18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

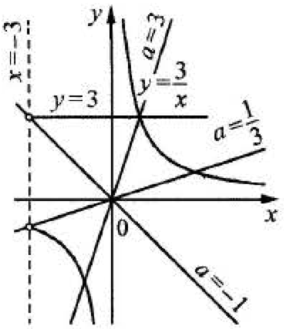
$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0, \\ y=ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-3)(xy-3)}{\sqrt{x+3}}=0.$$



При $x \le -3$ левая часть не имеет смысла. При $x > -3$ уравнение задаёт прямую $y=3$ и гиперболу $y=\dfrac{3}{x}$ (см. рисунок).

При каждом значении a уравнение $y=ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через начало координат.

При $x > -3$ такая прямая пересекает прямую $y=3$ при $a<-1$ и $a>0$, пересекает правую ветвь гиперболы $y=\dfrac{3}{x}$ при $a>0$, пересекает левую ветвь гиперболы $y=\dfrac{3}{x}$ при $a>\dfrac{1}{3}$. При этом прямая $y=ax$ проходит через точку пересечения прямой $y=3$ и гиперболы $y=\dfrac{3}{x}$ при $a=3$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y=3$ и гиперболы $y=\dfrac{3}{x}$ с прямой $y=ax$ при условии $x>-3$.

Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при

$$0<a\le\frac{1}{3};\ a=3.$$

Ответ: $0<a\le\dfrac{1}{3}$; $a=3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=0$ и/или $a=\dfrac{1}{3}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$ множества значений a, возможно, с включением/исключением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гиперболы и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2+x-a$$

имеет ровно три различных корня.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению $x^4-x^2+a^2=\left(x^2+x-a\right)^2$ при условии $x^2+x-a\ge 0$.

Решим уравнение $x^4-x^2+a^2=\left(x^2+x-a\right)^2$:

$$x^4-x^2+a^2=x^4+2x^3+(1-2a)x^2-2ax+a^2;$$

$$x^3+(1-a)x^2-ax=0;\ x(x+1)(x-a)=0,$$

откуда $x=0$, $x=-1$ или $x=a$.

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $x^2+x-a\ge 0$.

Рассмотрим условия совпадения корней. При $a=0$ и $a=-1$ уравнение имеет не более двух различных корней. При остальных значениях a числа 0, -1, a различны.

При $x=0$ получаем:

$$x^2+x-a=-a.$$

Это выражение неотрицательно при $a\le 0$.

При $x=-1$ получаем:

$$x^2+x-a=-a.$$

Это выражение неотрицательно при $a\le 0$.

При $x=a$ получаем: $x^2+x-a=a^2\ge 0$ при всех значениях a.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при

$$a<-1;\ -1<a<0.$$

Ответ: $a<-1$; $-1<a<0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого включением только одной точки $a=0$ или $a=-1$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-\infty;0]$ множества значений a	2
Получены корни уравнения $x^4-x^2+a^2=\left(x^2+x-a\right)^2$: $x=0$, $x=-1$, $x=a$; и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2+x-a>0$ $\left(x^2+x-a\ge 0\right)$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2^x-a=\sqrt{4^x-a}$$

имеет единственный корень.

Решение.

Исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда уравнение $t-a=\sqrt{t^2-a}$ имеет единственный положительный корень.

При $t<a$ левая часть полученного уравнения отрицательная, а правая неотрицательная, поэтому полученное уравнение не имеет корней, меньших a.

При $t\ge a$ получаем:

$$t^2-2at+a^2=t^2-a;\ 2at=a^2+a.$$

При $a=0$ любое положительное значение t является корнем уравнения.

При $a\ne 0$ получаем единственный корень: $t=\dfrac{a+1}{2}$. Для этого корня должны выполняться условия $t\ge a$ и $t>0$.

Условие $\dfrac{a+1}{2}\ge a$ выполняется при $a\le 1$.

Условие $\dfrac{a+1}{2}>0$ выполняется при $a>-1$.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень при

$$-1<a<0;\ 0<a\le 1.$$

Ответ: $-1<a<0$; $0<a\le 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=-1$ и/или $a=1$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-1;1)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию линейного уравнения с параметром относительно новой переменной **ИЛИ** получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

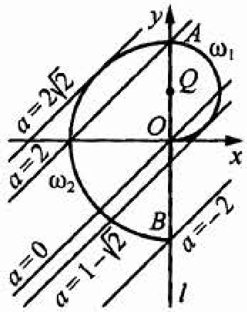
18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x\left(x^2+y^2-y-2\right)=|x|(y-2), \\ y=x+a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.



Рассмотрим три случая.

1) Если $x>0$, то получаем уравнение

$$x\left(x^2+y^2-y-2\right)=x(y-2);$$

$$x^2+y^2-2y=0;\ x^2+(y-1)^2=1.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $Q(0;1)$ и радиусом 1.

2) Если $x=0$, то координаты любой точки прямой $x=0$ удовлетворяют уравнению.

3) Если $x<0$, то получаем уравнение

$$x\left(x^2+y^2-y-2\right)=x(2-y);\ x^2+y^2-4=0;\ x^2+y^2=4.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом 2.

Таким образом, в первом случае получаем дугу ω_1 окружности $x^2+(y-1)^2=1$ с концами в точках O и $A(0;2)$, во втором — прямую l, задаваемую уравнением $x=0$, в третьем — дугу ω_2 окружности $x^2+y^2=4$ с концами в точках A и $B(0;-2)$ (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. При каждом значении a оно задаёт прямую m, параллельную прямой $y=x$ или совпадающую с ней.

Прямые m проходят через точки B, O и A при $a=-2$, $a=0$ и $a=2$ соответственно.

При $a=1-\sqrt{2}$ и $a=2\sqrt{2}$ прямые m касаются дуг ω_1 и ω_2 соответственно.

Таким образом, прямая m пересекает прямую l при любом значении a, имеет одну общую точку с дугой ω_1 при $a=1-\sqrt{2}$ и $0<a\le 2$, имеет две общие точки с дугой ω_1 при $1-\sqrt{2}<a\le 0$, имеет одну общую точку с дугой ω_2 при $-2\le a<2$ и $a=2\sqrt{2}$, имеет две общие точки с дугой ω_2 при $2\le a<2\sqrt{2}$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой l и дуг ω_1 и ω_2 с прямой m. Таким образом, исходная система имеет ровно три решения при

$$a=1-\sqrt{2};\ 0\le a<2;\ 2<a<2\sqrt{2}.$$

Ответ: $a=1-\sqrt{2}$; $0\le a<2$; $2<a<2\sqrt{2}$.

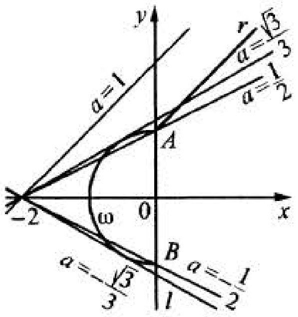
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=2$ и/или $a=0$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $(0;2)$ или $\left(2;2\sqrt{2}\right)$; возможно, с включением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x\left(x^2+y^2+y-x-2\right)=|x|\left(x^2+y^2-y+x\right), \\ y=a(x+2) \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.



Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим три случая.

1) Если $x>0$, то получаем уравнение

$$x\left(x^2+y^2+y-x-2\right)=x\left(x^2+y^2-y+x\right);$$

$$2y-2x-2=0;\ y=x+1.$$

Полученное уравнение задаёт прямую $y=x+1$.

2) Если $x=0$, то координаты любой точки прямой $x=0$ удовлетворяют уравнению.

3) Если $x<0$, то получаем уравнение

$$x\left(x^2+y^2+y-x-2\right)=x\left(y-x-x^2-y^2\right);\ 2x^2+2y^2-2=0;\ x^2+y^2=1.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом 1.

Таким образом, в первом случае мы получаем луч r с началом в точке $A(0;1)$, во втором — прямую l, задаваемую уравнением $x=0$, в третьем — дугу ω окружности $x^2+y^2=1$ с концами в точках A и $B(0;-1)$ (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. При каждом значении a оно задаёт прямую m, которая проходит через точку $(-2;0)$ и угловой коэффициент которой равен a.

Прямые m проходят через точки B и A при $a=-\frac{1}{2}$ и $a=\frac{1}{2}$ соответственно.

При $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ прямые m касаются дуги ω.

Таким образом, прямая m пересекает прямую l при любом значении a, пересекает луч r при $\frac{1}{2}\le a<1$, имеет одну общую точку с дугой ω при $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ и $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, имеет две общие точки с дугой ω при $-\frac{\sqrt{3}}{3}<a\le-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}\le a<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой l, луча r и дуги ω с прямой m. Таким образом, исходная система имеет ровно три решения при

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}<a<-\frac{1}{2};\ a=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{3}<a<-\frac{1}{2};\ a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=-\frac{1}{2}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{2}\right)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуги окружности, луча и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}=a$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Левая часть исходного уравнения неотрицательна при любом значении x, поэтому при $a<0$ корней нет.

Пусть $a \geq 0$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$x+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2a-x}+2a-x=a^2;\ \begin{cases}2\sqrt{(2a-x)x}=a^2-2a,\\ 0\leq x\leq 2a.\end{cases}$$

Левая часть полученного уравнения неотрицательна при любом значении x, поэтому при $0<a<2$ корней нет.

При $a=0$ уравнение $2\sqrt{-x^2}=0$ имеет единственный корень $x=0$.

При $a\geq 2$ получаем:

$$\begin{cases}4(2a-x)x=a^4-4a^3+4a^2,\\ 0\leq x\leq 2a;\end{cases}\ \begin{cases}4x^2-8ax+\left(a^4-4a^3+4a^2\right)=0,\\ 0\leq x\leq 2a.\end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения равен

$$64a^2-16\left(a^4-4a^3+4a^2\right)=64a^3-16a^4,$$

значит, это уравнение имеет два корня при $0<a<4$. В этом случае корни квадратного уравнения $4x^2-8ax+\left(a^4-4a^3+4a^2\right)=0$ равны

$$x_1=a\left(1-\frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}\right),\ x_2=a\left(1+\frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}\right)$$

и всегда принадлежат отрезку $[0;2a]$, поскольку

$$a^2-4a+4\geq 0;\ \frac{4a-a^2}{4}\leq 1;\ \frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}\leq 1.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при

$$2\leq a<4.$$

Ответ: $2\leq a<4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=4$ и/или $a=2$	3
Доказано, что корни уравнения $4x^2-8ax+\left(a^4-4a^3+4a^2\right)=0$ удовлетворяют условию $0\leq x\leq 2a$	2
Задача верно сведена к исследованию корней квадратного уравнения $4x^2-8ax+\left(a^4-4a^3+4a^2\right)=0$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

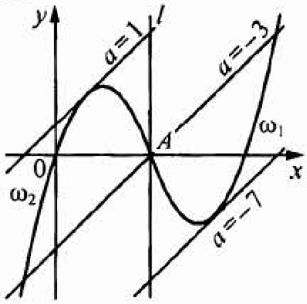
18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3)(y+3x-9)=|x-3|^3,\\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.



Рассмотрим три случая.

1) Если $x > 3$, то получаем уравнение

$$(x-3)(y+3x-9)=(x-3)\left(x^2-6x+9\right);$$

$$y=x^2-9x+18.$$

Полученное уравнение задаёт параболу

$$y=x^2-9x+18.$$

2) Если $x=3$, то координаты любой точки прямой $x=3$ удовлетворяют уравнению.

3) Если $x<3$, то получаем уравнение

$$(x-3)(y+3x-9)=(3-x)\left(x^2-6x+9\right);\ y=-x^2+3x.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $y=-x^2+3x$.

Таким образом, в первом случае мы получаем дугу ω_1 параболы $y=x^2-9x+18$ с концом в точке $A(3;0)$, во втором — прямую l, задаваемую уравнением $x=3$, в третьем — дугу ω_2 параболы $y=-x^2+3x$ с концом в точке A (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. При каждом значении a оно задаёт прямую m, параллельную прямой $y=x$ или совпадающую с ней.

Таким образом, прямая m пересекает прямую l при любом значении a, имеет одну общую точку с дугой ω_1 при $a=-7$ и $a>-3$, имеет две общие точки с дугой ω_1 при $-7<a\le-3$, имеет одну общую точку с дугой ω_2 при $a<-3$ и $a=1$, имеет две общие точки с дугой ω_2 при $-3\le a<1$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой l и дуг ω_1 и ω_2 с прямой m. Таким образом, исходная система имеет ровно четыре решения при

$$-7<a<-3;\ -3<a<1.$$

Ответ: $-7<a<-3$; $-3<a<1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=-3$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $(-7;-3)$ или $(-3;1)$; возможно, с включением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг парабол и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(xy^2-xy-6y+6\right)\sqrt{y+2}=0,\\ y=ax\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

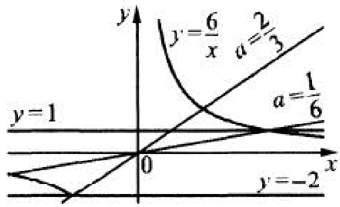
Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$(y-1)(xy-6)\sqrt{y+2}=0.$$

При $y<-2$ левая часть уравнения не имеет смысла.

При $y\ge -2$ уравнение задаёт прямые $y=-2$, $y=1$ и гиперболу $y=\frac{6}{x}$ (см. рисунок).



При каждом значении a уравнение $y=ax$ задаёт прямую m с угловым коэффициентом a, проходящую через начало координат.

Прямые m проходят через точки пересечения прямых $y=-2$, $y=1$ и гиперболы $y=\frac{6}{x}$ при $a=\frac{1}{6}$ и $a=\frac{2}{3}$.

При $y\ge -2$ прямые m пересекают прямую $y=-2$ при любом ненулевом значении a, прямую $y=1$ при любом ненулевом значении a, пересекают правую ветвь гиперболы $y=\frac{6}{x}$ при $a>0$, пересекают левую ветвь гиперболы $y=\frac{6}{x}$ при $0<a\le\frac{2}{3}$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямых $y=-2$, $y=1$ и гиперболы $y=\frac{6}{x}$ с прямой m при условии $y\ge -2$.

Таким образом, исходная система имеет ровно три решения при

$$a=\frac{1}{6};\ a\ge\frac{2}{3}.$$

Ответ: $a=\frac{1}{6}$; $a\ge\frac{2}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a=\frac{2}{3}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ множества значений a, возможно, с включением граничной точки	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гиперболы и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4