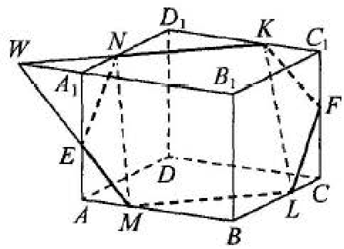
14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Решение.



а) Плоскость MNK пересекает плоскости оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ по параллельным прямым, значит, прямые NK и ML параллельны и $CL = 1$.

Вычислим стороны и диагонали четырёхугольника $MNKL$:

$$NK = ML = \sqrt{MB^2 + BL^2} = 5\sqrt{2},$$

$$LK = MN = \sqrt{MA^2 + AA_1{}^2 + A_1N^2} = 5\sqrt{2},$$

$$MK = \sqrt{(MB - KC_1)^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{(BL - NA_1)^2 + AB^2 + AA_1^2} = LN.$$

Поэтому $MNKL$ — квадрат.

б) Пусть W — точка пересечения прямых NK и A_1B_1. Тогда $WA_1 = NA_1 = MA$, поэтому прямая WM, а значит и плоскость MNK, пересекает ребро AA_1 в его середине E. Аналогично, плоскость MNK пересекает ребро CC_1 в его середине F.

В прямоугольнике $AEFC$ имеем $EF = AC = 6\sqrt{2}$. Сечение $MENKFL$ состоит из двух равных трапеций $ENKF$ и $EMLF$, причём прямая MN перпендикулярна их основаниям. Значит, искомая площадь равна

$$2 \cdot \frac{ML + EF}{2} \cdot \frac{MN}{2} = 55.$$

Ответ: б) 55.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = 2$, $B_1L = 4$. Точка M — середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

Решение.

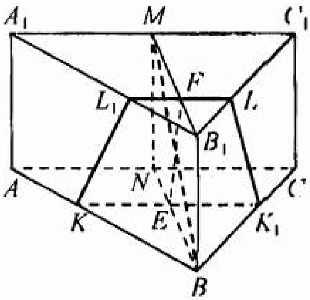


Рис. 1

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные AC. Пусть эти прямые пересекают рёбра BC и A_1B_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ. Рассмотрим плоскость BB_1M. Пусть эта плоскость пересекает прямые AC, KK_1 и LL_1 в точках N, E и F соответственно. Четырёхугольник BB_1MN — прямоугольник, причём

$$BB_1 = 3\sqrt{6},\ B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot A_1B_1 = 6\sqrt{3}.$$

Кроме того, $NE:EB = AK:KB = 1:5$, $B_1F:FM = B_1L:LC_1 = 1:2$, откуда $MF = 4\sqrt{3}$, $NE = \sqrt{3}$. Пусть FP — высота трапеции EFB_1B (рис. 2), тогда

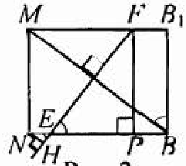


Рис. 2

$$EP = MF - NE = 3\sqrt{3}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\angle BEF = \frac{FP}{EP} = \sqrt{2} = \frac{MB_1}{BB_1} = \operatorname{tg}\angle MBB_1$,

$$\angle BEF = \angle MBB_1 = 90^\circ - \angle MBE,$$

то есть прямые EF и BM перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой AC, которая перпендикулярна плоскости BB_1M. Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой BM, поэтому прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Поскольку прямая AC параллельна плоскости γ, расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки N до прямой EF. Опустим из точки N перпендикуляр NH на прямую EF. Тогда

$$NH = NE\cdot\sin\angle NEH = NE\cdot\sin\angle BEF = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Ответ: б) $\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

Решение.

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные BD. Пусть эти прямые пересекают рёбра CD и B_1C_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ. Рассмотрим плоскость ACC_1. Пусть эта плоскость пересекает прямые KK_1 и LL_1 в точках E и F соответственно. Четырёхугольник AA_1C_1C — прямоугольник, причём

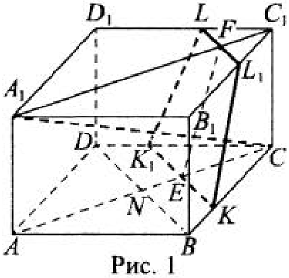


Рис. 1

$$AA_1 = 4\sqrt{2},\ AC = 8\sqrt{2}.$$

Кроме того, $\dfrac{AC}{EC} = \dfrac{2BC}{KC} = \dfrac{8}{3}$, $\dfrac{A_1C_1}{FC_1} = \dfrac{2D_1C_1}{LC_1} = 8$, откуда $EC = 3\sqrt{2}$, $C_1F = \sqrt{2}$.

Пусть FP — высота трапеции EFC_1C (рис. 2), тогда $EP = EC - C_1F = 2\sqrt{2}$.

Поскольку $\operatorname{tg}\angle CEF = \dfrac{FP}{EP} = 2 = \dfrac{A_1C_1}{CC_1} = \operatorname{tg}\angle A_1CC_1$,

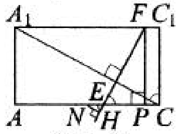


Рис. 2

$$\angle CEF = \angle A_1CC_1 = 90^\circ - \angle A_1CA,$$

то есть прямые EF и A_1C перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой BD, которая перпендикулярна плоскости AA_1C. Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой A_1C, поэтому прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Пусть N — точка пересечения AC и BD. Поскольку прямая BD параллельна плоскости γ, расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки N до прямой EF. Опустим из точки N перпендикуляр NH на прямую EF. Тогда

$$NH = NE \cdot \sin\angle NEH = \left(\frac{AC}{2} - EC\right) \cdot \sin\angle CEF = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: б) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB соответственно, а NT — высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой отрезка SM.

б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC.

ть

Решение.

а) Поскольку пирамида $SABCD$ правильная, точки T и H лежат в плоскости SNM, перпендикулярной плоскости ABC (рис. 1).

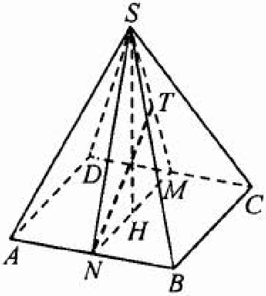


Рис. 1

$$AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{6},\ AS = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{15},$$

$$MN = AD = 2\sqrt{3},\ SM = SN = \sqrt{SA^2 - AN^2} = 2\sqrt{3}.$$

Значит, треугольник SNM равносторонний, а NT — его высота. Следовательно, T — середина SM.

б) Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки T на прямую SC (рис. 2). Прямые NT и TE перпендикулярны, так как NT — высота пирамиды $NSCD$. Поскольку отрезок TE перпендикулярен как прямой SC, так и прямой NT, его длина и есть искомое расстояние.

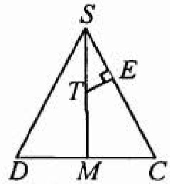


Рис. 2

Прямоугольные треугольники SET и SMC подобны, следовательно, $\frac{ET}{MC} = \frac{ST}{SC}$, откуда $ET = \frac{ST \cdot CM}{SC} = \frac{SM \cdot CD}{4SC} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

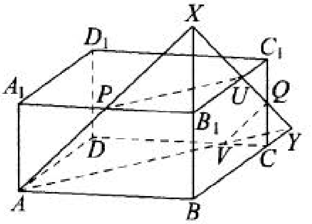
14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U.

а) Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2:1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

Решение.

а) Пусть прямые AP и BB_1 пересекаются в точке X (см. рисунок). Тогда точка U — точка пересечения прямых XQ и B_1C_1.



Треугольники AXB и PXB_1 подобны, откуда

$$\frac{XB_1}{XB}=\frac{PB_1}{AB}=\frac{1}{2};\ B_1X=BB_1=2.$$

Треугольники B_1XU и C_1QU подобны, откуда

$$\frac{B_1U}{C_1U}=\frac{B_1X}{C_1Q}=2;\ B_1U=2C_1U.$$

Значит, $B_1U:UC_1=2:1$.

б) Пусть Y — точка пересечения прямых QX и BC, а V — точка пересечения прямых CD и AY. Тогда пятиугольник $APUQV$ — сечение, площадь которого надо найти.

Треугольники C_1UQ и CYQ равны, откуда $CY=C_1U=1$.

Треугольники AYB и VYC подобны, откуда $\frac{VC}{AB}=\frac{CY}{BY}=\frac{1}{4}$; $VC=\frac{AB}{4}=1$.

Четырёхугольник $APUY$ — равнобедренная трапеция, в которой

$$AP=PU=UY=2\sqrt{2},\ AY=4\sqrt{2}.$$

Все стороны треугольника QYV равны $\sqrt{2}$.

Высота трапеции $APUY$ равна $\sqrt{AP^2-\left(\frac{AY-PU}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$, а её площадь равна $\frac{2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{6}=6\sqrt{3}$. Площадь треугольника QYV равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значит, искомая площадь равна $6\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: б) $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

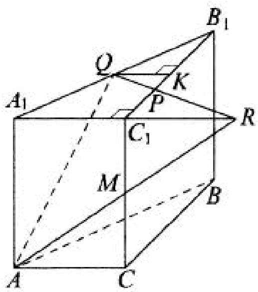
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* **ИЛИ** обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, $AC=4$, $BC=16$, $AA_1=4\sqrt{2}$. Точка Q — середина ребра A_1B_1, а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении $1:2$, считая от вершины C_1. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ.

Решение.



а) Пусть R — точка пересечения прямых PQ и A_1C_1, а K — середина B_1C_1 (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых AR и CC_1. Треугольники PKQ и PC_1R подобны, откуда

$$\frac{C_1R}{KQ}=\frac{C_1P}{KP}=2;\ C_1R=2KQ=A_1C_1=4.$$

Отрезок C_1M — средняя линия треугольника AA_1R, поскольку $A_1C_1=C_1R$ и прямые AA_1 и CC_1 параллельны. Значит,

$$C_1M=\frac{A_1A}{2}=\frac{C_1C}{2},$$

то есть M — середина CC_1.

б) Расстояние от точки A_1 до плоскости APQ равно высоте h пирамиды A_1AQR, опущенной из вершины A_1.

С одной стороны, объём пирамиды A_1AQR равен

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{B_1C_1}{2}\ S_{AA_1R}=\frac{1}{3}\cdot\frac{B_1C_1}{2}\cdot\frac{1}{2}AA_1\ \ A_1R=\frac{128\sqrt{2}}{3}.$$

С другой стороны, объём пирамиды A_1AQR равен $\frac{1}{3}\ h\ S_{AQR}$. Значит,

$$h=\frac{128\sqrt{2}}{S_{AQR}}.$$

В треугольнике AQR находим стороны:

$$AQ=QR=10,\ AR=4\sqrt{6}.$$

Площадь равнобедренного треугольника AQR равна

$$S_{AQR}=\frac{1}{2}\ AR\ \sqrt{AQ^2-\frac{AR^2}{4}}=4\sqrt{114}.$$

Следовательно,

$$h=\frac{128\sqrt{2}}{4\sqrt{114}}=\frac{32\sqrt{57}}{57}.$$

Ответ: б) $\frac{32\sqrt{57}}{57}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

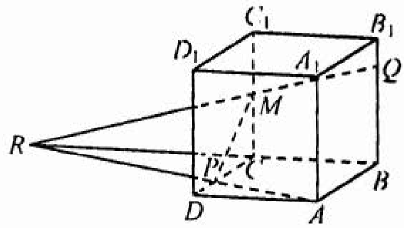
14 На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP=4$, а $B_1Q=3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

Решение.

а) Пусть прямые AP и BC пересекаются в точке R (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых QR и CC_1.



Треугольники ARB и PRC подобны, откуда $\frac{RC}{RB} = \frac{PC}{AB} = \frac{2}{3}$; $RC = 2BC = 24$.

Треугольники QRB и MRC подобны, откуда $\frac{MC}{QB} = \frac{RC}{RB} = \frac{2}{3}$; $MC = \frac{2}{3}QB = 6$.

Значит, M — середина CC_1.

б) Расстояние от точки C до плоскости APQ равно высоте h пирамиды $CPRM$, опущенной из вершины C. Объём пирамиды $CPRM$, с одной стороны, равен

$$\frac{1}{3} \cdot RC \cdot S_{MPC} = \frac{1}{3} \cdot RC \cdot \frac{1}{2} PC \cdot CM = 192.$$

С другой стороны, объём пирамиды $CPRM$ равен $\frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{RPM}$. Значит,

$$h = \frac{3 \cdot 192}{S_{RPM}}.$$

В треугольнике RPM находим стороны: $RP = 8\sqrt{10}$, $RM = 6\sqrt{17}$, $MP = 10$. По теореме косинусов

$$\cos\angle MRP = \frac{MR^2 + RP^2 - MP^2}{2MR \cdot PR} = \frac{12}{\sqrt{170}},$$

откуда $\sin\angle MRP = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}}$.

Площадь треугольника RPM равна $S_{RPM} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}} = 24\sqrt{26}$.

Следовательно, $h = \frac{3 \cdot 192}{24\sqrt{26}} = \frac{12\sqrt{26}}{13}$.

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

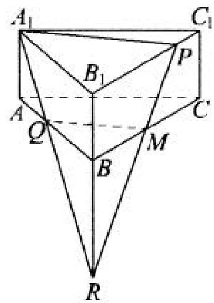
14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ.

Решение.

а) Пусть прямые A_1Q и BB_1 пересекаются в точке R (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых PR и BC.



Треугольники A_1B_1R и QBR подобны, откуда

$$\frac{BR}{B_1R}=\frac{QB}{A_1B_1}=\frac{2}{3};\ RB=2BB_1=4.$$

Треугольники PB_1R и MBR подобны, откуда

$$\frac{BM}{B_1P}=\frac{BR}{B_1R}=\frac{2}{3};\ BM=\frac{2}{3}B_1P=6.$$

Значит, M — середина BC.

б) Расстояние от точки B до плоскости A_1PQ равно высоте h пирамиды $BRQM$, опущенной из вершины B. Объём пирамиды $BRQM$, с одной стороны, равен

$$\frac{1}{3}\cdot RB\cdot S_{QMB}=\frac{1}{3}\cdot RB\cdot\frac{1}{2}BQ\cdot BM\cdot\sin 60^\circ=16\sqrt{3}.$$

С другой стороны, объём пирамиды $BRQM$ равен $\frac{1}{3}\ h\ S_{QMR}$. Значит,

$$h=\frac{3\cdot 16\sqrt{3}}{S_{QMR}}.$$

В треугольнике QMR находим стороны:

$$QM=MR=2\sqrt{13},\ QR=4\sqrt{5}.$$

Площадь равнобедренного треугольника QMR равна

$$S_{QMR}=\frac{1}{2}\cdot QR\ \sqrt{QM^2-\frac{QR^2}{4}}=8\sqrt{10}.$$

Следовательно, $h=\frac{3\ 16\sqrt{3}}{8\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2