

ЕГЭ математика профиль 2018 Экзаменационные критерии Вариант 304
 ЕГЭ математика профиль 2018 Экзаменационные критерии Вариант 304. Критерии
 оценивания заданий с развёрнутым ответом по математике

Единый государственный экзамен МАТЕМАТИКА. Профильный уровень (304 – 1/8)

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$\sqrt{3} \sin x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x + 1; \quad \sqrt{3} \sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 1;$$

$$\sin x \cdot (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0.$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

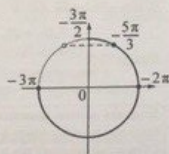
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

Получим числа: -3π ; -2π ; $-\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -3\pi; -2\pi; -\frac{5\pi}{3}.$$



Содержание критерия	Баллы
Обосновано получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обосновано получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© 2018 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
 Копирование не допускается

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

14

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
 б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 10$, $BB_1 = 7$, $B_1C_1 = 24$.

Решение.

а) Рассмотрим плоскость, проходящую через ось цилиндра и прямую AC_1 . Обозначим точку пересечения этой плоскости и окружности основания цилиндра, содержащей точку A , через C . Тогда CC_1 — образующая цилиндра. Отрезок AC пересекает ось цилиндра. Значит, он проходит через центр окружности основания цилиндра, то есть является её диаметром. Следовательно, угол ABC прямой.

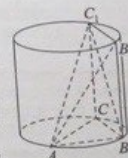
Прямая CC_1 является образующей цилиндра, поэтому она перпендикулярна прямой AB . Таким образом, прямая AB перпендикулярна плоскости BCC_1 , а значит, угол ABC_1 прямой.

б) Поскольку прямые BB_1 и CC_1 параллельны, искомый угол равен углу AC_1C .

Треугольники ABC и ACC_1 являются прямоугольными, поэтому:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + B_1C_1^2} = 26; \quad \operatorname{tg} \angle AC_1C = \frac{AC}{CC_1} = \frac{AC}{BB_1} = \frac{26}{7}.$$

Ответ: б) $\arctg \frac{26}{7}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обосновано получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обосновано получен верный ответ в пункте б, возможно, с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_2(2x^2 + 4) - \log_2(x^2 - x + 10) \geq \log_2\left(2 - \frac{1}{x}\right)$.

Решение.

Правая часть неравенства определена при $x < 0$ и $x > \frac{1}{2}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $2x^2 + 4$ принимает положительные значения, при $x < 0$ и $x > \frac{1}{2}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{2x^2 + 4}{x^2 - x + 10} \geq \frac{2x - 1}{x}; \quad \frac{2x^3 + 4x}{x(x^2 - x + 10)} \geq \frac{2x^3 - 3x^2 + 21x - 10}{x(x^2 - x + 10)};$$

$$\frac{3x^2 - 17x + 10}{x(x^2 - x + 10)} \geq 0; \quad \frac{(x - 5)(3x - 2)}{x(x^2 - x + 10)} \geq 0,$$

откуда $0 < x \leq \frac{2}{3}$; $x \geq 5$. Учитывая ограничения $x < 0$ и $x > \frac{1}{2}$, получаем:

$$\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}; \quad x \geq 5.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]; [5; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $\frac{2}{3}$ и/или 5, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 10$, $BC = 8$, $CD = 20$, $AD = 28$.

- а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
б) Найдите O_1O_2 .

Решение.

а) Точка O_1 равноудалена от прямых AD и BC .

Значит, точка O_1 лежит на средней линии трапеции $ABCD$. Аналогично, точка O_2 лежит на средней линии трапеции $ABCD$.

Следовательно, прямая O_1O_2 содержит среднюю линию трапеции $ABCD$, а значит, прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Пусть K — середина стороны AB , а L — середина стороны CD . Точка O_1 равноудалена от прямых AB , BC и AD , поэтому лучи AO_1 и BO_1 являются биссектрисами углов DAB и ABC соответственно. Значит,

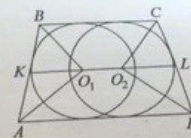
$$\angle BAO_1 + \angle ABO_1 = \frac{\angle BAD + \angle ABC}{2} = 90^\circ,$$

то есть $\angle AO_1B = 90^\circ$. Следовательно, KO_1 — медиана, проведённая к гипотенузе AB прямоугольного треугольника AO_1B .

Аналогично, треугольник CO_2D прямоугольный, а LO_2 — медиана, проведённая к его гипотенузе CD . Точки K , O_1 , O_2 и L лежат на средней линии трапеции $ABCD$. Значит,

$$O_1O_2 = KL - KO_1 - LO_2 = \frac{AD + BC}{2} - \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} = 3.$$

Ответ: б) 3.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Единый государственный экзамен МАТЕМАТИКА. Профильный уровень (304 – 5/8)

- 17 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
 - к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
- Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1010 тысяч рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна A тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$A; A-80; A-160; \dots; A-720; A-800; 0$.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$1,02A; 1,02(A-80); \dots; 1,02(A-720); 1,02(A-800)$.

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$0,02A+80; 0,02(A-80)+80; \dots; 0,02(A-720)+80; 1,02(A-800)$.

Всего следует выплатить

$10 \cdot 0,02 \cdot \frac{2A-720}{2} + 800 + 1,02(A-800) = 1,22A - 88$ (тыс. рублей),

откуда $1,22A - 88 = 1010; 1,22A = 1098; A = 900$.

Значит, сумма, которую планируется взять в кредит, равна 900 тыс. рублей.

Ответ: 900 тысяч рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© 2018 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование не допускается

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(a-4)x - 6ay + 10a^2 - 8a = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$
- имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы равносильно уравнению

$$(x-a+4)^2 + (y-3a)^2 = 16.$$

Это уравнение задаёт окружность ω радиусом 4 с центром в точке $(a-4; 3a)$.

Второе уравнение системы задаёт пару прямых $y=x$ и $y=-x$, пересекающихся в точке $(0; 0)$.

Прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Значит, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда окружность ω пересекается с каждой из прямых $y=x$ и $y=-x$ в двух точках и не проходит через их точку пересечения $(0; 0)$.

Число точек пересечения окружности ω с прямой $y=x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$x^2 - (4a-4)x + 5a^2 - 4a = 0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$(4a-4)^2 - 4(5a^2 - 4a) > 0; a^2 + 4a - 4 < 0,$$

откуда $-2 - 2\sqrt{2} < a < -2 + 2\sqrt{2}$.

Число точек пересечения окружности ω с прямой $y=-x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$x^2 + (2a+4)x + 5a^2 - 4a = 0;$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$(2a+4)^2 - 4(5a^2 - 4a) > 0; a^2 - 2a - 1 < 0,$$

откуда $1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$.

Окружность ω проходит через точку $(0; 0)$ при $5a^2 - 4a = 0$, то есть при $a=0$ и $a=0,8$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при $1 - \sqrt{2} < a < 0; 0 < a < 0,8; 0,8 < a < -2 + 2\sqrt{2}$.

Ответ: $1 - \sqrt{2} < a < 0; 0 < a < 0,8; 0,8 < a < -2 + 2\sqrt{2}$.

Единый государственный экзамен МАТЕМАТИКА. Профильный уровень (304 – 7/8)

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a=1-\sqrt{2}$ и/или $a=-2+2\sqrt{2}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(1-\sqrt{2}; -2+2\sqrt{2})$, возможно, с включением граничных точек и/или исключением одной из точек $a=0$ или $a=0,8$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получен один из промежутков $(-2-2\sqrt{2}; -2+2\sqrt{2})$ или $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$, возможно, с включением граничных точек ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19 В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 27 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
- а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти на 4%, средний балл в школе №2 также вырос на 4%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?
- б) Средний балл в школе №1 вырос на 4%, средний балл в школе №2 также вырос на 4%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

© 2015 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование не допускается

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Решение.

а) Пусть в школе №1 писали тест n учащихся, а средний балл равнялся A . Тогда суммарный балл всех учащихся этой школы равнялся nA , а после перехода одного учащегося в школу №2 суммарный балл стал равняться $2(n-1)A$. Таким образом, суммарный балл уменьшился на $(2-n)A$, что невозможно, поскольку перешедший учащийся набрал положительное количество баллов, а $n \geq 2$.

б) Пусть в школе №2 средний балл равнялся B , а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:
 $u = nA - 1,04(n-1)A = 1,04(28-n)B - (27-n)B$; $25u = (26-n)A = (53-n)B$.
 Если $B=1$, то $n=3$, поскольку число $(53-n)B$ должно делиться на 25, а $(26-n)A$ не должно быть отрицательным. Получаем $23A=50$, что невозможно, поскольку A целое.
 в) Заметим, что если $B=2$, $B=3$ или $B=4$, то $n=3$. В первом случае $23A=100$, во втором $23A=150$, а в третьем $23A=200$. Значит, ни один из этих случаев не возможен.
 При $B=5$ и $n=23$ получаем $u=6$ и $A=50$. Этот случай реализуется, например, если в школе №1 писали тест 23 учащихся, 22 из них набрали по 52 балла, а один — 6 баллов, в школе №2 писали тест 4 учащихся и каждый набрал по 5 баллов, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося 6 баллов.
 Ответ: а) нет; б) нет; в) 5.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — исковая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Скачать одним архивом