**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

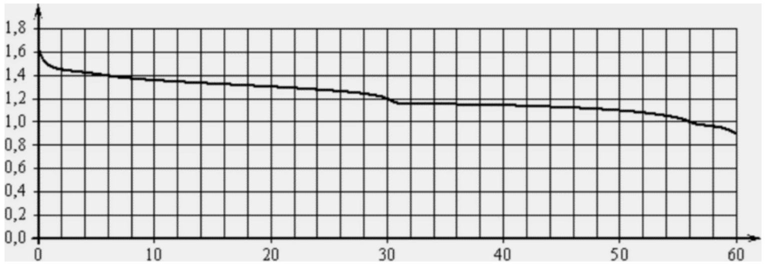
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В доме, в котором живёт Петя, один подъезд. На каждом этаже по шесть квартир. Петя живёт в квартире 45. На каком этаже живёт Петя?

Ответ: ___________________________.

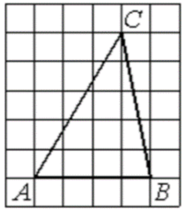
2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси – напряжение в вольтах. Определите по рисунку, на сколько вольт упадёт напряжение с 6-го по 56-й час работы фонарика.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 170925

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



Ответ: ____________________________.

4 Фабрика выпускает сумки. В среднем 19 сумок из 160 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

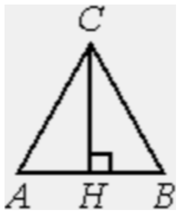
Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{5x+8} = \frac{1}{3}.$$

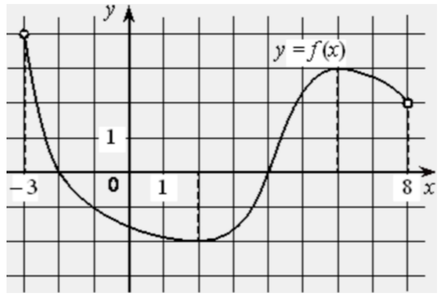
Ответ: ____________________________.

6 В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $45\sqrt{3}$. Найдите AB.



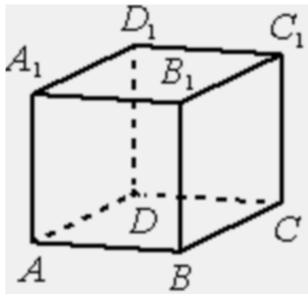
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку из отрезка $[-2; 5]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ____________________________.

8 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми CD_1 и AD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ____________________________.

9 Найдите значение выражения

$$20^{-3,9} \cdot 5^{2,9} : 4^{-4,9}.$$

Ответ: ____________________________.

10 В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет $R_1 = 60$ Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого R_2 (в Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление вычисляется по формуле $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в неё должно быть не меньше 10 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 электрообогревателя. Ответ дайте в омах.

Ответ: ___________________________.

11 В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = 19 + 192x - x^3$ на отрезке $[-8; 8]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.
а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

15 Решите неравенство
$$\frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0{,}5.$$

16 В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.
а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.
б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 170925

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

18 Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение
$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$
имеет более трёх различных решений.

19 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора Трижды победитель олимпиады по высшей математике среди всех студентов Тольяттинского государственного университета
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	8
2	0,4
3	2
4	0,88
5	-1
6	90
7	2
8	90
9	0,8
10	12
11	16
12	-1005
13	а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, -\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$
14	2,4
15	$\{0\}\cup(1;2)$
16	$\frac{2}{9}$
17	36
18	$0<a<1$
19	а) Да, например, 1 2 3 4, б) 44, в) 3; 6

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 Решение задания

а) Решите уравнение
$6\sin^2 x+7\cos x-1=0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right].$

а)

Основное тригонометрическое тождество
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$6\cdot(1-\cos^2 x)+7\cos x-1=0$
$6-6\cos^2 x+7\cos x-1=0$
$-6\cos^2 x+7\cos x+5=0$

Пусть $\cos x=t$
$-6t^2+7t+5=0$
$D=b^2-4ac=49+120=169=13^2$

$$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-7+13}{-12} = -\frac{1}{2}$$
$$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-7-13}{-12} = \frac{5}{3} \text{ (не подходит)}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$$
$$x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$$

б)

Подберём корни для $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -3$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 6\pi = -\frac{16\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = -2$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{10\pi}{3} \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{14\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{8\pi}{3} \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$

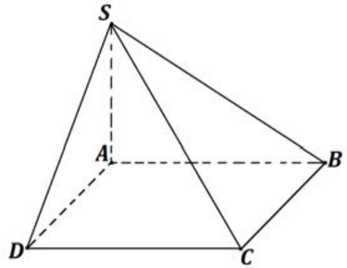
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Решение задания

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3, SB = 5, SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

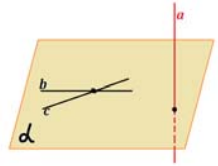
а)



Заметим, что в $\triangle ABS$ выполняется теорема Пифагора:
$$SB^2 = SA^2 + AB^2$$
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$
=> $\triangle ABS$ – прямоугольный и $\angle SAB = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Заметим, что в $\triangle ADS$ выполняется теорема Пифагора:
$$SD^2 = SA^2 + AD^2$$
$$(3\sqrt{5})^2 = 3^2 + 6^2$$
$$45 = 9 + 36$$
$$45 = 45$$
=> $\triangle ADS$ – прямоугольный и $\angle SAD = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$\begin{matrix} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{matrix}$ (т. к. $\triangle ABS$ и $\triangle ADS$ – прямоугольные)

$AB \cap AD = A$

$=> SA \perp (ABC)$

$=> SA$ – высота пирамиды

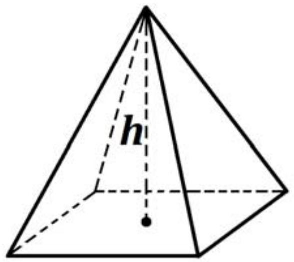
■

б)

Расстояние от вершины A до плоскости SBC – это высота пирамиды $SABC$ с основанием SBC

Пусть h – искомое расстояние

Объём пирамиды



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$$

Найдём объём пирамиды $SABC$ двумя способами:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AS$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot h$$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$ (по теореме Пифагора)

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + \sqrt{52}^2} = \sqrt{61}$ (по теореме Пифагора)

Заметим, что в $\triangle SBC$ выполняется теорема Пифагора:

$SC^2 = SB^2 + BC^2$

$\sqrt{61}^2 = 5^2 + 6^2$

$61 = 25 + 36$

$61 = 61$

$=> \triangle SBC$ – прямоугольный и $\angle SBC = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AS = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot 3 = 12$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot h = 5h$$

$5h = 12$

$h = 2{,}4$

Ответ: 2,4

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решение задания

Решите неравенство
$$\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27}\geq 0{,}5.$$

Пусть $3^x = t$

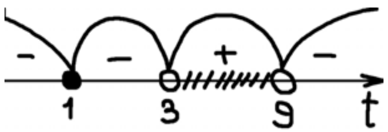
$$\frac{13-5t}{t^2-12t+27}-\frac{1}{2}\geq 0$$

$$\frac{26-10t-t^2+12t-27}{2(t^2-12t+27)}\geq 0$$

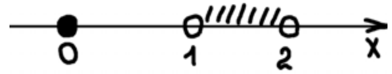
$$\frac{-t^2+2t-1}{2(t^2-12t+27)}\geq 0$$

$$\frac{-(t-1)^2}{2(t^2-12t+27)}\geq 0$$

$t=1$	$t^2-12t+27\neq 0$ $D=(-12)^2-4\cdot 1\cdot 27=36$ $t_1\neq \frac{12+6}{2}=9$ $t_2\neq \frac{12-6}{2}=3$



$3^x=1$ $3^x=3^0$ $x=0$	$3<3^x<9$ $3^1<3^x<3^2$ $1<x<2$



Ответ: $\{0\}\cup(1;2)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

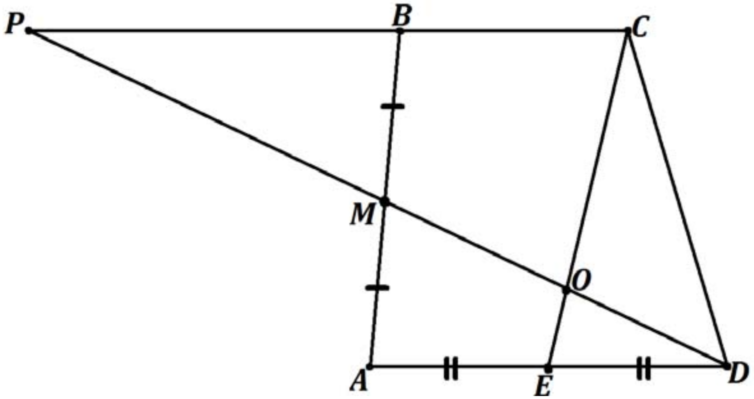
16 Решение задания

В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC=3$, $AD=4$.

а)



Докажем, что $S_{AMD} = S_{CED}$ и если они будут равны, то
$S_{AMOE} = S_{COD}$

Пусть h — высота, опущенная из вершины C на ED в $\triangle CED$
Тогда $\frac{h}{2}$ — высота, опущенная из вершины M на AD в $\triangle AMD$

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{h}{2} = \frac{AD \cdot h}{4}$$
$$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h = \frac{AD \cdot h}{4}$$

$S_{AMD} = S_{CED}$
$S_{AMOE} + S_{DOE} = S_{COD} + S_{DOE}$
=>
$S_{AMOE} = S_{COD}$
■

б)
$\frac{S_{AMOE}}{S_{ABCD}}$ —?

Проще найти S_{COD}, чем S_{AMOE}

Пусть $DM \cap BC = P$

$\triangle AMD = \triangle PBM$ по стороне и двум прилежащим к ней углам
$$\begin{pmatrix} BM = AM \\ \angle PMB = \angle AMD - \text{вертикальные} \\ \angle PBM = \angle MAD - \text{накрест лежащие} \end{pmatrix}$$

=>
$PB = AD = 4$

$\triangle COP = \triangle DOE$ по двум углам
$$\begin{pmatrix} \angle POC = \angle DOE - \text{вертикальные} \\ \angle PCO = \angle DEO - \text{накрест лежащие} \end{pmatrix}$$

=>
$$\frac{CO}{EO} = \frac{CP}{DE}$$
$$\frac{CO}{EO} = \frac{BC + PB}{\frac{1}{2} \cdot AD}$$
$$\frac{CO}{EO} = \frac{3 + 4}{\frac{1}{2} \cdot 4}$$
$$\frac{CO}{EO} = \frac{7}{2}$$

Пусть
$EO = 2x$
$CO = 7x$
Тогда
$CE = 9x$

h — высота в $\triangle CED$
$\frac{2}{9}h$ — высота в $\triangle DEO$

$S_{COD} = S_{CED} - S_{DEO}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h = h$

$S_{DEO} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot \frac{2}{9} h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} h = \frac{2}{9} h$

$S_{COD} = h - \frac{2}{9} h = \frac{7}{9} h$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$

$S_{ABCD} = \frac{3 + 4}{2} \cdot h = \frac{7}{2} h$

$\frac{S_{COD}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9} h : \frac{7}{2} h = \frac{2}{9}$

$\frac{S_{AMOE}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{COD}}{S_{ABCD}}$

=>

$\frac{S_{AMOE}}{S_{ABCD}} = \frac{2}{9}$

Ответ: $\frac{2}{9}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Решение задания

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S **— целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot S = 1{,}15 \cdot S$

01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}8 \cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}15 \cdot S - 0{,}8 \cdot S = 0{,}35 \cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot S = 0{,}92 \cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}5 \cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}92 \cdot S - 0{,}5 \cdot S = 0{,}42 \cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}15 \cdot 0{,}5 \cdot S = 0{,}575 \cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	$0{,}1 \cdot S$

=>

01.04.2019	$0{,}575 \cdot S - 0{,}1 \cdot S = 0{,}475 \cdot S$

20209 год

01.01.2020	$1{,}15 \cdot 0{,}1 \cdot S = 0{,}115 \cdot S$
01.04.2020	
01.07.2020	0

=>

01.04.2020	$0{,}115 \cdot S - 0 = 0{,}115 \cdot S$

Общая сумма выплат должна быть меньше 50 млн рублей (по условию)

=>

$0{,}35 \cdot S + 0{,}42 \cdot S + 0{,}475 \cdot S + 0{,}115 \cdot S < 50$ млн

$1{,}36 \cdot S < 50$

$S < \frac{5000}{136}$

$S < \frac{625}{17}$

$S < 36\frac{13}{17}$

Требуется найти наибольшее подходящее целое S

=>

$S = 36$

Ответ: 36

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Решение задания

Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение
$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$
имеет более трёх различных решений.

$(x^2)^5 + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$

$(x^2)^5 + x^2 = -(a - 2|x|)^5 + 2|x| - a$

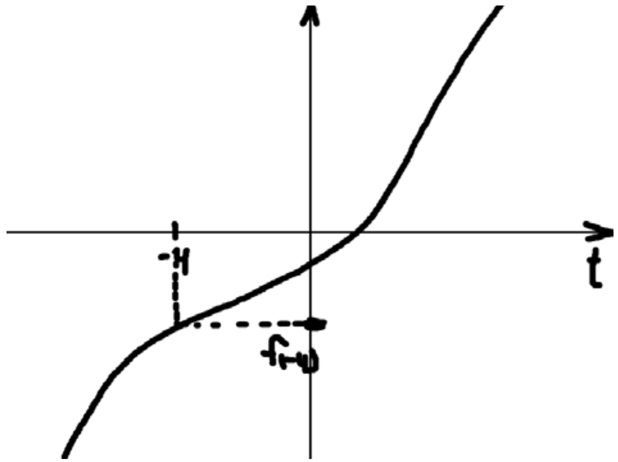
$(x^2)^5 + x^2 = (2|x| - a)^5 + (2|x| - a)$

Пусть
$x^2 = b$
$2|x| - a = c$

$b^5 + b = c^5 + c$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^5 + t$
$f(b) = b^5 + b$
$f(c) = c^5 + c$
=>
$f(b) = f(c)$

Исследуем функцию $f(t) = t^5 + t$ на монотонность:
$f'(t) = 5t^4 + 1$
Заметим, что данная производная всегда положительна при любом t
=>
Функция $f(t)$ возрастает на всей числовой прямой t
Например,



Найдём $f(-4)$
Очевидно, что значений функции в любой другой точке будет отличаться от $f(-4)$
=>
$f(b) = f(c)$
=>
$b = c$

$x^2 = 2|x| - a$
$x^2 - 2|x| + a = 0$
$|x|^2 - 2|x| + a = 0$
Данное уравнение должно иметь ≥ 4 решений

Пусть $|x| = t$
$t^2 - 2t + a = 0$

Если
$t^2 - 2t + a = 0$ не имеет корней
$|x|^2 - 2|x| + a = 0$ не имеет корней

Если
$t^2 - 2t + a = 0$ имеет 1 положительный корень, то
$|x|^2 - 2|x| + a = 0$ имеет 2 корня

Если
$t^2 - 2t + a = 0$ имеет 2 положительных корня, то
$|x|^2 - 2|x| + a = 0$ имеет 4 корня
(только такой вариант нам подходит)

=>
$D > 0$
$4 - 4a > 0$
$4a < 4$
$a < 1$

$$t_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - 4a}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{1 - a}}{2} = 1 + \sqrt{1 - a}$$
$$t_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - 4a}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{1 - a}}{2} = 1 - \sqrt{1 - a}$$

Заметим, что t_1 является положительным при любом $a < 1$
=>
t_1 даст нам x_1 и x_2 (противоположные числа из-за модуля)

t_2 должно быть положительным
=>
$t_2 > 0$
$1 - \sqrt{1 - a} > 0$
$\sqrt{1 - a} < 1$
$0 < 1 - a < 1$
$-1 < -a < 0$
$0 < a < 1$
=>
t_2 даст нам x_3 и x_4 (противоположные числа из-за модуля) при любом $0 < a < 1$

Ответ: $0 < a < 1$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Решение задания

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

Арифметическая прогрессия состоит из натуральных чисел
=>
$a_1 \geq 1$
$d \geq 1$

а)

---

n-й член арифметической прогрессии
$a_n = a_1 + d(n - 1)$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Если $n = 3$, то
$a_3 = a_1 + d(3 - 1) = a_1 + 2d$

$$S_3 = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 10$$

$(2a_1 + 2d) \cdot 3 = 20$
$(a_1 + d) \cdot 3 = 10$
$3a_1 + 3d = 10$
=>
Нет решений в натуральных числах

Если $n = 4$, то
$a_4 = a_1 + d(4 - 1) = a_1 + 3d$

$$S_4 = \frac{a_1 + a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 10$$

$(2a_1 + 3d) \cdot 2 = 10$
$4a_1 + 6d = 10$
=>
$a_1 = 1$
$d = 1$

Получаем прогрессию:
1 2 3 4

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
=>
Может

б)
$S_n < 1000$

$$\frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n < 1000$$

$$\big(2a_1 + d(n-1)\big) \cdot n < 2000$$

Если первая скобка имеет значение 100, то $n < 20$

Если первая скобка имеет значение 10, то $n < 200$
=>
Чем меньше значение скобки – тем больше n
=>
Нам нужно брать как можно меньшие значения a_1 и d, т.к. мы ищем наибольшее значение n

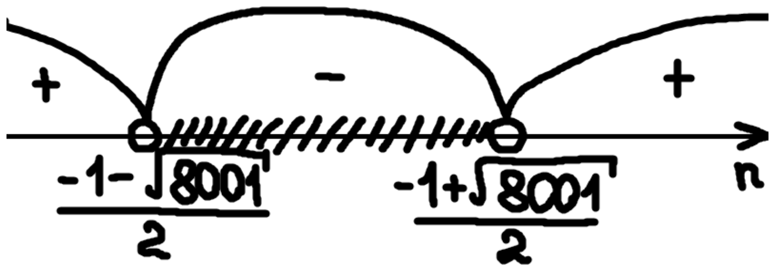
Пусть
$a_1 = 1$
$d = 1$

Тогда
$$\big(2 \cdot 1 + 1 \cdot (n-1)\big) \cdot n < 2000$$

$$(2 + n - 1) \cdot n < 2000$$

$$(n + 1) \cdot n < 2000$$

$n^2 + n - 2000 < 0$
$n^2 + n - 2000 = 0$
$D = 8001$
$$n_1 = \frac{-1 - \sqrt{8001}}{2}$$
$$n_2 = \frac{-1 + \sqrt{8001}}{2}$$



$$\frac{-1 - \sqrt{8001}}{2} < n < \frac{-1 + \sqrt{8001}}{2}$$

Отбросим левую границу двойного неравенства, т.к. $n \geq 3$ по условию
=>

$$3 \leq n < \frac{-1+\sqrt{8001}}{2}$$

Оценим значение дроби:
$89 < \sqrt{8001} < 90$
$88 < -1+\sqrt{8001} < 89$
$44 < \frac{-1+\sqrt{8001}}{2} < 44{,}5$
=>
Наибольшее целое n, удовлетворяющее неравенству

$$3 \leq n < \frac{-1+\sqrt{8001}}{2}$$

это $n = 44$

Проверим:
$a_1 = 1$
$d = 1$
$n = 44$

$S_{44} < 1000$

$\frac{1+1+1\cdot(44-1)}{2}\cdot 44 < 1000$
$(2+43)\cdot 22 < 1000$
$990 < 1000$
=>
$n = 44$ подходит

Проверим
$a_1 = 1$
$d = 1$
$n = 45$

$S_{45} < 1000$

$\frac{1+1+1\cdot(45-1)}{2}\cdot 45 < 1000$
$23\cdot 45 < 1000$
$1035 < 1000$
=>
противоречие
=>
$n = 45$ не подходит

в)
$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n = 129$$

$$\big(2a_1 + d(n-1)\big)\cdot n = 258$$

Разложим 258 на простые множители:

$$258 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 43$$

Есть несколько вариантов какое значение может принимать n:
$n = 1$
$n = 2$
Не подходят, т.к. по условию $n \geq 3$
Вариант #1
Если $n = 3$
$\big(2a_1 + d(3-1)\big)\cdot 3 = 258$
$6a_1 + 6d = 258$
$a_1 + d = 43$
Подходит, например
$a_1 = 1$
$d = 42$
1 43 85
Вариант #2
Если $n = 6$
$\big(2a_1 + d(6-1)\big)\cdot 6 = 258$
$12a_1 + 30d = 258$
$2a_1 + 5d = 43$
Подходит, например

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 170925

$a_1 = 19$
$d = 1$
19 20 21 22 23 24
Вариант #3
Если $n = 43$
$(2a_1 + d(43 - 1)) \cdot 43 = 258$
$86a_1 + 1806d = 258$
Не подходит
Вариант #4
Если $n = 86$
$(2a_1 + d(86 - 1)) \cdot 86 = 258$
$172a_1 + 7310d = 258$
Не подходит
Вариант #5
Если $n = 129$
$(2a_1 + d(129 - 1)) \cdot 129 = 258$
Не подходит
Вариант #6
Если $n = 258$
$(2a_1 + d(258 - 1)) \cdot 258 = 258$
Не подходит

Ответ: а) Да, например, 1 2 3 4, б) 44, в) 3; 6

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4