**19** Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$ *хорошим*?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$ *хорошим*?

в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества

$$\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}?$$

Решение.

а) Разобьём множество $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$ на 50 пар, сумма чисел в каждой из которых равна 499: $\{200; 299\}$, $\{201; 298\}$, …

Множество $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$ можно разбить на два подмножества, в каждом из которых по 25 таких пар. Значит, сумма чисел в этих двух подмножествах одинакова и множество $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$ является *хорошим*.

б) Заметим, что $2^{100} > 2^{100} - 1 = 2^{99} + 2^{98} + \dots + 4 + 2 + 1$. Поэтому сумма чисел в подмножестве множества $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$, содержащем $2^{100}$, всегда больше суммы остальных чисел, следовательно, множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$ не является *хорошим*.

в) Заметим, что четырёхэлементное множество является *хорошим* в двух случаях: либо одно число является суммой трёх других, либо множество содержит две пары чисел с равными суммами.

Подмножества множества $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$, удовлетворяющие первому случаю, — это $\{1; 2; 4; 7\}$, $\{2; 4; 5; 11\}$.

Рассмотрим второй случай. Заметим, что числа 2 и 4 либо одновременно входят в *хорошее* четырёхэлементное подмножество, либо одновременно не входят в него, поскольку сумма всех чисел *хорошего* подмножества чётна.

Если 2 и 4 входят в подмножество, то либо сумма двух других чисел равна 6 — это единственное подмножество $\{1; 2; 4; 5\}$, либо разность двух других чисел равна 2. Получаем *хорошие* подмножества:

$$\{1; 2; 4; 5\}, \{2; 4; 5; 7\}, \{2; 4; 7; 9\}, \{2; 4; 9; 11\}.$$

Если 2 и 4 не входят в подмножество, то *хорошее* подмножество лежит в множестве $\{1; 5; 7; 9; 11\}$. Получаем *хорошие* подмножества:

$$\{1; 5; 7; 11\}, \{5; 7; 9; 11\}.$$

Всего получилось 8 *хороших* подмножеств.

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— обоснованное решение п. *а*;<br>— обоснованное решение п. *б*;<br>— в п. *в* доказано, что множество содержит не более восьми *хороших* четырёхэлементных подмножеств;<br>— в п. *в* построены примеры восьми *хороших* четырёхэлементных подмножеств | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**19** На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа $a$ и $b$, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a+b$ и $2a-1$, или $a+b$ и $2b-1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 13.

б) Может ли после 200 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 400?

в) Сделали 513 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Решение.

а) Число 13 могло получиться в результате следующей последовательности ходов:

$$(2;3);\ (3;5);\ (5;8);\ (9;13).$$

б) После первого хода на доске будет записано либо 3 и 5, либо 5 и 5. Заметим, что после каждого последующего хода каждое из двух чисел увеличивается хотя бы на 2. Значит, после 200 ходов меньшее из двух чисел будет не меньше $3+199\cdot 2=401$. Значит, после 200 ходов на доске не может оказаться число 400.

в) Пусть в какой-то момент на доске была написана пара чисел $a$ и $b$, причём $b>a$. Тогда после хода на доске будет написано либо $2a-1$ и $a+b$, либо $a+b$ и $2b-1$. В первом из этих случаев разность чисел равна $b-a+1$, а во втором $b-a-1$. То есть после каждого хода разность большего и меньшего чисел изменяется на 1, причём для любых двух различных чисел можно сделать ход так, чтобы разность увеличилась, и так, чтобы разность уменьшилась.

Изначально разность большего и меньшего чисел была равна 1, а после каждого хода её чётность меняется. Значит, после 513 ходов разность должна быть чётной. Поэтому наименьшая возможная разность — это 2.

Например, если сначала сделать 257 ходов, увеличивающих разность, а затем 256 ходов, уменьшающих разность, то получится два числа, разность которых равна 2.

Ответ: а) например, $(2;3)$; $(3;5)$; $(5;8)$; $(9;13)$; б) нет; в) 2.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— пример в п. *а*;<br>— обоснованное решение п. *б*;<br>— в п. *в* доказано, что разность больше 1;<br>— в п. *в* приведена конструкция примера, обеспечивающая разность 2 | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**19** На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Решение.

а) Пример последовательных 5 ходов (стёрты тройки чисел):

$$(1;6;11);\ (2;7;12);\ (3;8;13);$$

$$(4;9;14);\ (5;10;15).$$

б) Пусть сделано 10 ходов, то есть стёрли все числа. С одной стороны, сумма чисел 1, 2, ..., 30 равна $\frac{1+30}{2}\cdot 30=465$. С другой стороны, каждая из сумм стираемых трёх чисел меньше 35, значит, сумма всех стёртых за 10 ходов чисел меньше 350. Противоречие. Значит, нельзя сделать 10 ходов.

в) Пусть можно сделать 7 ходов. Тогда сумма стёртых за 7 ходов чисел не меньше

$$1+2+3+\ldots+20+21=231.$$

С другой стороны, эта сумма не больше суммы семи различных натуральных чисел, меньших 35, то есть не больше

$$34+33+32+31+30+29+28=217.$$

Значит, невозможно сделать 7 ходов.

Пример последовательных 6 ходов (стёрты тройки чисел):

$$(21;12;1);\ (20;11;2);\ (19;10;3);$$

$$(18;9;4);\ (17;8;5);\ (16;7;6).$$

Ответ: а) например, стереть числа:

$$(1;6;11);\ (2;7;12);\ (3;8;13);$$

$$(4;9;14);\ (5;10;15);$$

б) нет; в) 6.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— пример в п. *а*;<br>— обоснованное решение п. *б*;<br>— искомая оценка в п. *в*;<br>— пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**19** Последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ $(n\geq 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма которых равна 50.

б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n=10$?

Решение.

а) Например, последовательность

$$1;\ 12;\ 17;\ 20$$

удовлетворяет условию задачи, а сумма её членов равна 50.

б) Например, последовательность

$$1;\ 12;\ 20;\ 20;\ 12;\ 1$$

удовлетворяет условию задачи.

в) Для $2 \le k \le 9$ выполнено неравенство

$$\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} < a_k;\ a_{k-1}+a_{k+1} < 2a_k;\ a_{k+1}-a_k < a_k - a_{k-1}.$$

То есть последовательность разностей соседних членов последовательности убывает.

Пусть $d_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда

$$d_k \le d_{k-1} - 1 \le d_{k-2} - 2 \le \ldots \le d_1 - k + 1;$$

$$a_1 = a_k - d_{k-1} - \ldots - d_1 \le a_k - (d_k + 1) - \ldots - (d_k + k - 1) = a_k - (k-1)d_k - \frac{k(k-1)}{2};$$

$$a_{10} = a_k + d_k + \ldots + d_9 \le a_k + d_k + (d_k - 1) + \ldots + (d_k - 9 + k) =$$

$$= a_k + (10-k)d_k - \frac{(9-k)(10-k)}{2}.$$

Заметим, что $a_1 \ge 1$ и $a_{10} \ge 1$, откуда

$$a_k - (k-1)d_k - \frac{k(k-1)}{2} \ge 1,\ a_k + (10-k)d_k - \frac{(9-k)(10-k)}{2} \ge 1.$$

Умножив первое неравенство на $10-k$, а второе на $k-1$ и сложив их, получаем:

$$9a_k - \frac{9(k-1)(10-k)}{2} \ge 9;\ a_k \ge \frac{(k-1)(10-k)}{2} + 1.$$

Таким образом, $a_1 \ge 1$, $a_2 \ge 5$, $a_3 \ge 8$, $a_4 \ge 10$, $a_5 \ge 11$, $a_6 \ge 11$, $a_7 \ge 10$, $a_8 \ge 8$, $a_9 \ge 5$, $a_{10} \ge 1$, а их сумма не меньше 70.

Последовательность 1; 5; 8; 10; 11; 11; 10; 8; 5; 1 удовлетворяет условию задачи, а сумма её членов равна 70.

Ответ: а) например, 1; 12; 17; 20; б) да; в) 70.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— пример в п. *а*;<br>— обоснованное решение п. *б*;<br>— в п. *в* приведён пример последовательности, сумма членов которой равна 70;<br>— в п. *в* обосновано, что не существует последовательности, сумма членов которой меньше 70 | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**19** В шахматы можно выиграть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» — процент побед, округлённый до целого, «ничьи» — процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17.)

а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?

б) Может ли после выигранной партии увеличиться показатель «поражений»?

в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

Решение.

а) Если из 6 партий шахматист выиграл одну, то показатель «победы» равен 17.

б) Если в первых 200 партиях были выиграны 100, сыграны вничью 5, а проиграны 95, то показатель «побед» равен 50, показатель «ничьих» равен 3, а показатель «поражений» равен 47. Если следующая партия была выиграна, то показатель «побед» остаётся равным 50, показатель «ничьих» становится равным 2, а показатель «поражений» оказывается равным 48.

в) Если партий было 49 или меньше, то суммарный процент побед и ничьих меньше 98. При округлении числа происходит увеличение не более чем на 0,5, поэтому сумма показателей «побед» и «ничьих» меньше 99. Значит, показатель «поражений» больше 1.

Если партий было ровно 50, то проценты побед и ничьих целые, округления не происходит. Значит, показатель «поражений» больше 1.

Пусть была сыграна 51 партия, первая из которых была проиграна, а среди остальных 50 было 12 побед и 38 ничьих. Тогда показатель «побед» равен 24, показатель «ничьих» равен 75, а показатель «поражений» равен 1.

Ответ: а) да; б) да; в) 51.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— обоснованное решение п. *а*;<br>— обоснованное решение п. *б*;<br>— искомая оценка в п. *в*;<br>— пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

---

**19** Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

Решение.

а) Например, частное числа 339 и произведения его цифр равно $\frac{113}{27}$.

б) Пусть это частное равно $\frac{125}{27}$. Тогда число делится на 25, а его две последние цифры равны 2 и 5 или 7 и 5. Но произведение цифр числа должно делиться на 27. Ни 2, ни 5, ни 7 не делятся на 3, а первая цифра не больше 9. Значит, частное не может равняться $\frac{125}{27}$.

в) Если число и произведение его цифр имеют общий делитель, больший 1, то частное числа и произведения его цифр не превосходит $\frac{999}{54} < \frac{500}{27}$. Если произведение цифр числа равняется 27, то число состоит из единиц, троек и девяток. Наибольшее такое число с произведением цифр 27 равняется 931. Частное этого числа и произведения его цифр равняется $\frac{931}{27}$.

Ответ: а) например, 339; б) нет; в) $\frac{931}{27}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно построен пример в п. *а* и обоснованно получены верные ответы в п. *б* и п. *в* | 4 |
| Обоснованно получен ответ в п. *в* и один из следующих результатов:<br>— пример в п. *а*;<br>— обоснованное решение п. *б* | 3 |
| Верно построен пример в п. *а* и обоснованно получен ответ в п. *б*<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в п. *в* | 2 |
| Верно построен пример в п. *а*<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в п. *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**19** На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно $A$, среднее арифметическое чисел во второй группе равно $B$. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

Решение.

а) Среднее арифметическое всех чисел равно 4. Разобьём исходные числа на две группы: в первой группе все «5», во второй — все «3» и «4». Тогда

$$A=5;\ B=\frac{30+40}{20}=3{,}5;\ \frac{A+B}{2}=4{,}25>4.$$

б) Пусть числа разбиты на две группы по 15 чисел в каждой; сумма чисел в первой группе равна $S_1$, а во второй группе — $S_2$. Тогда

$$A=\frac{S_1}{15},\ B=\frac{S_2}{15},\ \frac{A+B}{2}=\frac{\frac{S_1}{15}+\frac{S_2}{15}}{2}=\frac{S_1+S_2}{30},$$

что равно среднему арифметическому всех чисел.

в) Если в каждой из двух групп количество «3» равно количеству «5», то

$$A=B=4 \text{ и } \frac{A+B}{2}=4.$$

В противном случае в одной из групп количество «3» больше количества «5». Значит, среднее арифметическое чисел в этой группе меньше 4. Можно считать, что это первая группа. Среди дробей, меньших 4, знаменатель которых не превосходит 29, наибольшая дробь — это $3\frac{28}{29}$, то есть $A$ не превосходит $3\frac{28}{29}$. Очевидно, что $B$ не может быть больше 5. Значит,

$$\frac{A+B}{2}\le\frac{3\frac{28}{29}+5}{2}=4\frac{14}{29}.$$

Если в одной группе одна «5», а в другой все остальные числа, то

$$A=5;\ B=3\frac{28}{29};\ \frac{A+B}{2}=4\frac{14}{29}.$$

Ответ: а) например, в первой группе все «5», во второй — все «3» и «4»;

в) $4\frac{14}{29}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— пример в п. *а*;<br>— верное доказательство п. *б*;<br>— искомая оценка в п. *в*;<br>— пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**19** Последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_6$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть $M_k$ — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме $k$-го. Известно, что $M_1=1,\ M_2=2$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3=1{,}6$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3=3$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $M_3$.

Решение.

а) Например, последовательность

$$5;\ 0;\ 2;\ 1;\ 1;\ 1$$

удовлетворяет условию задачи.

б) Если $M_1 = 1$, $M_3 = 3$, получаем:

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 = 15,\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 5,$$

откуда $a_1 - a_3 = 10$, что невозможно. Значит, не существует такой последовательности, для которой $M_3 = 3$.

в) Поскольку $M_1 = 1$, получаем:

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 5,$$

а так как $a_1 - a_3 \le 9$, получаем:

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 \le 14,$$

то есть $M_3 \le 2{,}8$.

В последовательности 9; 4; 0; 1; 0; 0 имеем:

$$M_1 = 1,\ M_2 = 2,\ M_3 = 2{,}8.$$

Ответ: а) например, 5; 0; 2; 1; 1; 1; б) нет; в) 2,8.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— пример в п. *а*;<br>— обоснованное решение п. *б*;<br>— искомая оценка в п. *в*;<br>— пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |