15 Решите неравенство $(5x-13)\cdot\log_{2x-5}\left(x^2-6x+10\right)\geq 0$.

Решение.

Заметим, что $x^2-6x+10=(x-3)^2+1\geq 1$ при любых значениях x. Значит, выражение $\log_{2x-5}\left(x^2-6x+10\right)$ положительно при $x>3$, отрицательно при $\frac{5}{2}<x<3$ и не определено при $x\leq\frac{5}{2}$ и $x=3$.

При $x>3$ выражение $5x-13$ положительно, а при $\frac{5}{2}<x<3$ исходное неравенство равносильно неравенству $5x-13\leq 0$, откуда $x\leq\frac{13}{5}$.

Таким образом, решение исходного неравенства:

$$\frac{5}{2}<x\leq\frac{13}{5};\ x>3.$$

Ответ: $\left(\frac{5}{2};\frac{13}{5}\right]$; $(3;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\frac{13}{5}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравечство $\frac{4^x-2^{x+4}+30}{2^x-2}+\frac{4^x-7\cdot 2^x+3}{2^x-7}\leq 2^{x+1}-14$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t^2-16t+30}{t-2}+\frac{t^2-7t+3}{t-7} \le 2t-14;$$

$$\frac{(t-14)(t-2)}{t-2}+\frac{2}{t-2}+\frac{t(t-7)}{t-7}+\frac{3}{t-7} \le 2t-14;$$

$$\frac{2}{t-2}+\frac{3}{t-7} \le 0;\ \frac{t-4}{(t-2)(t-7)} \le 0,$$

откуда $t<2$; $4 \le t < 7$.

При $t<2$ получим: $2^x<2$, откуда $x<1$.

При $4 \le t < 7$ получим: $4 \le 2^x < 7$, откуда $2 \le x < \log_2 7$.

Решение исходного неравенства:

$$x<1;\ 2 \le x < \log_2 7.$$

Ответ: $(-\infty;1)$; $[2;\log_2 7)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $125^x-25^x+\frac{4\cdot 25^x-20}{5^x-5} \le 4$.

Решение.

Пусть $t=5^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t^3-t^2+\frac{4t^2-20}{t-5} \le 4;\ t^3-t^2+\frac{4t^2-4t}{t-5} \le 0;\ \left(t^2-t\right)\left(t+\frac{4}{t-5}\right) \le 0;$$

$$\frac{t(t-1)\left(t^2-5t+4\right)}{t-5} \le 0;\ \frac{t(t-1)^2(t-4)}{t-5} \le 0,$$

откуда $t \le 0$; $t=1$; $4 \le t < 5$.

При $t \le 0$ получим: $5^x \le 0$, решений нет.

При $t=1$ получим: $5^x=1$, откуда $x=0$.

При $4 \le t < 5$ получим: $4 \le 5^x < 5$, откуда $\log_5 4 \le x < 1$.

Решение исходного неравенства:

$$x=0;\ \log_5 4 \le x < 1.$$

Ответ: 0; $[\log_5 4;1)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или $\log_5 4$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $2\log_{(x^2-6x+10)^2}(5x^2+3)\le\log_{x^2-6x+10}(4x^2+7x+3)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$\log_{(x-3)^2+1}(5x^2+3)\le\log_{(x-3)^2+1}(4x^2+7x+3);$$

$$\begin{cases}x\ne3,\\5x^2+3\le4x^2+7x+3;\end{cases}\begin{cases}x\ne3,\\x(x-7)\le0,\end{cases}$$

откуда $0\le x<3$ или $3<x\le7$.

Решение исходного неравенства:

$$0\le x<3;\ 3<x\le7.$$

Ответ: $[0;3);\ (3;7]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 7, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

---

15 Решите неравенство $\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(\dfrac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right)\le0$.

Решение.

Поскольку $1-\dfrac{1}{(x-1)^2}<1$ при $x\ne1$, получаем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\ge1,\\1-\dfrac{1}{(x-1)^2}>0;\end{cases}\begin{cases}\dfrac{4x+3}{(x-2)(x-1)}\ge0,\\x(x-2)>0,\end{cases}$$

откуда $-\dfrac{3}{4}\le x<0$ или $x>2$.

Решение исходного неравенства: $-\dfrac{3}{4}\le x<0;\ x>2$.

Ответ: $\left[-\dfrac{3}{4};0\right);\ (2;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $-\dfrac{3}{4}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

---

15 Решите неравенство $\log_{\frac{x}{2}}(x^2-2x+1)\ge2$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<\frac{x}{2}<1$.

$$\begin{cases}0<x<2,\\ x^2-2x+1>0,\\ x^2-2x+1\le\frac{x^2}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}0<x<2,\\ (x-1)^2>0,\\ 3x^2-8x+4\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}0<x<2,\\ x\ne 1,\\ (3x-2)(x-2)\le 0,\end{cases}$$

откуда $\frac{2}{3}\le x<1$; $1<x<2$.

Второй случай: $\frac{x}{2}>1$.

$$\begin{cases}x>2,\\ x^2-2x+1\ge\frac{x^2}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}x>2,\\ 3x^2-8x+4\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x>2,\\ (3x-2)(x-2)\ge 0,\end{cases}$$

откуда $x>2$.

Решение исходного неравенства:

$$\frac{2}{3}\le x<1;\ 1<x<2;\ x>2.$$

Ответ: $\left[\frac{2}{3};1\right)$; $(1;2)$; $(2;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\frac{2}{3}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{9^x-3^{x+1}-19}{3^x-6}+\frac{9^{x+1}-3^{x+4}+2}{3^x-9}\le 10\cdot 3^x+3$.

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t^2-3t-19}{t-6}+\frac{9t^2-81t+2}{t-9}\le 10t+3;$$

$$\frac{(t+3)(t-6)}{t-6}-\frac{1}{t-6}+\frac{9t(t-9)}{t-9}+\frac{2}{t-9}\le 10t+3;$$

$$-\frac{1}{t-6}+\frac{2}{t-9}\le 0;\ \frac{t-3}{(t-6)(t-9)}\le 0,$$

откуда $t\le 3$; $6<t<9$.

При $t\le 3$ получим: $3^x\le 3$, откуда $x\le 1$.

При $6<t<9$ получим: $6<3^x<9$, откуда $\log_3 6<x<2$.

Решение исходного неравенства:

$$x\le 1;\ \log_3 6<x<2.$$

Ответ: $(-\infty;1]$; $(\log_3 6;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\dfrac{27^{x+\frac{1}{3}}-10\cdot 9^x+10\cdot 3^x-5}{9^{x+\frac{1}{2}}-10\cdot 3^x+3}\le 3^x+\dfrac{1}{3^x-2}+\dfrac{1}{3^{x+1}-1}.$

Решение.

Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{3t^3-10t^2+10t-5}{3t^2-10t+3}\le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1};$$

$$\frac{t\left(3t^2-10t+3\right)}{3t^2-10t+3}+\frac{6t-2}{3t^2-10t+3}+\frac{t-3}{3t^2-10t+3}\le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1};$$

$$t+\frac{2}{t-3}+\frac{1}{3t-1}\le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1};$$

$$\frac{2}{t-3}\le\frac{1}{t-2},\text{ где } t\ne\frac{1}{3};\ \frac{t-1}{(t-2)(t-3)}\le 0,\text{ где } t\ne\frac{1}{3},$$

откуда $t<\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}<t\le 1$; $2<t<3$.

При $t<\frac{1}{3}$ получим: $3^x<\frac{1}{3}$, откуда $x<-1$.

При $\frac{1}{3}<t\le 1$ получим: $\frac{1}{3}<3^x\le 1$, откуда $-1<x\le 0$.

При $2<t<3$ получим: $2<3^x<3$, откуда $\log_3 2<x<1$.

Решение исходного неравенства:

$$x<-1;\ -1<x\le 0;\ \log_3 2<x<1.$$

Ответ: $(-\infty;-1)$; $(-1;0]$; $(\log_3 2;1)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2