqrt{2116 - 575x^2} = 46 - 12x^2 \qquad |^2$
$2116 - 575x^2 = 2116 - 1104x^2 + 144x^4$
$144x^4 - 529x^2 = 0$
$x^2(144x^2 - 529) = 0$

$x^2 = 0$ $x = 0$ (посторонний корень)	$144x^2 - 529 = 0$ $144x^2 = 529$ $x^2 = \frac{529}{144}$ $x = \frac{23}{12}$ $x = -\frac{23}{12}$ (посторонний корень)

$x = \frac{23}{12}$

$MN = 10x = 10 \cdot \frac{23}{12} = \frac{230}{12} = \frac{115}{6}$

Ответ: $\frac{115}{6}$

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Решение задания

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Величины t^2 в первом городе и во втором городе не одинаковые, нам просто показана зависимость количества единиц товара от количества часов

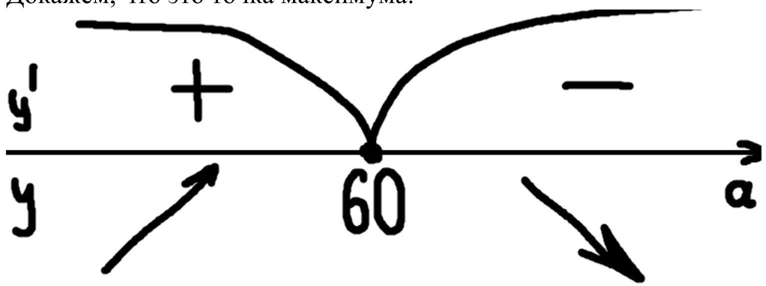
Пусть
a^2 часов трудятся в первом городе и производят $3a$ единиц товара
b^2 часов трудятся во втором городе и производят $5b$ единиц товара

Тогда
a^2+b^2- суммарное количество часов в двух городах
$3a+5b-$ суммарное количество единиц товара в двух городах

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.
Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих.
=>
$500\cdot(a^2+b^2)=6800000$
Выразим b
$a^2+b^2=\dfrac{6800000}{500}$
$b^2=13600-a^2$
$b=\sqrt{13600-a^2}$

Нужно найти какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах
=>
Нужно найти наибольшее значение выражения $3a+5b$, введём функцию:
$f(a,b)=3a+5b$
$f(a)=3a+5\sqrt{13600-a^2}$
$f'(a)=3+\dfrac{5\cdot(-2a)}{2\sqrt{13600-a^2}}=0$
$3=\dfrac{5a}{\sqrt{13600-a^2}}$
$3\sqrt{13600-a^2}=5a \quad |\text{^}2$
$9\cdot(13600-a^2)=25a^2$
$9\cdot 13600-9a^2=25a^2$
$34a^2=9\cdot 13600$
$a^2=\dfrac{9\cdot 13600}{34}$
$a^2=9\cdot 400$
$a=3\cdot 20=60$

Докажем, что это точка максимума:



=>
Наибольшее значение функция будет принимать в этой точке

$f(60)=3\cdot 60+5\sqrt{13600-60^2}$
$f(60)=180+500=680$

Ответ: 680

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Решение задания

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$x^2-|x+2+a|=|x-a-2|-(a+2)^2$

имеет единственный корень.

$x^2-|x+2+a|-|x-a-2|+(a+2)^2=0$

Рассмотрим функцию
$f(x)=x^2-|x+2+a|-|x-a-2|+(a+2)^2$

Заметим, что $f(x)$ – чётная, т.к. $f(-x)=f(x)$
$f(-x)=(-x)^2-|-x+2+a|-|-x-a-2|+(a+2)^2$
$f(-x)=x^2-|x-2-a|-|x+a+2|+(a+2)^2$

=>
$x=0$ (для выполнения единственности решения)
Подставим в уравнение $x=0$:

$0^2-|0-2-a|-|0+a+2|+(a+2)^2=0$

$-|-2-a|-|a+2|+(a+2)^2=0$

$-|a+2|-|a+2|+(a+2)^2=0$

$(a+2)^2-2|a+2|=0$

$|a+2|^2-2|a+2|=0$

$|a+2|\cdot(|a+2|-2)=0$

$a=-2$	$a=0$	$a=-4$

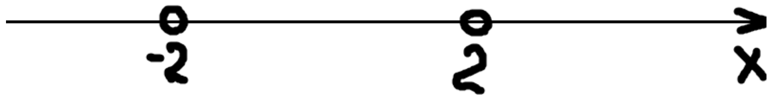
Проверим, получается ли единственное решение при подстановке данных значений a

Если $a=-2$
$x^2-|x+2+a|=|x-a-2|-(a+2)^2$
$x^2-|x+2-2|=|x+2-2|-(-2+2)^2$
$x^2-|x|=|x|$
$x^2-2|x|=0$
$|x|^2-2|x|=0$
$|x|\cdot(|x|-2)=0$

$x=0$	$x=2$	$x=-2$

=>
$a=-2$ не подходит

Если $a=0$
$x^2-|x+2+a|=|x-a-2|-(a+2)^2$
$x^2-|x+2|=|x-2|-2^2$
$x^2-|x+2|=|x-2|-4$
$x^2+4=|x-2|+|x+2|$
Найдём при каких x модули обращаются в нули:



Если $x<-2$, то

$x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$
$x^2 + 2x + 4 = 0$
$x^2 + 2x + 1 + 3 = 0$
$(x + 1)^2 + 3 = 0$
Нет корней

Если $-2 < x < 2$, то
$x^2 + 4 = -x + 2 + x + 2$
$x^2 = 0$
$x = 0$
1 корень

Если $x > 2$, то
$x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$
$x^2 - 2x + 4 = 0$
$x^2 - 2x + 1 + 3 = 0$
$(x - 1)^2 + 3 = 0$
Нет корней
=>
$a = 0$ подходит

Если $a = -4$
$x^2 - |x + 2 - 4| = |x + 4 - 2| - (-4 + 2)^2$
$x^2 - |x - 2| = |x + 2| - 2^2$
$x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$
Получаем такое же уравнение, как и при $a = 0$
=>
$a = -4$ подходит

Ответ: $a = 0$; $a = -4$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Решение задания

На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

а)
У нас есть 30 чисел от 1 до 40

Среднее арифметическое равно 7

$$\text{Среднее арифметическое} = \frac{\text{Сумма этих чисел}}{30} = 7$$

=>
Сумма этих чисел равна 210

Очевидно, что стёрли только те числа, которые были изначально единичками

Среднее арифметическое было 7, а должно стать больше 14
=>
Проще подобрать такой пример, в котором единичек наибольшее возможное количество

30 единичек быть не может

(т.к. тогда сумма чисел равна 30, а должна быть 210)

29 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 29 единичек равна 29 и последнее число 181, чего быть не может)

28 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 28 единичек равна 28 и последние два числа в сумме 182, чего быть не может)

27 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 27 единичек равна 27 и последние три числа в сумме 183, чего быть не может)

26 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 26 единичек равна 26 и последние четыре числа в сумме 184, чего быть не может)

25 единичек может быть
(т.к. тогда сумма 25 единичек равна 25 и последние пять чисел в сумме 185, т.е. 5 чисел 37, например)

Пусть на доске написано:
25 чисел 1
5 чисел 37

Первоначальное среднее арифметическое:
$$\frac{25\cdot 1+5\cdot 37}{30}=7$$

Среднее арифметическое после изменения чисел:
$$\frac{5\cdot 18{,}5}{5}=18{,}5$$
$18{,}5>14$
=>
Могло

б)
Пусть
x – количество единичек
S – первоначальная сумма чисел (всех, кроме единичек)
Тогда
$\frac{S}{2}$ – оставшаяся сумма чисел (всех, кроме единичек)

Первоначальное среднее арифметическое:
$$\frac{x\cdot 1+S}{30}=7$$
=>
$x+S=210$
$S=210-x$

Среднее арифметическое после изменения чисел:
$$\frac{\frac{S}{2}}{30-x}=\frac{S}{60-2x}$$

Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

Получаем неравенство:
$$12<\frac{S}{60-2x}<13$$

$$12<\frac{210-x}{60-2x}<13 \quad \Big|\cdot(60-2x)$$

$$720-24x<210-x<780-26x$$

$$\begin{cases}720-24x<210-x\\210-x<780-26x\end{cases}$$

$$\begin{cases}23x>510\\25x<570\end{cases}$$

$$\begin{cases}23x>510\\5x<114\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>22\frac{4}{23}\\x<22{,}8\end{cases}$$
$$22\frac{4}{23}<x<22{,}8$$
=>
Целых x, удовлетворяющих неравенству нет
=>

Не могло

в)
Среднее арифметическое после изменения чисел:
$$\frac{S}{60-2x}=\frac{210-x}{60-2x}=\frac{30-x}{60-2x}+\frac{180}{60-2x}=\frac{1}{2}+\frac{90}{30-x}$$

Чтобы найти наибольшее значение этого числа, нужно подставить наибольшее возможное значение x

В пункте а) мы доказали, что максимально возможное число пятёрок – это 25, т.е. $x=25$

Тогда
$$\frac{1}{2}+\frac{90}{30-x}=\frac{1}{2}+\frac{90}{30-25}=0{,}5+18=18{,}5$$
(такой же результат, как и в пункте а)

Ответ: а) Могло, б) Не могло, в) 18,5

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 171023