

ЕГЭ математика профиль 2018 Экзаменационные критерии Вариант 305
 ЕГЭ математика профиль 2018 Экзаменационные критерии Вариант 305. Критерии
 оценивания заданий с развёрнутым ответом по математике

Единый государственный экзамен МАТЕМАТИКА. Профильный уровень (305 – 1/8)

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$\sqrt{3} \sin x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x + 1; \quad \sqrt{3} \sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 1;$$

$$\sin x \cdot (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0.$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi l$,

$l \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

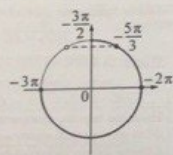
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

Получим числа: -3π ; -2π ; $-\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -3\pi; -2\pi; -\frac{5\pi}{3}.$$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© 2018 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
 Копирование не допускается

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

14

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 8$, $BB_1 = 6$, $B_1C_1 = 15$.

Решение.

а) Рассмотрим плоскость, проходящую через ось цилиндра и прямую AC_1 . Обозначим точку пересечения этой плоскости и окружности основания цилиндра, содержащей точку A , через C . Тогда CC_1 — образующая цилиндра. Отрезок AC пересекает ось цилиндра. Значит, он проходит через центр окружности основания цилиндра, то есть является её диаметром. Следовательно, угол ABC прямой.

Прямая CC_1 является образующей цилиндра, поэтому она перпендикулярна прямой AB . Таким образом, прямая AB перпендикулярна плоскости BCC_1 , а значит, угол ABC_1 прямой.

б) Поскольку прямые BB_1 и CC_1 параллельны, искомый угол равен углу AC_1C .

Треугольники ABC и ACC_1 являются прямоугольными, поэтому:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + B_1C_1^2} = 17; \quad \operatorname{tg} \angle AC_1C = \frac{AC}{CC_1} = \frac{AC}{BB_1} = \frac{17}{6}.$$

$$\text{Ответ: б) } \operatorname{arctg} \frac{17}{6}.$$



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б, возможно, с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Единый государственный экзамен МАТЕМАТИКА. Профильный уровень (305 – 3/8)

- 15) Решите неравенство $\log_2(2x^2 + 4) - \log_2(x^2 - x + 10) \geq \log_2\left(2 - \frac{1}{x}\right)$.

Решение.

Правая часть неравенства определена при $x < 0$ и $x > \frac{1}{2}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $2x^2 + 4$ принимает положительные значения, при $x < 0$ и $x > \frac{1}{2}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{2x^2 + 4}{x^2 - x + 10} \geq \frac{2x - 1}{x}; \quad \frac{2x^2 + 4x}{x(x^2 - x + 10)} \geq \frac{2x^3 - 3x^2 + 21x - 10}{x(x^2 - x + 10)};$$

$$\frac{3x^2 - 17x + 10}{x(x^2 - x + 10)} \geq 0; \quad \frac{(x - 5)(3x - 2)}{x(x^2 - x + 10)} \geq 0,$$

откуда $0 < x \leq \frac{2}{3}$; $x \geq 5$. Учитывая ограничения $x < 0$ и $x > \frac{1}{2}$, получаем:

$$\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}; \quad x \geq 5.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]; [5; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $\frac{2}{3}$ и/или 5, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 16) Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 30$, $BC = 24$, $CD = 50$, $AD = 74$.
а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
б) Найдите O_1O_2 .

© 2018 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование не допускается

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Решение.

а) Точка O_1 равноудалена от прямых AD и BC .

Значит, точка O_1 лежит на средней линии трапеции $ABCD$. Аналогично, точка O_2 лежит на средней линии трапеции $ABCD$. Следовательно, прямая O_1O_2 содержит среднюю линию трапеции $ABCD$, а значит, прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Пусть K — середина стороны AB , а L — середина стороны CD . Точка O_1 равноудалена от прямых AB , BC и AD , поэтому лучи AO_1 и BO_1 являются биссектрисами углов DAB и ABC соответственно. Значит,

$$\angle BAO_1 + \angle ABO_1 = \frac{\angle BAD + \angle ABC}{2} = 90^\circ,$$

то есть $\angle AO_1B = 90^\circ$. Следовательно, KO_1 — медиана, проведённая к гипотенузе AB прямоугольного треугольника AO_1B .

Аналогично, треугольник CO_2D прямоугольный, а LO_2 — медиана, проведённая к его гипотенузе CD . Точки K , O_1 , O_2 и L лежат на средней линии трапеции $ABCD$. Значит,

$$O_1O_2 = KL - KO_1 - LO_2 = \frac{AD + BC}{2} - \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} = 9.$$

Ответ: б) 9.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a=1-\sqrt{2}$ и/или $a=-3+3\sqrt{2}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(1-\sqrt{2}; -3+3\sqrt{2})$, возможно, с включением граничных точек и/или исключением одной из точек $a=0$ или $a=1,2$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получен один из промежутков $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$ или $(-3-3\sqrt{2}; -3+3\sqrt{2})$, возможно, с включением граничных точек ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19 В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 37 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
- а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 2 раза?
 б) Средний балл в школе №1 вырос на 5%, средний балл в школе №2 также вырос на 5%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 17?
 в) Средний балл в школе №1 вырос на 5%, средний балл в школе №2 также вырос на 5%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

Решение.

а) Пусть в школе №1 писали тест n учащихся, а средний балл равнялся A . Тогда суммарный балл всех учащихся этой школы равнялся nA , а после перехода одного учащегося в школу №2 суммарный балл стал равняться $2(n-1)A$. Таким образом, суммарный балл учащихся набрал положительное количество баллов, а $n \geq 2$.

б) Пусть в школе №2 средний балл равнялся B , а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:
 $u = nA - 1,05(n-1)A = 1,05(38-n)B - (37-n)B$; $20u = (21-n)A = (58-n)B$.
 Если $B=1$, то $n=18$, поскольку число $(58-n)B$ должно делиться на 20, а $(21-n)A$ не должно быть отрицательным. Получаем $3A=40$, что невозможно, поскольку A целое.

в) Заметим, что если $B=2$, то $n=8$ или $n=18$. В первом случае $13A=100$, а во втором $3A=80$. Значит, ни один из этих случаев не возможен.

При $B=3$ получаем $n=18$, откуда $u=6$ и $A=40$. Этот случай реализуется, например, если в школе №1 писали тест 18 учащихся, 17 из них набрали по 42 балла, а один — 6 баллов, в школе №2 писали тест 19 учащихся и каждый набрал по 3 балла, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося 6 баллов.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 3.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4